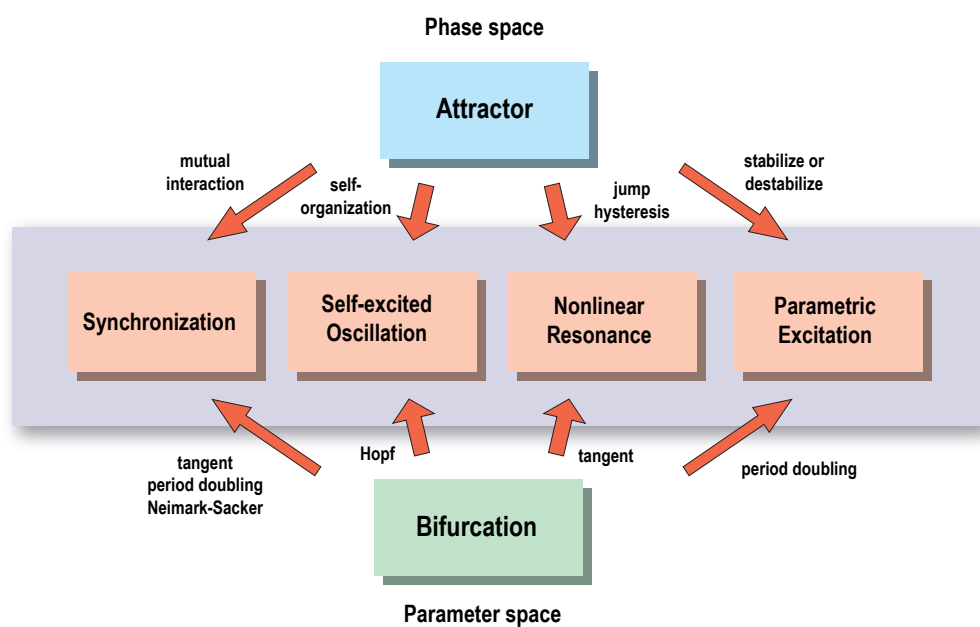


# 非線形現象入門

## 定性的的接近法



川上 博

2005

# はじめに

非線形は現象がおもしろい。単純なモデルにも思いの外、複雑な構造が見られることがある。非線形系にはそれだけ豊富な現象が内在し、我々に多くの情報を提供してくれるということなのであろう。非線形モデルを考えるということは、状態空間の広い範囲で展開される、いわゆる大域的現象に着目することであり、解析手段もそれにふさわしい方法が必要となる。これにはポアンカレ以来発展してきた定性的接近法が有効である。視点を大域的性質にむけ、現象を位相的に「やんわり」とらえることが大切である。このことをできるだけ平易に述べることを1つの目的として本書を構成した。

さて本書は、連続時間の力学系すなわち常微分方程式で記述される力学系にみられる非線形現象を定性的に解析する際、必要となる基礎的事項をおおざっぱに述べた入門書である。特に、周期振動に関係した現象を解析することが大域的性質を知るための出発点であると考え、これに必要な概念の整理や例題の選択を行った。これは周期振動に関係した現象、たとえば自励振動、非線形共振、同期現象、パラメータ励振などが多くの分野で問題とされ応用面から重要であり、かつ古くから種々の解析法が知られていることによる。また近年、周期振動とはならない非線形現象としてカオス振動に研究の興味が向けられている。しかし、カオス振動には非周期状態と周期状態が混在しており、このような非周期振動の理解にも周期振動に関する種々の定性的接近法が不可欠と考えられる。この意味でも周期振動の解析は大域的現象を理解するうえで大切である。

本書では、大域的性質の解析に微分方程式の定性的論に基づく数値的な接近法を用いた。このことは数学的にみると種々の性質を持つ解の存在を議論することから遠く離れているが、応用の立場からすると具体的に現象を理解し系をどう設計するかといった問題も多く、数値的な解析で十分な分野もあると考えたからである。

本書の特徴としては次の諸点が挙げられよう。

1. 平衡点と固定点（周期解）の位相的性質を  $n$  次元系について整理したこと。これは線形系の性質から得られることである。そのことを最初の数章を割いて詳しく説明した。
2. 平衡点と固定点（周期解）の分岐について初歩的な知識を整理し、数値計算に必要な手順を示したこと。これによって応用面で必要となる分岐現象の解析に対応できるようにしたこと。
3. 1., 2. を基に力学系の定性論と数値計算を組み合わせ、系の大域的性質を解析する方法を例示したこと。例題はできるだけ諸分野で研究のある系を取りあげた。

以下、本書の構成を簡単に紹介しておこう。第1章は本書で扱う力学系とはどのような数学モデルかを述べ、力学系の構成要素や構造についても簡単な例をあげて説明した。第2章から第4章までは平衡点と周期運動の位相的分類を扱っている。ここでの解析手法は線形系の解析とまったく同じものである。これらは非線形系を線形近似で解析できる典型的例となっている。この意味で局所的な解析方法といってよいであろう。第5章と第6章は平衡点や周期振動を数値的に解析する方法について述べてある。

第7章と第8章は分岐現象を扱っている。平衡点や周期運動の分岐は局所的な現象である。しかし、系のパラメータを大きく変化させた場合に種々の分岐図を作成する問題は必ずしも局所的とは言えず現象の定性的性質を知る上でも大切である。第8章は力学系の的大域的性質に関係した分岐現象を扱ってい

る。カオス振動とはどのような状態であるかについても基本的な事項を述べておいた。

最後に第 9 章ではこれまでの考え方を応用して 2, 3 の典型的な非線形現象について説明した。この章は、本来これから展開される力学系の解析結果を述べるつもりであったが、紙面の制約から今回は用語の簡単な説明程度で終わってしまった。

本書の記述は「定理 - 証明」式とはせず、単に事実を述べる方法を取った。そのため詳しい証明を必要と考える読者にはあいまいな記述に悩むことが多いと思う。また数学的に証明ができない数値的な結果もあまり気にせずに挙げておいた。そのため「証明」という見方からすれば随分ぼやけてしまっている部分もある。これは筆者の意図が現象の説明を優先したかったからである。

予備知識としては大学で 2 年生位までに習う線形代数と微分方程式の知識を想定した。したがって、学部 3 年生から大学院 1 年生程度の学生には専門を問わず容易に理解できるであろう。予備知識よりはむしろ問題意識を持っていることの方が現象を理解する上で大切である。自分が身近に適切な問題を持っていてどんなやり方で解析しようかと考えている状態であることが望ましい。読み進むうちにどれか簡単な例に関心を持って、その系をできる限り解析してみるのも 1 つの方法であろう。

数値計算を必要とする解析法や手順を述べているにもかかわらず、具体的な計算機プログラムなどは示すことができなかった。このことについては情報化の時代でもあり、必要ならば別の手段でプログラムのサンプルを提供できたらと考えている。

謝辞 (未稿)

bon voyage!

le 1<sup>er</sup> avril, 1998

Voici mon secret. Il est très simple: *on ne voit bien qu'avec le cœur. L'essentiel est invisible pour les yeux.* L'essentiel est invisible pour les yeux, répéta le petit prince, afin de se souvenir.

And now here is my secret, a very simple secret: *It is only with the heart that one can see rightly; what is essential is invisible to the eye.* What is essential is invisible to the eye, the little prince repeated, so that he would be sure to remember.

*"Le Petit Prince" par Antoine de Saint-Exupéry*

1995 年 8 月 川上 博

# 目次

<b>第 I 部 力学系の基礎</b>	vii
<b>第 1 章 動的システムとその力学系モデル</b>	1
1.1 力学系：動的システムとその数学モデル	1
1.2 力学系の構成要素	9
1.2.1 状態と状態空間	9
1.2.2 初期状態と系のパラメータ	10
1.2.3 連続時間の力学系	10
1.2.4 離散時間の力学系	12
1.3 力学系の構造	14
1.3.1 物理的に特別な構造を持った系	14
1.3.2 対称性を持った系	17
1.3.3 線形系と非線形系	18
1.4 本章のまとめと文献	20
1.4.1 本章のまとめ	20
1.4.2 本章の文献	21
1.5 練習問題 1	21
<b>第 2 章 平衡点とその安定性</b>	24
2.1 平衡点と系の線形化	24
2.2 線形定係数同次方程式の一般解	26
2.2.1 同次方程式の基本解	26
2.2.2 ジョルダン標準形を用いた一般解の表現	27
2.2.3 高階スカラー方程式の一般解とコンパニオン方程式	32
2.3 平衡点の位相的分類	34
2.3.1 双曲型平衡点と系の線形化	34
2.3.2 2次元双曲型平衡点と相平面図	38
2.3.3 3次元双曲型平衡点の位相的に異なるタイプ	42
2.4 平衡点の安定性	43
2.5 本章のまとめと文献	46

2.5.1	本章のまとめ	46
2.5.2	本章の文献	47
2.6	練習問題 2	48
<b>第 3 章</b>	<b>固定点とその安定性</b>	<b>49</b>
3.1	固定点と周期点	49
3.2	線形定係数同次差分方程式	51
3.2.1	同次方程式の基本解	51
3.2.2	線形写像としての性質	54
3.3	固定点の位相的分類	55
3.4	固定点の安定性	61
3.5	本章のまとめと文献	62
3.5.1	本章のまとめ	62
3.5.2	本章の文献	62
3.6	練習問題 3	62
<b>第 4 章</b>	<b>周期振動</b>	<b>64</b>
4.1	周期振動とポアンカレ写像	64
4.1.1	自律系の周期振動	64
4.1.2	ポアンカレ写像	69
4.1.3	周期的非自律系の周期振動	71
4.2	周期係数を持つ線形同次方程式	73
4.2.1	周期係数を持つ線形同次方程式の正規解	73
4.2.2	フロケ・リヤプーノフ (Floquet-Lyapounov) の表現定理	76
4.3	周期振動の位相的分類と安定性	81
4.4	本章のまとめと文献	84
4.4.1	本章のまとめ	84
4.4.2	本章の文献	85
4.5	練習問題 4	85
<b>第 5 章</b>	<b>周期解の近似計算</b>	<b>86</b>
5.1	線形系の強制振動	86
5.2	周期解の近似計算	92
5.2.1	摂動法	92
5.2.2	平均化法	101
5.3	本章のまとめと文献	105
5.3.1	本章のまとめ	105
5.3.2	本章の文献	105
5.4	練習問題 5	105

<b>第 6 章</b>	<b>平衡点と周期解の数値計算</b>	<b>108</b>
6.1	平衡点の計算：ニュートン法	108
6.1.1	平衡点の計算：ニュートン法	109
6.2	占部・ガレルキン法と調和平衡法	116
6.2.1	占部・ガレルキン法	116
6.2.2	調和平衡法と形式的平均化法	119
6.3	各種の変分方程式：運動の微分	121
6.3.1	初期値に関する変分方程式	122
6.3.2	パラメータに関する変分方程式	123
6.4	ポアンカレ写像の固定点の計算	125
6.4.1	周期的非自律系の固定点の計算	125
6.4.2	自律系の周期解の計算	127
6.5	本章のまとめと文献	130
6.5.1	本章のまとめ	130
6.5.2	本章の文献	131
6.6	練習問題 6	131
<b>第 7 章</b>	<b>局所的な分岐</b>	<b>134</b>
7.1	運動の有界性とリヤプーノフ関数	134
7.1.1	リヤプーノフ関数	135
7.1.2	散逸系 (dissipative system in the large)	136
7.2	余次元 1 の分岐	138
7.2.1	平衡点の分岐	138
7.2.2	周期振動の分岐	143
7.2.3	余次元の高い分岐	146
7.3	分岐集合の計算	147
7.3.1	平衡点の分岐計算	147
7.3.2	周期解すなわち固定点の分岐計算	148
7.3.3	計算例：自励系の強制振動 (同期化現象)	151
7.4	本章のまとめと文献	156
7.4.1	本章のまとめ	156
7.4.2	本章の文献	157
7.5	練習問題 7	157
<b>第 8 章</b>	<b>大域的性質とカオス</b>	<b>158</b>
8.1	2次元自律系の大域的性質	158
8.1.1	ポアンカレ・ベンディクソンの定理	160
8.1.2	セパトリクスの変化	162

---

8.1.3	構造安定性と大域的な分岐 . . . . .	162
8.2	二重漸近運動 . . . . .	167
8.2.1	ホモクリニック点近傍の性質 . . . . .	169
8.2.2	馬蹄形写像 . . . . .	171
8.2.3	記号力学系 $(\sigma, S_{-\infty}^{\infty})$ とカオスの運動 . . . . .	177
8.3	カオス振動 . . . . .	179
8.3.1	周期倍分岐の連鎖 . . . . .	181
8.3.2	カオス的アトラクタとリヤプーノフ指数 . . . . .	183
8.3.3	アトラクタの引力圏と大域的な分岐 . . . . .	189
8.4	本章のまとめと文献 . . . . .	191
8.4.1	本章のまとめ . . . . .	191
8.4.2	本章の文献 . . . . .	191
8.5	練習問題 8 . . . . .	192

## 第 I 部

# 力学系の基礎



# 第 1 章

## 動的システムとその力学系モデル

力学系の例は実に豊富である。物事を変化の様相でとらえると、それは広い意味で力学系を考えていることになる。このことはまた、力学系が多くの分野に関連のあることを意味している。この章では動的システムの数学モデルである力学系の簡単な例をあげて、以下の各章で取り扱う種々の事柄への準備と動機づけを行う。

最初に 1.1 では連続および離散時間の力学系の例をあげた。1.2 では力学系の構成要素について、使われる用語や本書で扱う系の範囲などについて説明した。1.3 では特別な力学系が持つ構造について必要と思われる基本的な事項を述べた。

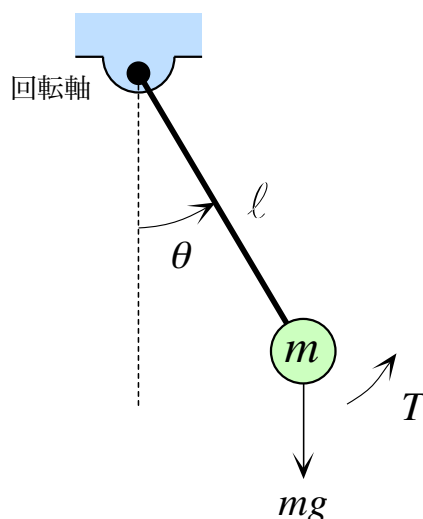
この章の内容は、説明が足りないため理解しにくい点があるかも知れない。個々の詳細についてはいずれ後に検討するので、本章はざーと目を通すだけでよい。

### 1.1 力学系：動的システムとその数学モデル

我々が 1 まとめにして考察の対象とする物、すなわちある機能をもった考察の対象物は一般に**系** (システム system) と呼ばれている。系には通常その挙動を表すための変数として**状態** (state) が定義されている。この状態が時間とともに変化する場合、系は**動的システム** (dynamic system) と呼ばれ、状態の変化の法則は数学モデルで記述される。このモデルが**力学系** (dynamical system) である。力学系の解析を通じて、元のシステムにみられる種々の現象が解明される。各現象に対応して状態の長時間にわたる振る舞いを調べることが力学系の研究の主要な課題といえる。

実際に我々の身近なところで観察される様々な現象は、注目する動的システムの状態に関する時間空間的变化として認識される。たとえば、物体の運動、電気信号の時間的变化、化学反応の進展、生物の個体数の変化、生体が持つ種々のリズムなどは、時間の経過とともに状態が刻々と変化する。このような現象から、状態の変化の法則を見だし、それを記述する数学モデルを構成すると 1 つの力学系がつくられる。

力学系モデルは色々考えられるが、この本では、独立変数として時間を、状態として連続量をもつシステムを考える。このような系は**集中定数系** (lumped system) と呼ばれている。時刻を連続量と考えるか、離散量と考えるかによって、系を記述する数学モデルは異なったものとなる。前者の場合、系の発展は**常微分方程式**で表される。また後者の場合は、**常差分方程式 (漸化式)** となる。

図 1.1 重力場  $g$  中にある単純な振り子.

勿論，対象とする物理モデルが状態および時間共に連続量であり，その数学モデルが常微分方程式で記述されていても，系の振る舞いを解析するために適当な時間間隔で状態をサンプリングして離散時間システムとして扱う場合もでてくる．したがって数学モデルは問題によって適切に選択し，解析することとなる．表 1.1 に本書で扱う力学系の数学モデルを示しておいた．

表 1.1 集中定数系の数学モデル

状態	時間	
	連続量	離散量
連続量	常微分方程式	常差分方程式

### 【例 1.1】古典力学

古典力学は力学系の生みの親となった物理系である．力学では時間，状態共に連続量を扱う．したがって法則は常微分方程式で記述される．状態としては運動量，変位，速度および力が考えられる．また，この系を構成する物理素子は古典力学では単に質量だけである．質量を持った物体が複数個あり，互いにニュートン (Newton) の第 2 法則で力を及ぼしあっている系の挙動を調べる問題が古典力学における力学系の問題といえる．ここでは系を構成する物理素子として，バネとダンパー（摩擦）を加え，古典力学をすこし日常化した通常の力学（機械力学とでも呼ぶのであろうか）の一例を考えてみよう．

#### 単純な振り子：摩擦のない場合

図 1.1 に示した単純な振り子を考える．この振り子は，軸受けに取り付けられた重さのない長さ  $l$  の剛体棒と，その先に付けられた質量  $m$  の物体でできている．まず，軸受けに摩擦がなく，図に示したよ

うに下向きに重力のみが働いている場合の運動方程式を考えてみよう。角度変数  $\theta(t)$  を用いて、トルク（回転力）の方程式は

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = T \quad (1.1)$$

となる。ここに慣性モーメント  $J$  と、重力によるトルク  $T$  は図より

$$J = ml^2, T = -mgl \sin \theta \quad (1.2)$$

である。式 (1.2) を式 (1.1) に代入して整理すると

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (1.3)$$

を得る。これがこの系の運動方程式、すなわち数学モデルとしての力学系といえる。式 (1.3) は 2 階の微分方程式であるから初期条件として、 $t = 0$  において角度  $\theta(0)$  と角速度  $d\theta/dt(0)$  を与えれば、その後の状態は一意的に決定できる。このことをはっきりさせるため、 $d\theta/dt = \omega$  とおいて、式 (1.3) を 1 階連立方程式

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{g}{\ell} \sin \theta \end{aligned} \quad (1.4)$$

と書き直して考えよう。こうすると系の状態は  $\theta$  のみならず角速度  $\omega$  もそうであり、状態として  $\theta$  と  $\omega$  を同時に考えなければならないことが分かる。また、角度は  $0$  [rad] から  $2\pi$  [rad] までしか値を取らないから、 $\theta$  の取り得る値を単位円周上の点集合  $S^1$  :

$$S^1 = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \quad (1.5)$$

上の点と考えることができる。このことは式 (1.4) の右辺の関数が  $\theta$  に関して周期  $2\pi$  の周期関数となっていることから分かる。他方、角速度  $\omega$  は任意の実数となり得るので、これは実数の集合  $R$  の点と考えられる。したがって、状態の取り得る集合  $M$ 、すなわち**状態空間** (state space)  $M$  は

$$M = \{(\theta, \omega) \in S^1 \times R \mid \theta \in S^1, \omega \in R\} \quad (1.6)$$

で表されるシリンダー状の曲面となっている。以上のことから、この単振子は状態空間  $M$  内で状態  $(\theta, \omega)$  が運動方程式 (1.4) に従って変化する力学系としてモデル化されたこととなる。

ここで運動方程式 (1.4) を幾何学的にみておこう。左辺は各時刻における状態の変化率すなわち速度を表している。他方、右辺は  $M$  上の点  $(\theta, \omega)$  において、ベクトル  $(\omega, -\frac{g}{\ell} \sin \theta)$  を定義している。このことから、運動方程式は状態空間の各点で状態の速度ベクトルを定めると解釈できる。逆に、状態空間の各点にこの速度ベクトルを対応させることが一つの力学系を考えることだと言ってよい。このことを、式 (1.4) が状態の**速度ベクトル場** (vector field) を定義するいう。いまの場合、状態空間  $M$  は集合 (1.6) であるから、この曲面上に適当な格子状の点を選んでその点での速度ベクトルを図示すると、場の様子を知ることができる。図 1.2 にその一例を示した。この図から、状態すなわち式 (1.4) の解は、初期値  $(\theta(0), \omega(0))$  から、各点で速度ベクトルに接しながら曲線を描いて動いてゆくことが分かる。

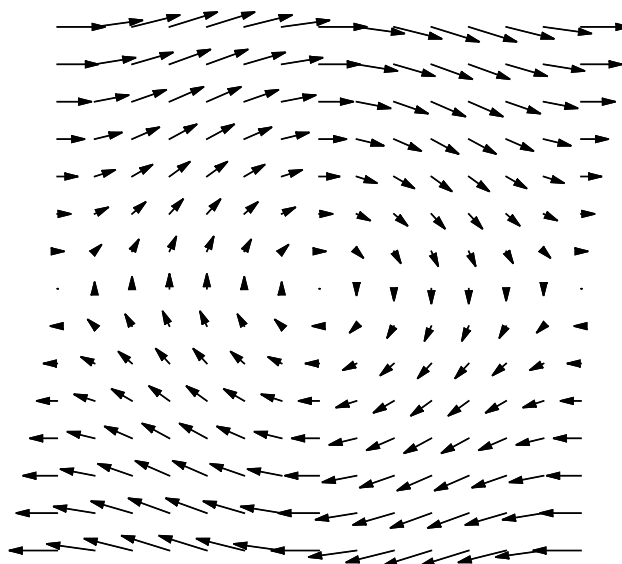


図 1.2 速度ベクトル場の例.

### 単純な振り子：ねじれスプリングと摩擦のある場合

次に、図 1.3 に示すように、軸受け部分にねじれスプリングを付け、かつ摩擦のある場合を考えてみよう。スプリングが振り子を引き戻そうとするトルクを  $T_s$ 、軸受け部分と振り子全体に生じる摩擦によるトルクを  $T_d$  とし、それぞれは次式で与えられると仮定する。

$$\begin{aligned} T_s &= K\theta \\ T_d &= B\frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \quad (1.7)$$

すると、式 (1.1) はこの場合次式と書き改められる。

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = T - T_s - T_d \quad (1.8)$$

式 (1.2), (1.7) を式 (1.8) に代入して整理すると次式となる。

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{B}{m\ell^2}\frac{d\theta}{dt} + \frac{K}{m\ell^2}\theta + \frac{\ell}{g}\sin\theta = 0 \quad (1.9)$$

式 (1.9) を式 (1.4) と同様に 1 階連立方程式に書き直すと

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{B}{m\ell^2}\omega - \frac{K}{m\ell^2}\theta - \frac{\ell}{g}\sin\theta \end{aligned} \quad (1.10)$$

となる。さて、この系の状態空間はどうなっているのだろうか。ねじれスプリングのトルクによる復元力のため、式 (1.10) の右辺はもはや角度  $\theta$  の周期関数ではない。したがって、 $\theta$  の取り得る値は実

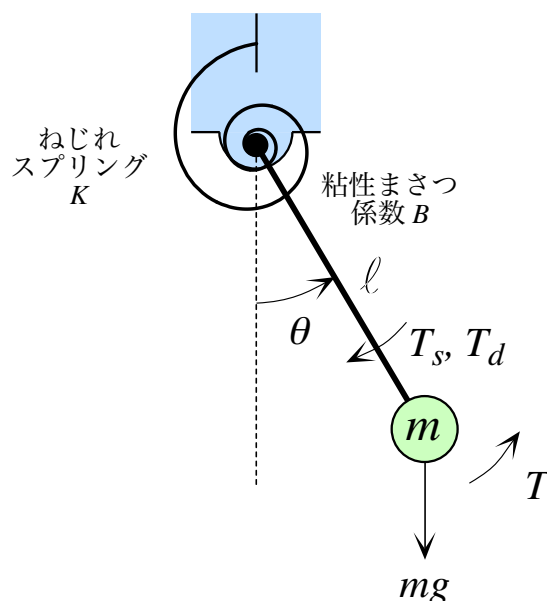


図 1.3 ねじれスプリングを取り付けたまきつのある振り子.

数全体と考えなければならなくなる. すなわち状態空間  $M$  は, 2次元ユークリッド平面  $R^2$  となる:

$$M = \{(\theta, \omega) \in R^2 \mid \theta, \omega \in R\} \quad (1.11)$$

この例のように, 系を構成する要素の性質によって, 状態が取り得る集合そのものが変わってしまうことがある. したがって運動方程式の解析を行うに先だって, 状態空間の形状そのものにも注意する必要がある. ■

### 【例 1.2】電気回路

電気回路はもっとも身近にある集中定数系の例である. 回路の状態を表す物理量としては, 電荷, 磁束, 電圧, 電流の 4 種類がある. また, 回路素子は抵抗, キャパシタおよびインダクタの 3 種類である. これらの素子を適当に接続すると 1 つの回路が構成できる. 一例として図 1.4 の回路を考える. キャパシタ, インダクタおよび抵抗の特性 (状態変数の間の関係式) を

$$\begin{aligned} \text{キャパシタ特性} &: q(t) = Cv_C(t) \\ \text{インダクタ特性} &: \lambda(t) = Li_L(t) \\ \text{抵抗特性} &: i_G(t) = g(v_G(t)) = -g_1 v_G(t) + g_3 v_G^3(t) \\ \text{電流源の特性} &: j(t) = J \sin \omega t \end{aligned} \quad (1.12)$$

で与えられると仮定しよう. ここに  $q, \lambda$  はそれぞれ, キャパシタに蓄えられる電荷, およびインダクタの磁束を表す. 添字の付いた  $v$  と  $i$  はそれぞれの素子の両端にかかる電圧, 素子を流れる電流である. キャパシタとインダクタの特性は線形, すなわち比例の関係にあると仮定し, 比例定数を  $C$  および  $L$  とおいた. これらはキャパシタンスおよびインダクタンスと呼ばれている.

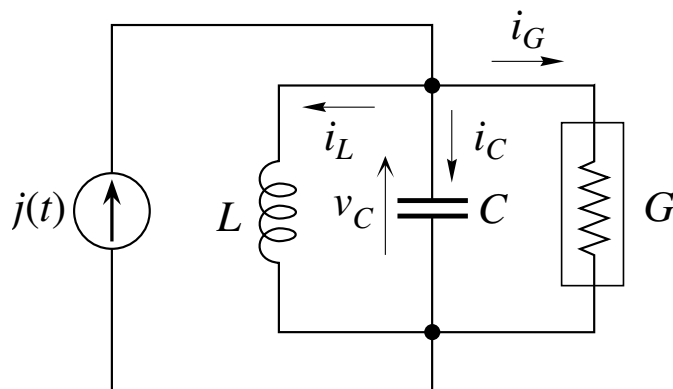


図 1.4 非線形抵抗をもつ電気回路の例.

キャパシタを流れる電流はその定義（電荷の時間的变化）から

$$i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv_C}{dt} \quad (1.13)$$

また、インダクタの両端にかかる電圧は、ファラデー (Faraday) の法則から

$$v_L = \frac{d\lambda}{dt} = L \frac{di_L}{dt} \quad (1.14)$$

となる。このことから、一般に電気回路ではキャパシタ電圧  $v_C$  とインダクタ電流  $i_L$  を状態変数を選んで定式化すれば、ベクトル場をうまく定義できることが分かる。

抵抗の特性は、流れる電流が素子に加わる電圧の 3 次関数であると仮定した。実際にこのような抵抗は、電子回路素子を組み合わせて容易に作ることができる。  $g_1$  と  $g_3$  は正の定数と仮定しておく。なお、この特性は電圧  $v_G$  が小さく、原点の近傍でのみ動作する場合を考えると、線形抵抗

$$i_G = -g_1 v_G(t) \quad (1.15)$$

で近似的に表すことができる。  $g_1$  は抵抗の逆数でありコンダクタンスと呼ばれている。比例定数が負となっていることから、式 (1.15) の特性は**負性抵抗素子**を表している。

最後に電流源は、枝電流が時間の既知関数として規定される素子のことである。この素子の両端にかかる電圧は任意であり、回路の接続から定まる。ここでは角周波数  $\omega$  の正弦波電流源を仮定した。

さて、この回路の電流・電圧の関係はキルヒホフ (Kirchhoff) の電流法則および電圧法則によって定まる。すなわち

$$\begin{aligned} v_G(t) = v_L(t) = v_C(t) &= v_J(t) \\ i_G(t) + i_L(t) + i_C(t) &= j(t) \end{aligned} \quad (1.16)$$

式 (1.12), (1.13), (1.14) の特性を式 (1.16) に代入して、変数 ( $v_C, i_L$ ) を残して整理すると、回路方程式 (回路の状態方程式) :

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} &= \frac{1}{C} [-i_L - g(v_C) + j(t)] \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{L} v_C \end{aligned} \quad (1.17)$$

を得る。したがってこの回路の状態は、変数  $(v_C, i_L)$  と考えることができ、状態空間  $M$  は電圧と電流が自由に变化できることから2次元ユークリッド平面：

$$M = \{(v_C, i_L) \in \mathbb{R}^2 \mid v_C, i_L \in \mathbb{R}\} \quad (1.18)$$

と考えてよい。

### 電流源の印加されていない回路

ここで、電流源がない場合（すなわち  $J = 0$  の場合）について式 (1.17) をさらに整理し、1変数2階の微分方程式を導いておこう。まず、第1式を第2式に代入して  $i_L$  を消去すると

$$LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + L \frac{dg}{dv_C} \frac{dv_C}{dt} + v_C = 0 \quad (1.19)$$

となる。そこで式 (1.12) の抵抗特性を具体的にこの式に代入して書き直すと次式を得る。

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} - \epsilon(1 - x^2) \frac{dx}{d\tau} + x = 0 \quad (1.20)$$

ここに、変数を

$$x = \sqrt{\frac{3g_3}{g_1}} v_C, \tau = \frac{1}{LC} t \quad (1.21)$$

と変換し、

$$\epsilon = g_1 \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1.22)$$

とおいた。式 (1.20) は真空管発振器の自励振動を表す式としてファン・デア・ポール (van der Pol) によって提案され、解析されたので**ファン・デア・ポールの方程式**と呼ばれている。

次に、式 (1.17) から  $v_C$  を消去してみよう。同様にして次式を得る。

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} - \epsilon \left[ 1 - \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 \right] \frac{dy}{d\tau} + y = 0 \quad (1.23)$$

ここに

$$y = \sqrt{\frac{g_3 L}{g_1 C}} i_L \quad (1.24)$$

とおいた。この方程式は前世紀末、物理学者レーリー (Rayleigh) によって楽器の振動の方程式として導かれていた。このことから**レーリーの方程式**と呼ばれている。以上のことから、状態変数を何に選ぶかによって式 (1.17) はファン・デア・ポールの式あるいはレーリーの式になることが分かる。勿論これらの式は同じ力学系を状態変数の選択を変えて表現したに過ぎない。

### 電流源の印加された回路

$J \neq 0$  の場合を考えよう。式 (1.17) をそのまま用いると、回路方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} &= \frac{1}{C} [-i_L - g(v_C) + J \sin \omega t] \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{L} v_C \end{aligned} \quad (1.25)$$

となる。この方程式の特徴は、右辺の関数に時刻  $t$  が陽に含まれていることである。いまの場合、正弦関数であるから右辺の速度ベクトルは時間に関して周期的に変化する。■

時刻を陽に含んだ方程式で記述される系を**非自律系** (non-autonomous system) という。これに対して、これまでの例にあげたような時間を陽に含まない方程式で記述される系を**自律系** (autonomous system) という。自律か非自律かによって状態の挙動は異なり、このために解析方法も違ってくる。なお、非自律系の時間を陽に含む項は、考察の対象としている系に外部から別の系の信号が印加されていることを表す項といえる。

### 【例 1.3】 離散時間システムの例

江戸時代の和算書にある「ねずみ算」におけるねずみの個体数や、イタリア中世の代数の書にある「ウサギのつがい数」に関するフィボナッチ数列などは、単純化した生物の個体数の挙動についての力学系モデルと考えられる。これを取りあげてみよう。

一定期間  $\Delta t$  毎に個体数が変化する架空の生物を想定しよう。 $k$  を整数として時刻  $k\Delta t$  にある個体数を  $N(k\Delta t)$  とする。 $\Delta t$  時間後の個体数の増加の割合が単に現在の個体数  $N(k\Delta t)$  に比例すると仮定してみよう (マルサスの法則)。

$$\frac{\Delta N(k)}{\Delta t} = \frac{N((k+1)\Delta t) - N(k\Delta t)}{\Delta t} \propto N(k\Delta t) \quad (1.26)$$

この比例定数を  $a$  とすると

$$N((k+1)\Delta t) = \alpha N(k\Delta t) \quad (1.27)$$

の関係式を得る。ここに  $\alpha = 1 + a\Delta t$  とおいた。時間軸を  $\Delta t$  を単位にして取り直すと、時刻は整数値を取るので、式 (1.27) は簡単に

$$N(k+1) = \alpha N(k) \quad (1.28)$$

と書ける。個体数  $N$  が十分に多い場合や適当な基準の個体数に対する比の値を表していると考えれば、これは実数値と見なしてよい。そうすると式 (1.28) は、離散時間、連続状態の力学系となる。式 (1.28) は線形 1 階差分方程式 (漸化式) である。初期時刻  $k=0$  での個体数を  $N(0)$  とすると、逐次代入を繰り返すことによって、式 (1.28) の解はすぐに計算できる。

$$N(k) = \alpha^k N(0) \quad (1.29)$$

したがって、個体数は指数関数的に変化することとなる。

1 個体数が単位時間後に  $\alpha$  個に増えるという上の話は、実状に合わない場合も考えられる。実際、環境などの制約から個体数の増加が適当な値で落ちつくモデルとするほうがより現実的であろう。そこで増加率  $\alpha$  が  $N$  の関数となって、 $N$  が大きくなると  $\alpha$  が減少するような仮定をおいてみよう。

$$\alpha = \alpha_0(1 - \epsilon N(k)) \quad (1.30)$$

ここに  $\epsilon$  は小さな正数としよう。式 (1.28) は次式となる。

$$N(k+1) = \alpha_0(1 - \epsilon N(k)) N(k) \quad (1.31)$$



さらに  $x(k) = \epsilon N(k)$  と変数変換すると

$$x(k+1) = \alpha_0 (1 - x(k)) x(k) \quad (1.32)$$

を得る。式 (1.32) は**ロジスティック方程式**と呼ばれている。■

#### 【例 1.4】フィボナッチ数列

漸化式

$$F(k+2) = F(k+1) + F(k); \quad F(1) = F(2) = 1 \quad (1.33)$$

によって作られる数列  $\{F(k), k = 1, 2, \dots\}$  はフィボナッチ数列と呼ばれている。

$$\begin{aligned} F(k+1) &= G(k) \\ G(k+1) &= F(k) + G(k) \end{aligned} \quad (1.34)$$

と書き直すと、2次元離散時間力学系とみなすことができる。■

## 1.2 力学系の構成要素

前節の例でみたように、本書で扱う力学系は常微分方程式または常差分方程式で記述される。また、対象とする力学系はすべて1階連立方程式の形で表される。本節では、これらの力学系に関する基本的な構成要素とそれらの簡単な性質をみておこう。

### 1.2.1 状態と状態空間

系の状態 (state) は**相** (phase) とも呼ばれている。状態の集合が状態空間あるいは**相空間** (phase space) である。状態空間の典型的な例として  $n$ 次元ユークリッド空間  $R^n$ ，すなわち各状態  $x_i$  のつくる集合：

$$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (1.35)$$

がある。状態空間の別の例としては、**例 1.1** でみたシリンダー曲面や、球面、ドーナツの表面、穴のあいた閉曲面などがある。これらの集合はすべて局所的にはユークリッド空間となっている。一般に各点において微分可能な曲面で表されるこれらの集合は、**微分可能多様体**と呼ばれている。したがって、状態空間を**微分可能多様体**と考えるのが最も一般的である。

本書では、状態空間  $M$  として  $R^n$  の適当な有界領域を考えることで十分な場合がほとんどである。この意味で「状態空間  $M$  は  $R^n$  の有界な開集合とする」というべきであろうが、このこともいちいちとわずに「状態空間は  $R^n$  とする」などを書いて話をすすめる。また、状態空間が2次元ユークリッド空間  $R^2$  の場合は、状態平面とは言わずに、慣例に従って**相平面** (phase plane) と呼ぶことにする。

#### 【例 1.5】単振り子の状態

**例 1.1** で考えた振り子の状態として、角度と角運動量を状態変数に選んで方程式を導いてみよう。角運動量  $p$  は

$$p = J \frac{d\theta}{dt} = J\omega \quad (1.36)$$

で定義される。そこで式 (1.1) は

$$\frac{dp}{dt} = T = -mgl \sin \theta \quad (1.37)$$

と表される。これら両式をあわせて、運動方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{p}{J} = \frac{p}{m\ell^2} \\ \frac{dp}{dt} &= -mgl \sin \theta \end{aligned} \quad (1.38)$$

式 (1.38) は勿論、式 (1.4) の別の表現である。この例のように、一般に状態変数の選び方は一意的ではない。問題によって適切に選ぶとよい。■

## 1.2.2 初期状態と系のパラメータ

連続時間力学系の状態は、ある時刻においてその値を指定すると、それ以後の状態は運動方程式の解として一意的に決定されてしまう。すなわち、時刻  $t = t_0$  において、状態空間  $M \subset R^n$  の1点  $x(t_0) = x_0 \in M$  を与えると、状態  $x(t)$  は一意的に定まる。 $(t_0, x_0)$  を**初期条件**、 $x_0$  を**初期状態**または**初期値**という。このことから状態空間はまた初期値の集合とも考えられる。

状態の時間発展を規定する運動方程式には、状態変数のほかに系を構成する素子の性質を表す種々の定数が含まれている。たとえば例 1.1 の振り子の場合、質量  $m$ 、振り子の長さ  $\ell$ 、重力加速度  $g$  などである。これを**系のパラメータ**という。おなじ方程式で記述されていても、式に含まれるパラメータの値を変えると、状態の時間変化が全く違ってしまうことがある。このことも注意する必要がある。

## 1.2.3 連続時間の力学系

### 解の存在と一意性：因果律

状態空間  $M \subset R^n$  の各点において状態速度が次式で与えられる力学系を考える。

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t; x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.39)$$

あるいはベクトル表示を用いて簡潔に

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda) \quad (1.40)$$

と書くことにしよう。ここに、 $t$  は時刻を表す実数であり、 $x$  は状態、 $\lambda$  はパラメータを表す：

$$t \in R, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M, \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \in R^m \quad (1.41)$$

また、右辺を定義している写像：

$$f : R \times M \times R^m \rightarrow R^n; (t, x, \lambda) \mapsto f(t, x, \lambda) \quad (1.42)$$

は各引数について連続でかつ必要な回数だけ微分可能な性質を持つと仮定しよう。以後、この連続で微分可能な性質のことを単に「なめらかである」ということにする。

まず、このなめらかさの仮定によって、常微分方程式の解の存在と唯一性の定理を満足する条件は十分満たされる。したがって  $M$  の各点においてこの点を初期値とする解が唯一存在することが分かる。この存在に関する議論は我々の見方からすれば、系の状態に対する因果律を保証していると考えてよい。我々の興味は長時間にわたる解の振る舞いにある。

### 自律系

式 (1.40) の右辺に時刻  $t$  が含まれていない場合：

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda) \quad (1.43)$$

を自律系と呼んだ。さて、自律系の第一の特徴は、時間軸の平行移動に対して式 (1.43) が変わらないことである。すなわち  $t_0$  を定数として

$$\tau = t + t_0 \quad (1.44)$$

と時間をずらす変換を行っても、式 (1.43) は

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, \lambda) \quad (1.45)$$

となって、同じベクトル場を定義している。このことから「 $t = t_0$  において初期値  $x_0$  を出発する解」を求める初期値問題は、一般性を失うことなく「 $t = 0$  において初期値  $x_0$  を出発する解」を求める問題に還元できる。したがって、以後自律系の解を考えるときは初期値を時刻  $t = 0$  で与えることにする。

第二の特徴は、状態速度を定義する右辺のベクトルが零となる点があり得ることである。速度が零となる点、すなわち

$$f(x, \lambda) = 0 \quad (1.46)$$

を満足する点を**平衡点** (equilibrium point) という。平衡点はそれ自身で式 (1.43) の解となっている。したがって平衡点は、すべての時間に対して（過去と未来にわたって永久に）静止している状態を表している。

#### 【例 1.6】単振り子の平衡点

式 (1.38) の平衡点は  $(\theta, p) = (0, 0)$  と  $(\pi, 0)$  の 2 点である。 ■

### 非自律系

非自律系は式 (1.40) で定義される力学系である。すなわち状態速度に時刻  $t$  が含まれている。形式的には、時間を一つの新しい状態変数：

$$t = \theta \quad (1.47)$$

と考えると、式 (1.40) を

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= f(t, x, \lambda) \\ \frac{dt}{d\theta} &= 1 \end{aligned} \quad (1.48)$$

と書き直し,  $n+1$ 次元の自律系として扱えばよい. ただしこの場合, 式(1.48)の第2式の右辺は1であり絶対に零とならないので, 平衡点は存在しない. 解は常に時間軸方向に一定速度で流れてしまう. このことから, 非自律系に対しては自律系とは別の解析法を工夫する必要がある. また, 自律系のように時間軸の平行移動に対して方程式は不変ではない. 初期値を与える時刻についても注意する必要がある.

なお, 本書では主として非自律系のうち速度ベクトル場が時間に関して周期的であるような特別な場合を取り扱う. すなわち, 周期を  $L$  として

$$f(t+L, x, \lambda) = f(t, x, \lambda) \quad (1.49)$$

となっている系を考える. この周期的非自律系にみられる基本的な状態は, 周期的な性質を持つ解

$$x(t+kL) = x(t) \quad (1.50)$$

である. これを**周期解** (periodic solution) という. ここに,  $k$  は適当な正の整数とする. 周期解は元の動的システムの周期振動に対応している.

#### 1.2.4 離散時間の力学系

整数の集合を  $Z$  と書くことにする:

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad (1.51)$$

$n$ 次元状態空間  $M \subset R^n$  で定義される離散時間力学系は次の差分方程式 (漸化式ともいう) で表される:

$$x(k+1) = f(k, x(k), \lambda), \quad k \in Z \quad (1.52)$$

ここに右辺の写像:

$$f: Z \times M \times R^n \rightarrow M; (k, x, \lambda) \mapsto f(k, x, \lambda) \quad (1.53)$$

は微分方程式の場合と同様に各引数に関してなめらかである仮定しておこう.  $f$  が  $k$  に依存しない場合を自律系, そうでない場合を非自律系と呼ぶことも連続時間の場合と同じである. 本書では主として自律系の問題を考える.

離散力学系では1単位時間経過する毎に, 状態  $x(k)$  が写像  $f$  によってつぎの状態  $x(k+1)$  に写されてゆく. すなわち  $k=0$  において初期値  $x_0$  を与えると, 次のように点列が生成される.

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x(1) &= f(0, x_0) \\ x(2) &= f(1, x(1)) = f(2, f(0, x_0)) \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.54)$$

特に自律系

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (1.55)$$

の場合には、 $x(k)$  は写像  $f$  の  $k$  回繰り返し  $f^k$  によって求められる。

$$x(k) = f(x(k-1)) = \underbrace{f(f(f(\cdots f(x_0))))}_{k} = f^k(x_0) \quad (1.56)$$

写像  $f$  によって変化しない点：

$$x^* = f(x^*) \quad (1.57)$$

をこの系の**固定点** (fixed point) という。固定点は静止した状態といえる。したがって固定点は、自律系微分方程式の平衡点に対応した離散系の基本的状態の一つである。

写像  $f$  が逆写像  $f^{-1}$  を持つ場合は

$$x(-1) = f^{-1}(x_0), x(-2) = f^{-1}(f^{-1}(x_0)) = f^{-2}(x_0), \cdots \quad (1.58)$$

のように、過去に向かっても状態をさかのぼることができる。つまり解を一意的に過去と未来に延長できる。写像  $f$  とその逆写像  $f^{-1}$  が共に微分可能な写像となっている場合、 $f$  を**微分同相写像**という。後に連続時間系の周期解を解析する際、このような微分同相写像を用いて連続時間状態を離散化して解析をすすめる。

### 【例 1.7】2次元離散系の例

エノン (Hénon) 写像として知られる2次元離散系は次式で定義される。

$$\begin{aligned} x(k+1) &= 1 + y(k) - ax^2(k) \\ y(k+1) &= bx(k) \end{aligned} \quad (1.59)$$

式 (1.59) の右辺の写像は、 $b \neq 0$  のときヤコビ行列式  $J$  が

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b \neq 0 \quad (1.60)$$

であるから、微分同相写像である。実際、式 (1.59) の逆写像は直ちに求められる。

$$\begin{aligned} x(k) &= \frac{1}{b}y(k+1) \\ y(k) &= -1 + x(k+1) + \frac{a}{b^2}y^2(k+1) \end{aligned} \quad (1.61)$$

したがって、過去 (時間の負の方向) に向かって状態を一意的に計算できる。■

### 【例 1.8】ロジスティック方程式の状態

**例 1.3** でみたロジスティック方程式は、2次写像：

$$f: R \rightarrow R; x \mapsto f(x) = \alpha_0(1-x)x \quad (1.62)$$

で定義されている。この写像は逆写像を持たない。したがって過去に向かって状態を一意的に求めることができない。■

### 1.3 力学系の構造

本書では、微分方程式で定義されるなめらかな力学系を中心に種々の現象を解析する。これらの力学系は、実在の物理系や工学系の数学モデルであることから、系の構造（方程式を定義するベクトル場の特性）に特別な性質を持つことがある。このことについて関連ある事項を簡単に紹介しておこう。

#### 1.3.1 物理的に特別な構造を持った系

##### 保存系

例 1.1 で述べた古典力学は、系の持つ全エネルギーが運動を通じて一定に保たれるという顕著な性質を持つ。摩擦のない単振り子の例でこのことをみてみよう。回転の角運動エネルギー  $W$  は、角運動量  $p$  を用いて

$$W(p) = \frac{1}{2}J \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{p^2}{2J} = \frac{p^2}{2m\ell^2} \quad (1.63)$$

と表される。重力のポテンシャル・エネルギー  $V$  は

$$V(\theta) = -mg\ell \cos \theta \quad (1.64)$$

である。したがって全エネルギー  $H$  は

$$H(\theta, p) = W(p) + V(\theta) = \frac{p^2}{2m\ell^2} - mg\ell \cos \theta \quad (1.65)$$

となる。このエネルギー関数を用いると、式 (1.38) は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1.66)$$

式 (1.66) に従う運動（状態の時間変化）は  $H$  を一定に保つ（エネルギー保存則）。

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad (1.67)$$

したがって

$$H(\theta(t), p(t)) = E \quad (1.68)$$

となる。ここに定数  $E$  は運動の出発点における系の全エネルギーを表している。

この例のように、状態変数  $(x, y) \in R^n \times R^n$  が偶数個からなる系の運動方程式が関数：

$$H : R^n \times R^n \rightarrow R; (x, y) \mapsto H(x, y) \quad (1.69)$$

によって

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \frac{dy_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1.70)$$

と記述されるとき，この系を**保存系** (conservative system) または**ハミルトン** (Hamilton) **系**という．式 (1.70) をベクトル表示すると

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^T \\ \frac{dy}{dt} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T\end{aligned}\quad (1.71)$$

と簡潔に表すことができる．ここに  $( )^T$  はベクトルの転置を表す． $n$  個の状態変数対  $(x, y)$  を持つ保存系を  $n$  **自由度**の系という．運動を通じて関数  $H$  が一定であることから，状態は状態空間内の  $H(x, y) = E$  の曲面  $M$  ( $2n - 1$  次元多様体) に拘束されることとなる．言い換えると  $H(x, y) = E$  の関係より，独立な状態変数の数を  $2n - 1$  個に減らすことができる．このように保存量に対応する関数が見つかる毎に，状態空間の次元を低減できる．これは状態方程式 (1.71) を求積していることを意味する．保存される関数を**積分** (または**第 1 積分**) と呼んでいる．

### 散逸系

摩擦や抵抗によるエネルギー損失の効果が加味された系を一般に**散逸系** (dissipative system) という．たとえば式 (1.10) の第 2 式の第 1 項が摩擦による損失項を表している．いま，エネルギー関数  $H$  を

$$H(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{K}{2m\ell^2}\theta^2 + \frac{\ell}{g}\cos\theta \quad (1.72)$$

摩擦による損失関数  $F$  を

$$F(\omega) = \frac{B}{2m\ell^2}\omega^2 \quad (1.73)$$

で定義すると，式 (1.10) は次式となる．

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \omega} \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{\partial F}{\partial \omega}\end{aligned}\quad (1.74)$$

この第 2 式第 2 項が損失項を表す．

この場合エネルギー関数の時間微分は

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \omega} \frac{\partial F}{\partial \omega} = -\frac{B}{m\ell^2}\omega^2 \leq 0 \quad (1.75)$$

となって  $\omega = 0$  すなわち  $\theta$  軸上以外では絶えず減少することが分かる． $\theta$  軸上の平衡点以外は運動は止まることはないので，結局運動はエネルギーを減少しながら平衡点に落ちつく．

電気回路においても抵抗素子が電気エネルギーを損失する素子である．したがって抵抗を含む回路は一般に散逸系となる．ただし，電気回路の場合，負性抵抗があれば損失が負になる．この場合は逆に抵抗素子からエネルギーが系に注入されると考えなければならない．**例 1.2** の回路でこのことをみてみよう．キャパシタに蓄えられる電気的エネルギー  $W_e$  は

$$W_e(v_C) = \int_0^t v_C i_C dt = \frac{1}{2}C \int_0^t v_C \frac{dv_C}{dt} dt = \frac{1}{2}C \int_0^{v_C} v_C dv_C = \frac{1}{2}C v_C^2 \quad (1.76)$$

インダクタに蓄えられる磁気的エネルギー  $W_m$  は

$$W_m(i_L) = \int_0^t v_L i_L dt = \frac{1}{2}L \int_0^t i_L \frac{di_L}{dt} dt = \frac{1}{2}L \int_0^{i_L} i_L di_L = \frac{1}{2}Li_L^2 \quad (1.77)$$

である。ここでエネルギーは電力  $vi$  の時間積分であることと、それぞれの素子特性 (1.13), (1.14) の関係式を用いた。したがってこの回路に蓄えられる全エネルギー  $W$  は

$$W(v_C, i_L) = \frac{1}{2}Cv_C^2 + \frac{1}{2}Li_L^2 \quad (1.78)$$

となる。そこでこのエネルギーの時間的変化をみてみよう。

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial v_C} \frac{dv_C}{dt} + \frac{\partial W}{\partial i_L} \frac{di_L}{dt} = v_C \{-i_L - g(v_C)\} + i_L v_C = -v_C g(v_C) \quad (1.79)$$

ここで、式 (1.17) を用いた。ただし、電流源は印加していない回路を考えた。抵抗の特性は、式 (1.12) の第3式と仮定すると

$$\frac{dW}{dt} = -v_C g(v_C) = g_1 v_C^2 - g_3 v_C^4 \quad (1.80)$$

となる。ここで係数  $g_1$  と  $g_3$  は正の定数と仮定したのであった。このことからキャパシタ電圧  $v_C$  が十分大きい状態では、エネルギー (1.78) は減少し、逆に原点近傍では増大することが分かる。このことはまた、系の状態が原点の平衡点から外に向かって増大し、適当な有界領域で何らかの運動（この例では周期振動）に落ちつくことを意味している。

## 勾配系

状態の関数として定義された状態量の勾配 (gradient) を状態速度とする力学系を**勾配系** (gradient system) という。すなわち、関数

$$G: R^n \rightarrow R; x \mapsto G(x) \quad (1.81)$$

を微分可能な関数とする。このような関数はスカラー  $R$  に値を持つのでしばしばスカラー関数とも呼ばれる。さて勾配系とは

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.82)$$

で定義される力学系のことである。ベクトル表示では

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^T = -\text{grad}G \quad (1.83)$$

と書ける。ここに右辺の勾配に付けた  $-$  の符号は慣例でつけることにした。この場合、系の状態は  $G$  が減少する方向に運動する。なぜなら

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial x} \frac{dx_i}{dt} = -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial G}{\partial x_i}\right)^2 \leq 0 \quad (1.84)$$

となり、状態の速度ベクトルは絶えず関数  $G$  の最急勾配方向に減少する向きに向いているからである。このことから勾配系では、状態は振動的にはならず、適当な平衡点に落ちつく比較的単純な運動となる。



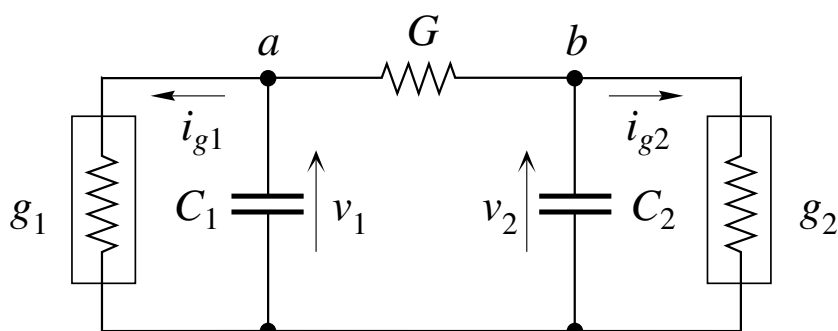


図 1.5 抵抗とキャパシタからなる電気回路.

## 【例 1.9】RC 回路

抵抗とキャパシタからなる図 1.5 の回路を考えよう. キャパシタ電圧を状態変数に選ぶと, 回路方程式は, 点  $a, b$  でのキルヒホフの電流法則より, 次式となる.

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= -g_1(v_1) - G(v_1 - v_2) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= -g_2(v_2) - G(v_2 - v_1) \end{aligned} \quad (1.85)$$

いま損失関数として

$$F(v_1, v_2) = \frac{1}{2}G(v_1 - v_2)^2 + \int_0^{v_1} g_1(v_1)dv_1 + \int_0^{v_2} g_2(v_2)dv_2 \quad (1.86)$$

を考えると, 式 (1.85) は

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial v_1} \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial v_2} \end{aligned} \quad (1.87)$$

と書ける. これは一種の勾配系となっている. 実際, 関数  $F$  は

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial v_1} \frac{dv_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial v_2} \frac{dv_2}{dt} = -\left\{ \left( \frac{\partial F}{\partial v_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial v_2} \right)^2 \right\} \leq 0 \quad (1.88)$$

より, 時間の経過とともに減少する. 一般に, 抵抗とキャパシタ, あるいは抵抗とインダクタからなる電気回路は勾配系となることが知られている. ■

## 1.3.2 対称性を持った系

考察する系に幾何学的な対称性や構成素子の特性に奇関数あるいは偶関数といった対称性があると, これらの性質が状態方程式に反映される. このことは状態変数の置換による方程式の不変性, 変数の反転に対する方程式の不変性となって表現されることとなる. 状態方程式に対称性のある力学系は, この性質が解の性質へと遺伝することがある. また, 対称性をもつ解は状態空間のある部分空間に閉じこめられる場合があり, 解析が容易になることがある.

**【例 1.10】 軸対称性を持つ RC 回路**

先の例 1.9 に示した電気回路を再び取りあげよう。今度は、同じ特性を持つ 2 つのキャパシタと非線形コンダクタからなると考える。回路方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} C \frac{dv_1}{dt} &= -g(v_1) - G(v_1 - v_2) \\ C \frac{dv_2}{dt} &= -g(v_2) - G(v_2 - v_1) \end{aligned} \quad (1.89)$$

したがって、この回路は明らかに状態変数  $v_1, v_2$  の置換によって不変となる。■

**【例 1.11】 ファン・デア・ポール方程式の対称性**

式 (1.20) のファン・デア・ポール方程式を次式のように書き直して考えよう。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x + \epsilon(1 - x^2)y \end{aligned} \quad (1.90)$$

この方程式は原点に関して点対称の変換： $(x, y) \mapsto (-x, -y)$  に関して不変となる。この性質は、抵抗特性を 3 次の奇関数と仮定した式 (1.12) の第 3 式によるものである。■

**【例 1.12】 ハミルトン系の時間反転の対称性**

ハミルトン系 (1.71) において、時間軸を反転させる変換  $t \mapsto -t$  を行うと

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^T \\ \frac{dy}{dt} &= \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T \end{aligned} \quad (1.91)$$

を得る。これは状態速度ベクトル場の向きを反転させることを意味している。したがって、解は状態空間内で形を変えず、時間の進展の方向を逆転し過去に向かって同じ軌道をたどることとなる。■

**1.3.3 線形系と非線形系****連続時間の力学系**

状態空間  $R^n$  で定義される力学系が**線形** (linear) であるとは、系を記述する方程式が

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (1.92)$$

または

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u(t) \quad (1.93)$$

となる場合である. ここに, それぞれは

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ & & \cdots & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1m}(t) \\ b_{21}(t) & \cdots & b_{2m}(t) \\ & & \\ b_{n1}(t) & \cdots & a_{nm}(t) \end{bmatrix} \quad (1.94)$$

の形のベクトルと行列とする. 式 (1.92) を**同次方程式** (homogeneous equation), 式 (1.93) を**非同次方程式**という. 式 (1.93) の右辺第 2 項は系に外部から加えられた入力  $u(t) \in R^m$  を意味している. 線形でない系を**非線形系** (nonlinear system) という.

線形系は状態空間における局所的な性質をモデル化する場合に用いられる. 他方, 非線形系は大域的性質を表現している. 実際, 線形系が非線形系の特定の状態の近くの性質を調べる場合に役立つことをみておこう. 非線形方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1.95)$$

の  $t = t_0$  において  $x(t_0) = x_0$  を初期値とする解を

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0) \quad (1.96)$$

とし, この解からの微少変動分 (これを変分という) を  $\xi(t)$  とする:

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0) + \xi(t) \quad (1.97)$$

これを式 (1.95) に代入して

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\{\varphi(t, t_0, x_0) + \xi(t)\}}{dt} = f(t, \varphi(t, t_0, x_0) + \xi(t)) \quad (1.98)$$

変分 が十分に小さいものとする, 右辺をテイラー展開し

$$f(t, \varphi(t, t_0, x_0) + \xi(t)) = f(t, \varphi(t, t_0, x_0)) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x(t)=\varphi(t, t_0, x_0)} \xi(t) + \cdots \quad (1.99)$$

両式の  $\xi(t)$  の項のみを取り出すと

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = A(t)\xi(t) \quad (1.100)$$

を得る. ここに

$$A(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x(t)=\varphi(t, t_0, x_0)} \quad (1.101)$$

とおいた. 式 (1.100) を解 (1.96) に関する**変分方程式** (equation in variation, variational equation) という. 変分方程式は, 平衡点や周期解の安定性を調べる際に有効に使用される. 式 (1.100) は解 (1.96) に関する式 (1.95) の**線形化方程式** (linearized system) ともいう.

**【例 1.13】 例 1.1 の振り子**

例 1.1 の摩擦のない振り子を考えよう。力学系 (1.4) や (1.38) は非線形系であり、状態空間であるシリンダー曲面全体で定義された大域的なベクトル場を与えている。これを例 1.6 でみた平衡点の 1 つである原点の近傍で線形化してみよう。式 (1.38) を使うことにする。変分を  $\theta(t) = 0 + \xi(t)$ ,  $p(t) = 0 + \eta(t)$  とし  $\sin(0 + \xi) = \eta + \dots$  となることから、 $\xi, \eta$  に関する線形化方程式は次式となる。

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{m\ell^2}\eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= -mg\ell\xi\end{aligned}\tag{1.102}$$

これは調和振動（単振動）の方程式を与えている。■

非線形系のモデルは実に様々である。このうち  $\epsilon$  を小さなパラメータ  $|\epsilon| \ll 1$  として

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \epsilon f(t, x)\tag{1.103}$$

と書ける系を**線形に近い系**または**弱非線形系**という。そうでない系は**強非線形系**である。たとえば、振り子の式 (1.4) は強非線形系であるが、ファン・デア・ポールの方程式 (1.90) は  $\epsilon$  を小さなパラメータと考えると、調和振動 (1.102) に近い弱非線形系といえる。

## 1.4 本章のまとめと文献

### 1.4.1 本章のまとめ

1. 力学系は時間、状態空間および状態の変化の法則を与えると定まる。時間は連続時間（実数の集合）あるいは離散時間（整数の集合）が選ばれる。状態空間としては実ユークリッド空間やその部分集合であるなめらかな多様体を考える。このとき状態の変化の法則は、状態速度や次の時刻での状態を定めるルールで与えられる。したがって連続時間系では常微分方程式（ベクトル場）、離散時間系では常差分方程式（写像）で定義されることとなる。
2. 力学系を定義する方程式の中に時刻が引数として陽に含まれていない系を自律系、陽に含まれる系を非自律系という。自律系はモデルがそれ自身で閉じた系、非自律系は他の系からの影響があり、その効果が時間関数として表された系と考えられる。
3. 力学系の主要な関心は「与えられた任意の初期状態に対して、それ以後の状態がどのような時間発展をするか」その定性的な性質を知ることにある。時間の経過に対して不動な平衡点や固定点、また周期的に変化する状態や周期点などは簡単な性質をもつ状態である。また、これらの状態の性質を知ることによって、より複雑な状態の性質を解明できることがある。
4. ハミルトン系、散逸系、勾配系や対称性を持つ系などは特別な構造を持つ系である。
5. 非線形系の解析の際、平衡点など特別な状態に着目すると系を線形系で近似的に扱うことができる場合がある。このとき線形化方程式を変分方程式という。

### 1.4.2 本章の文献

力学系に関する書籍は、近年増加の一途をたどっている。内容も多様で、なかには大変分厚い教科書もあり一冊まるごと読み通すことが難しいこともある。目的に応じて適切に参照すればよいであろう。

この章では、取り立てて参照する文献はない。使用した用語は大抵の力学や常微分方程式の教科書に載っている。項目別に手元にある教科書と参考書を挙げておこう。これらはまた、本書の内容全体に関する参考書でもある。

**常微分方程式：** ポントリャーギン [O11], 白岩 [O14], アーノルド [O1], ハーシュ・スメイル [O7], 山口 [O16]

**古典力学：** アーノルド [D4], ゴールドスタイン [D7], ランダウ・リフシッツ [D13], Abraham[D1]

**電気回路：** Andronov[N1], 林 [N8], 佐藤 [N14], 藤田 [N6], 志村 [N17], Stern[N18]

なお、本書では応用面での興味ある事項に関してほとんどふれることができなかつた。実際は逆に、種々の分野で応用された非線形現象のおもしろさが研究の動機づけとなる場合が多い。幾つかを紹介しておく。

**応用面での動機づけ：**

**カオスとその応用：** 合原 [A1,2,3], スチュアート [E8], 伊東 [E2], レエール [E7],

**生物のリズム：** 鈴木 [A14], Winfree[A17], Glass[A7], Hoppensteadt[A10], Pavlidis[A12],

**神経回路：** 甘利 [A4],

**化学反応：** Gurel[A8], Berge[A5], 吉川 [E9],

**数理モデル, 物理, 工学：** 佐藤 [A13], 平井 [A9], Ccitanovic[A6], Moon[A11], Thompson[A15, 16]

## 1.5 練習問題 1

1.1 身近にある参考書から力学系の例を探し、何が問題にされているか検討せよ。

1.2 自律系と非自律系の違いについて考察せよ。

1.3 **硬いバネの問題**

図 1.6 に示した質量  $M$  とバネ  $S$  から構成された系が外力：

$$f_E = F \cos \omega t \quad (1.104)$$

によって強制的に振動している。ここで、バネの伸び  $x$  と力  $f_S$  の関係は

$$f_S = a_1 x + a_3 x^3 \quad (1.105)$$

で与えられるものと仮定しよう。また、摩擦力は速度に比例するものとする：

$$f_F = B \frac{dx}{dt} \quad (1.106)$$

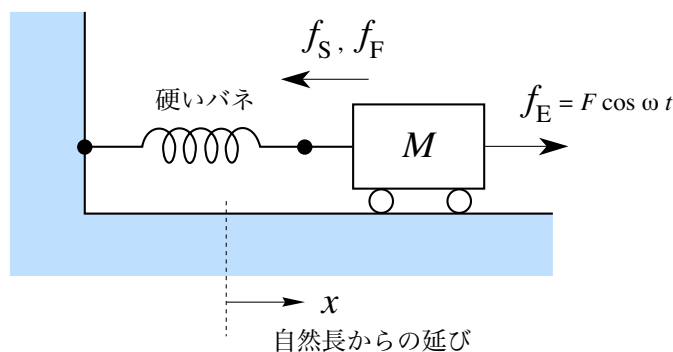


図 1.6 硬いバネでつながれた質点の強制振動.

この系の運動方程式を導け.

- 1.4 図 1.4 で非線形インダクタとした場合の回路方程式を導け. ただし, 回路素子の特性はそれぞれ次のように仮定する.

(a) 非線形インダクタの回路 :

$$\begin{aligned}
 \text{キャパシタ特性} &: q(t) = C v_C(t) \\
 \text{インダクタ特性} &: i_L(t) = c_1 \lambda(t) + c_3 \lambda^3(t) \\
 \text{抵抗特性} &: i_G(t) = g_1 v_G(t) \\
 \text{電流源の特性} &: j(t) = J \cos \omega t
 \end{aligned} \tag{1.107}$$

(b) 非線形インダクタと非線形コンダクタの回路 :

$$\begin{aligned}
 \text{キャパシタ特性} &: q(t) = C v_C(t) \\
 \text{インダクタ特性} &: i_L(t) = c_1 \lambda(t) + c_3 \lambda^3(t) \\
 \text{抵抗特性} &: i_G(t) = g(v_G(t)) = -g_1 v_G(t) + g_3 v_G^3(t) \\
 \text{電流源の特性} &: j(t) = J \cos \omega t
 \end{aligned} \tag{1.108}$$

### 1.5 アナログニューロンの回路

神経細胞 (ニューロン) の簡単なモデルとして, 興奮性ニューロンと抑制性ニューロンの 2 種類のニューロンが考えられている. 図 1.7 にはそれぞれのニューロンが円で示され, ニューロンの内部状態が実数  $x, y$  で, 興奮性ニューロンが記号  $E$  で, また抑制性ニューロンが  $I$  で示されている. それぞれのニューロンからの出力は線分で, 入力是小円で示してある. 白丸は興奮性ニューロンからの入力, 黒丸は抑制性ニューロンからの入力を表す.

さて, 各ニューロンの状態は次式で変化するものとする.

**興奮性ニューロン :**

$$\tau_x \frac{dx}{dt} = -x + \sum_{\ell=1}^m w_{\ell} u_{\ell}, \quad z_x = f(x) = \tan^{-1} x \tag{1.109}$$

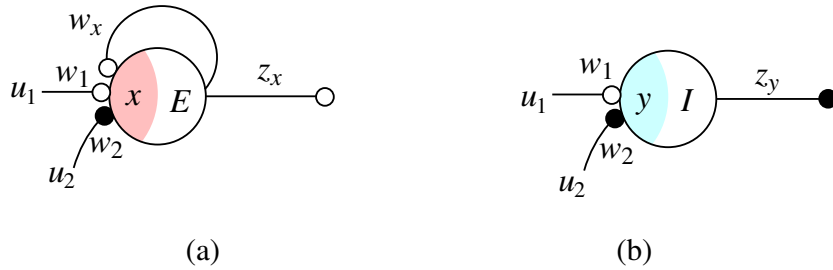


図 1.7 (a) 興奮性ニューロン, (b) 抑制性ニューロン.

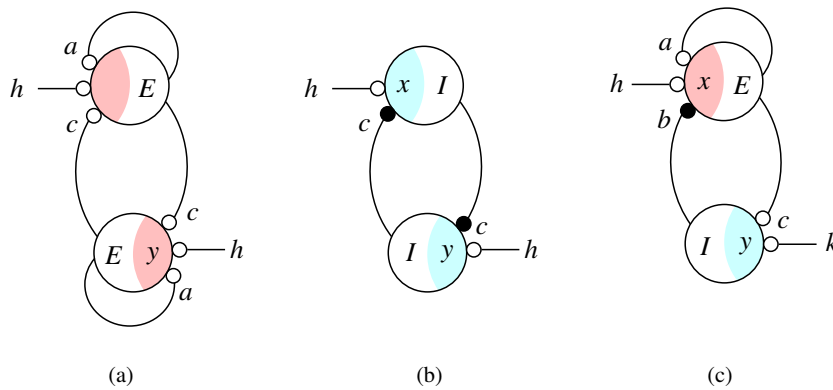


図 1.8 ニューロン対の回路.

**抑制性ニューロン：**

$$\tau_y \frac{dy}{dt} = -y + \sum_{\ell=1}^m w_\ell u_\ell, \quad z_y = f(y) = -\tan^{-1} y \quad (1.110)$$

ここに、出力  $z_x, z_y$  は飽和特性を表す関数でここでは  $\tan^{-1}$  と仮定している。2つのニューロンの違いは出力の符号の違いである。また、 $w_\ell$  は入力  $u_\ell$  の重み係数で正の実数とする。

これらの性質をもとにして図 1.8 に示した結合ニューロン回路の状態方程式を導け。ただし、入力の重み係数は  $a, b, c$  で示した。また示していないものは 1 とする。

**プログラミング演習問題**

- 1.1 ロジスティック方程式 (1.32) について、初期値  $x(0)$  を与えて次々と状態の点列  $x(1), x(2), \dots$  を求め表示するプログラムを作れ。  $\alpha_0$  の値を変えて点列の動きの変化を観察せよ。
- 1.2 ファン・デア・ポール方程式 (1.90) の相平面図（幾つかの初期値を与えて解の動きを相平面に描いた図）を作成せよ。解はリミット・サイクルと呼ばれる周期的な解に漸近する。この様子を観察せよ。また、 $\epsilon$  の値を 0.1, 0.5, 1.0, 2.0 と変化させて各々の場合の相平面図を描け。

## 第 2 章

# 平衡点とその安定性

この章では連続時間系，すなわち常微分方程式で定義される力学系の平衡点の位相幾何学的性質について考える．平衡点は自律系の最も基本的状態である．平衡点では状態速度が零となっているので，状態は静止している．他方，長時間にわたって系の平衡点が決まった状態のままの状態に留まるかどうかは，その平衡点が安定であるかどうかによって依存している．一般に，力学系の安定性理論は豊富な内容を持っている．そのなかで平衡点の安定性に関する議論は基本的である．

平衡点の安定性は，系を平衡点の近傍で線形化することによって検討することができる．線形化によって得られる方程式は，線形定係数同次方程式となるため，解を陽に求めることができる．すなわち，問題は線形代数の固有値問題に換言され，固有値の性質によって双曲的（単純）な平衡点は位相幾何学的に分類が可能となる． $n$  個の状態からなる  $n$  次元自律系では，一般に  $n + 1$  個の位相幾何学的に性質の異なる双曲型平衡点のあることが分かる．また，安定性についてはリアプーノフによって提案された安定性の考え方を学ぶ．

### 2.1 平衡点と系の線形化

状態空間  $M$  を  $R^n$  の有界な開集合とし， $M \subset R^n$  の各点において状態速度が次式で与えられる力学系を考える．

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

あるいはベクトル表示を用いて簡潔に

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.2)$$

と書くことにしよう．ここに， $t$  は時刻を表す実数であり  $t \in R$ ， $x$  は状態を表す  $x \in R^n$ ．また，状態の時間に関する微分は上付きドットで表した：

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

この記法は便利なので，今後適宜使用する．右辺を定義している写像（状態速度ベクトル）：

$$f : M \rightarrow R^n; \quad x \mapsto f(x)$$



は連続でかつ必要な回数だけ微分可能な性質を持つと仮定しよう。以後、本章では集合  $M$  を問題とすることはないので、状態空間は  $R^n$  とする。

速度が零となる点、すなわち

$$f(x) = 0 \quad (2.3)$$

を満足する点を**平衡点** (equilibrium point) という。平衡点はそれ自身で式 (2.2) の解となっている。したがって平衡点は、すべての時刻に対して（過去と未来にわたって永久に）静止している状態を表している。

いま、点  $x_0 \in R^n$  を式 (2.2) の平衡点とし、この平衡点からの微少量のずれを  $\xi(t)$  としよう。  $\xi(t)$  を  $x_0$  の**変分** (variation) という。変分に対する方程式を得るため点

$$x(t) = x_0 + \xi(t) \quad (2.4)$$

の運動を考えよう。式 (2.4) を式 (2.2) に代入して

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 + \dot{\xi}(t) = f(x_0 + \xi(t)) \quad (2.5)$$

を得る。変分  $\xi(t)$  が十分に小さいものとする、右辺をテイラー展開し

$$f(x_0 + \xi(t)) = f(x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x(t)=x_0} \xi(t) + \cdots = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x(t)=x_0} \xi(t) + \cdots \quad (2.6)$$

となる。ここで  $\cdots$  の項は  $\xi(t)$  の2次以上の項を表す。式 (2.5) と (2.6) より の線形部分を取り出すと

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) \quad (2.7)$$

を得る。ここに

$$A = Df(x_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x(t)=x_0} \quad (2.8)$$

とおいた。  $Df(x_0)$ ,  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x(t)=x_0}$  はいずれも点  $x_0$  における  $f$  の微分（ヤコビ行列）を表す記法である。式 (2.7) を平衡点  $x_0$  に関する**変分方程式**という。式 (2.7) は平衡点  $x_0$  に関する式 (2.2) の**線形化方程式**ともいう。したがって平衡点からのずれ  $\xi(t)$  は、近似的に式 (2.7) で表される線形定係数同次方程式の解となる。

### 【例 2.1】ファン・デア・ポール方程式 (1.90) の平衡点

式 (1.90) の平衡点は

$$y_0 = 0, \quad -x_0 + \epsilon(1 - x_0^2)y_0 = 0 \quad (2.9)$$

より、直ちに原点  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  のみであることが分かる。

この点における変分方程式は  $x(t) = x_0 + \xi = \xi$ ,  $y(t) = y_0 + \eta = \eta$  とすれば、

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta \\ \dot{\eta} &= -\xi + \epsilon\eta \end{aligned} \quad (2.10)$$

となる。 ■

## 2.2 線形定係数同次方程式の一般解

### 2.2.1 同次方程式の基本解

式 (2.7) を改めて

$$\dot{x} = Ax \quad (2.11)$$

と書くことにし、この方程式の解について考える。ここに  $A$  は  $n \times n$  の定数行列である。いま、初期条件として  $t=0$ ,  $x(0) = x_0$  を満たす解を

$$x(t) = \phi(t, x_0) \quad (2.12)$$

と書くことにしよう。ここに

$$x(0) = \phi(0, x_0) = x_0 \quad (2.13)$$

である。指数関数は微分してもその形を変えない

$$\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$$

ことから、同次方程式 (2.11) の解は

$$x(t) = \phi(t, x_0) = e^{At}x_0 \quad (2.14)$$

の形で求めることができる。ここに

$$e^{At} = \exp(At) = I_n + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \quad (2.15)$$

で行列指数関数を定義した。

さて、行列

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (2.16)$$

を考えると、これは

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A\Phi(t) \quad (2.17)$$

なる行列同次方程式の解となっている。この解は初期値

$$\Phi(0) = e^{A0} = I_n \quad (2.18)$$

を満たしている。この行列を式 (2.11) の**基本行列解**と呼ぶことにしよう。  $\Phi(t)$  はまた**状態遷移行列** (state transition matrix) とも呼ばれている。さらにこの基本行列解を列ベクトルに分解すると、

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

各列ベクトル解  $\varphi_j(t)$  は初期値

$$\varphi_j(0) = e_j = \overbrace{[0 \cdots 0]^{j-1}}^{j-1} [1 \ 0 \cdots 0]^T, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.20)$$

を持つ解となっている。この  $n$  個の列ベクトル解を、式 (2.11) の基本解という。基本解を用いると解 (2.14) は次のように表現することができる (重ね合わせの理)。

$$x(t) = \phi(t, x_0) = \Phi(t)x_0 = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) \quad (2.21)$$

ただし、

$$x_0 = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T \quad (2.22)$$

とおいた。いま、式 (2.22) の初期値を任意定数ベクトルとすると、解 (2.21) は式 (2.11) の一般解となっている。ただ、これまでの議論では基本解  $\varphi_j(t)$  を具体的に計算する方法を述べていない。次にこのことを考えよう。

### 2.2.2 ジョルダン標準形を用いた一般解の表現

一般に  $n \times n$  の正方行列  $A$  は、適当な正則行列  $H$  を用いて相似変換するとブロック対角行列になる。すなわち

$$Q = H^{-1}AH = \text{diag}[Q_1(\mu_1) \ Q_2(\mu_2) \ \cdots \ Q_r(\mu_r)] \quad (2.23)$$

ここに

$$Q_j(\mu_j) = \begin{bmatrix} \mu_j & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \mu_j & 1 & \ddots & \\ & 0 & \mu_j & \ddots & 0 \\ & & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \mu_j & 1 \\ 0 & & & & 0 & \mu_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (2.24)$$

この性質を使って、式 (2.11) を次式で座標変換しよう。

$$x = Hy \quad (2.25)$$

式 (2.11) は

$$\dot{x} = H\dot{y} = Ax = AHy$$

より

$$\dot{y} = H^{-1}AHy = Qy \quad (2.26)$$

となって、状態はブロックに分離できる。

そこで代表的な次の 2 つの場合について考えてみよう。

- (1)  $A$  の固有値がすべて異なる場合
- (2)  $A$  の固有値がすべて同じでジョルダン・ブロックが 1 つの場合

行列  $A$  の固有値および固有ベクトルは方程式

$$Ah = \mu h \quad (2.27)$$

を満たしている。したがって固有値は特性方程式

$$\chi(\mu) = \det(\mu I_n - A) = \mu^n + a_1 \mu^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \mu + a_n = 0 \quad (2.28)$$

の根である。

### $A$ の固有値がすべて異なる場合の一般解

相異なる固有値と固有ベクトルを

$$Ah_i = \mu_i h_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.29)$$

としよう。ここで行列

$$H = [h_1 \ h_2 \ \cdots \ h_n], \quad Q = \text{diag}[\mu_1 \ \mu_2 \ \cdots \ \mu_n]$$

を考えると、式 (2.29) はまとめて

$$AH = HQ \quad (2.30)$$

と書ける。したがって

$$Q = H^{-1}AH = \text{diag}[\mu_1 \ \mu_2 \ \cdots \ \mu_n]$$

より、式 (2.26) は

$$\dot{y}_i = \mu_i y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.31)$$

となる。式 (2.31) はベクトル  $y$  の各成分が分離したスカラーの方程式になっている。このことから、簡単に解けて、解は次式となる。

$$y_i(t) = e^{\mu_i t} y_i(0), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.32)$$

したがって、式 (2.11) の一般解は次式となる。

$$\begin{aligned} x(t) &= Hy(t) = [h_1 \ h_2 \ \cdots \ h_n]y(t) \\ &= y_1(t)h_1 + y_2(t)h_2 + \cdots + y_n(t)h_n \\ &= y_1(0)e^{\mu_1 t}h_1 + y_2(0)e^{\mu_2 t}h_2 + \cdots + y_n(0)e^{\mu_n t}h_n \\ &= \sum_{i=1}^n y_i(0)e^{\mu_i t}h_i \end{aligned} \quad (2.33)$$

これは一般解 (2.21) の別の表現であり、具体的に 1 つの基本解を与えている。幾何学的にみると、各固有ベクトル  $h_i$  で決まる直線上の解がすべての時間においてこの直線上に留まっていることを表している。言い換えると、各  $h_i$  できまる直線は**不変部分空間** (invariant subspace) となっている。すなわち、初期値を 1 つの固有ベクトルが張る部分空間

$$x(0) \in E_i = \{x \in R^n \mid x = ah_i, a \in R\}$$

に置くと、解 (2.33) は以後この空間に留まる.

$$x(t) \in E_i, t \in R$$

そして式 (2.33) は、状態空間  $R^n$  全体が  $h_i$  で定まる不変部分空間の直和に分解されていることを表している.

**【例 2.2】1 組の互いに共役な複素固有値と他が相異なる実固有値の場合**

1 組の互いに共役な複素根のある場合を考えておこう.  $\mu_1$  と  $\mu_2 = \bar{\mu}_1$  が互いに共役な複素根とする. それぞれに対する固有ベクトルは  $h_1$  および  $h_2 = \bar{h}_1$  となる. ここで  $\bar{\phantom{x}}$  は共役複素数を表す. このとき一般解は式 (2.33) と同様に

$$x(t) = c_1 e^{\mu_1 t} h_1 + \bar{c}_1 e^{\bar{\mu}_1 t} \bar{h}_1 + c_3 e^{\mu_3 t} h_3 + \cdots + c_n e^{\mu_n t} h_n \quad (2.34)$$

と書くことができる. ここに、任意定数  $c_1$  は任意の複素数である. 式 (2.34) の右辺第 1 項と第 2 項は互いに共役となり、結果は実数となっている.

そこで式 (2.34) の第 1 項と第 2 項を実数で具体的に表してみよう.

$$\mu_1 = -\zeta + j\omega, \quad h_1 = h + jk, \quad c_1 = c + jd \quad (2.35)$$

とおく. ここに、 $j = \sqrt{-1}$ ,  $\zeta, \omega$  は実数 (固有値の実部と虚部),  $h, k$  は実ベクトル (固有ベクトルの実部と虚部) である. 関係式

$$\begin{aligned} c_1 e^{\mu_1 t} h_1 + \bar{c}_1 e^{\bar{\mu}_1 t} \bar{h}_1 &= 2\Re(c_1 e^{\mu_1 t} h_1) \\ &= 2ce^{-\zeta t}(h \cos \omega t - k \sin \omega t) - 2de^{-\zeta t}(h \sin \omega t + k \cos \omega t) \end{aligned}$$

を用いて、式 (2.34) の右辺の第 1 項と第 2 項の和の部分は

$$c_1 e^{-\zeta t}(h \cos \omega t - k \sin \omega t) + c_2 e^{-\zeta t}(h \sin \omega t + k \cos \omega t)$$

となる. ここで、任意実定数は改めて  $c_1, c_2$  と書き直しておいた.

以上のことから、一般解 (2.34) は

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-\zeta t}(h \cos \omega t - k \sin \omega t) + c_2 e^{-\zeta t}(h \sin \omega t + k \cos \omega t) \\ &\quad + c_3 e^{\mu_3 t} h_3 + \cdots + c_n e^{\mu_n t} h_n \end{aligned} \quad (2.36)$$

と表すことができる. ■

**【例 2.3】式 (2.10) の一般解**

上の例 2.2 を応用しよう. 特性方程式は

$$\chi(\mu) = \mu^2 - \epsilon\mu + 1 = 0 \quad (2.37)$$

である. ここで  $|\epsilon| \leq 2$  の場合を考えると、2 根は

$$\mu_{1,2} = \frac{\epsilon}{2} \pm j\sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2} = \zeta \pm j\omega \quad (2.38)$$

ここに

$$\zeta = \frac{\epsilon}{2}, \quad \omega = \sqrt{1 - \zeta^2}$$

とおいた。したがって固有ベクトルの実部と虚部を

$$h = \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

と選んで、一般解は次式となる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} &= c_1 e^{\zeta t} (h \cos \omega t - k \sin \omega t) + c_2 e^{\zeta t} (h \sin \omega t + k \cos \omega t) \\ &= \begin{bmatrix} c_1 e^{\zeta t} \cos \omega t + c_2 e^{\zeta t} \sin \omega t \\ c_1 e^{\zeta t} (\zeta \cos \omega t - \omega \sin \omega t) + c_2 e^{\zeta t} (\zeta \sin \omega t + \omega \cos \omega t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.39)$$

■

### A の固有値がすべて同じでジョルダン・ブロックが 1 つの場合

重複した固有値の場合について考えよう。実際のシステムでは、このような場合は非常に稀にしか起こらないので考える必要はめったにないが、解の性質をみるため最小限の事項をかき摘んで述べる。ここでは  $n$  重に重複した固有値が 1 個のジョルダン・ブロックを持っている場合を考える。複数個のジョルダン・ブロックに分かれる場合は、同様な考察から直ちに理解できる。そこで

$$Q = H^{-1}AH = \begin{bmatrix} \mu & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \mu & 1 & \cdots & \\ & 0 & \mu & \ddots & 0 \\ & & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \mu & 1 \\ 0 & & & & 0 & \mu \end{bmatrix} = \mu I_n + N \quad (2.40)$$

となっている場合を考えよう。ここに

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ & & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ & & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

とおいた. この  $N$  はべき零行列と呼ばれる行列である.

$$N^\ell = \begin{bmatrix} & & & \ell & & \\ & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & & 0 \\ & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 1 & \\ & & & & & \\ & & & 0 & & \ddots \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \ell = 2, 3, \dots, n-1 \quad (2.42)$$

$$N^n = 0$$

となることに注意しよう.

この場合も式 (2.25) の変数変換により, 同次方程式 (2.11) は次式となる.

$$\dot{y} = Qy = (\mu I_n + N)y \quad (2.43)$$

そこで, この方程式の基本解を直接計算して次式を得る.

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{(\mu I_n + N)t} y(0) = e^{\mu I_n t} e^{Nt} y(0) = e^{\mu t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j N^j}{j!} y(0) \\ &= e^{\mu t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \frac{t}{1!} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n(0) \end{bmatrix} \\ &= y_1(0)e^{\mu t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + y_2(0)e^{\mu t} \begin{bmatrix} \frac{t}{1!} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + y_n(0)e^{\mu t} \begin{bmatrix} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{t}{1!} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.44)$$

これより, 式 (2.25) を用いて元の変数に返せば, 一般解が得られる.

ここで  $n$  重に重複した固有値  $\mu$  の固有ベクトル空間は,

$$e_\ell = \begin{bmatrix} & & & \ell & & \\ & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \ell = 1, 2, \dots, n$$

を標準基底とすると

$$\begin{aligned} Q - \mu I_n &= \text{の固有ベクトル空間の基底を } \{e_1\} \\ (Q - \mu I_n)^2 &= \text{の固有ベクトル空間の基底を } \{e_1, e_2\} \\ &\dots \\ (Q - \mu I_n)^n &= \text{の固有ベクトル空間の基底を } \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \end{aligned}$$

と選べることに注意しよう。基底をこのように選んでできる固有値  $\mu$  の固有ベクトル空間を一般化された固有ベクトル空間と呼んでいる。

**【例 2.4】例 2.1 の式 (2.10) で  $\epsilon = 2$  の場合**

この場合、式 (2.10) は次式となる。

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta \\ \dot{\eta} &= -\xi + 2\eta \end{aligned} \tag{2.45}$$

この方程式の特性根は式 (2.37) より、重根となる。

$$\mu_1 = \mu_2 = 1$$

そこで係数行列を式 (2.40) と同様に分解すると

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \mu_1 I_2 + N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

したがって、式 (2.45) の解は次式となる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} &= e^{At} \begin{bmatrix} \xi(0) \\ \eta(0) \end{bmatrix} = e^{I_2 t} e^{Nt} \begin{bmatrix} \xi(0) \\ \eta(0) \end{bmatrix} = e^t [I_2 + Nt] \begin{bmatrix} \xi(0) \\ \eta(0) \end{bmatrix} \\ &= e^t \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \xi(0) \\ \eta(0) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(0) \\ \eta(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.46}$$

■

### 2.2.3 高階スカラー方程式の一般解とコンパニオン方程式

$n$  階のスカラー同次方程式：

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \tag{2.47}$$

の一般解を求め、連立ベクトル方程式との関係を見ておこう。式 (2.47) の解を

$$x(t) = e^{\mu t} \tag{2.48}$$



とにおいて、式 (2.47) に代入して、特性方程式を求めると次式を得る.

$$\chi(\mu) = \mu^n + a_1\mu^{n-1} + a_2\mu^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\mu + a_n = 0 \quad (2.49)$$

いま、式 (2.49) の根がすべて相異なる場合を考えよう.

$$\chi(\mu) = (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) \cdots (\mu - \mu_n) = 0 \quad (2.50)$$

このとき、式 (2.47) の一般解は次式となる.

$$x(t) = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t} + \cdots + c_n e^{\mu_n t} \quad (2.51)$$

さて、式 (2.47) を連立方程式に書き換えよう. 次式で新しい状態変数を導入する.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \\ x_3(t) &= \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt} \\ &\dots \\ x_n(t) &= \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = \frac{dx_{n-1}}{dt} \end{aligned} \quad (2.52)$$

すると、式 (2.47) は次式に書き直せる.

$$\frac{dx_n}{dt} = -a_1 x_n(t) - a_2 x_{n-1}(t) - \cdots - a_{n-1} x(t) - a_n x_1(t) \quad (2.53)$$

式 (2.52) と (2.53) を合わせて次式を得る.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_n & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

この形の方程式を式 (2.47) のコンパニオン方程式という. 特に、行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_n & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

を特性方程式 (2.49) のコンパニオン行列 (companion matrix) という.

**【例 2.5】例 1.1 の摩擦とねじれスプリングのある振り子**

式 (1.9) の平衡点の 1 つ原点における線形化方程式は

$$\ddot{\theta} + \frac{B}{m\ell^2}\dot{\theta} + \left(\frac{K}{m\ell^2} + \frac{\ell}{g}\right)\theta = 0 \quad (2.56)$$

となる。この系のコンパニオン方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{B}{m\ell^2}\omega - \left(\frac{K}{m\ell^2} + \frac{\ell}{g}\right)\theta \end{aligned} \quad (2.57)$$

これは式 (1.10) の原点における線形化方程式にほかならない。

■

## 2.3 平衡点の位相的分類

### 2.3.1 双曲型平衡点と系の線形化

平衡点に関する変分方程式の解が分かったので、平衡点の分類について考えよう。ここでは位相幾何学的な分類を述べる。この分類は第 7 章で考察する平衡点の分岐問題において中心的役割を果たす。

いま、 $x_0 \in R^n$  を式 (2.2) の 1 つの平衡点、この点における線形化方程式を式 (2.7) とし、ヤコビ行列を式 (2.8) とする。また、この行列  $A = Df(x_0)$  の固有値、すなわち特性根を

$$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\} = \{\mu_i \in C \mid \det(\mu_i I_n - Df(x_0)) = 0\} \quad (2.58)$$

とする。このとき、平衡点  $x_0$  が次の条件を満たす場合、**双曲的** (hyperbolic) または**単純** (simple) であるという。

**平衡点が双曲的である条件**

係数行列 のすべての特性根について

$$\Re(\mu_i) \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.59)$$

この条件は、基本解が指数関数的に増大するか、あるいは減少する関数のみで重ね合わされることを意味している。言い換えると、基本解として特性根零に対応する定数解や、純虚数に対応する振動解を持たない場合といえる。

さて、双曲型平衡点に出入りする解の作る曲面 (多様体) を定義しよう。このため、まず線形化方程式 (2.7) の解が次の 2 つの不変部分空間に分割されることに注意しよう。いま行列  $A$  の  $\Re(\mu_i) > 0$  となる  $\mu_i$  の一般化された固有空間の直和と  $R^n$  の共通部分を、**不安定不変部分空間** と呼び  $E^u$  と書くことにする。同様に  $A$  の  $\Re(\mu_i) < 0$  となる  $\mu_i$  の一般化された固有空間の直和と  $R^n$  の共通部分を、**安定不変部分空間** と呼び  $E^s$  と書くことにする。前節で述べた同次方程式 (2.11) の解の性質から次の幾

何学的結果を得る. なお, 線形化方程式の解が張るベクトル空間  $R^n$  は平衡点  $x_0$  の接空間 (tangent space) と呼ばれている.

### 接空間の分解

双曲型平衡点  $x_0$  の接空間  $R^n$  は, 次のように不安定・安定不変部分空間に分解できる.

$$\begin{aligned} (a) \quad R^n &= E^u \oplus E^s, \quad A(E^u) = E^u, \quad A(E^s) = E^s \\ (b) \quad \dim E^u &= \#\{\mu_i \in C \mid \Re(\mu_i) > 0\}, \quad \dim E^s = \#\{\mu_i \in C \mid \Re(\mu_i) < 0\} \end{aligned} \quad (2.60)$$

ここに  $\#\{ \}$  は集合の要素の数を表す.

### 【例 2.6】ローレンツ (Lorenz) 方程式の平衡点 (原点)

気象学者ローレンツは, 大気の流れの問題から次の 3 次元自律系を研究した.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy \end{aligned} \quad (2.61)$$

ただし,  $\sigma, b > 0, r > 1$  とする. 原点は明らかに平衡点である. この平衡点の安定・不安定部分空間を求めてみよう. 原点におけるヤコビ行列 (2.8) は次式となる.

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

したがって, 特性方程式は

$$\chi(\mu) = \det(\mu I_3 - A) = (\mu + b)\{\mu^2 + (1 + \sigma)\mu + \sigma(1 - r)\} = 0 \quad (2.63)$$

となる. そこで特性根は, 係数のみたす上記の仮定から

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -b < 0 \\ \mu_2 &= -\frac{\sigma + 1}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma - 1}{2}\right)^2 + r\sigma} < 0 \\ \mu_3 &= -\frac{\sigma + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma - 1}{2}\right)^2 + r\sigma} > 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

であることが分かる.  $\mu_1$  に対する安定部分空間は  $z$  軸となることが直ちにわかる. また,  $\mu_2, \mu_3$  に対する固有ベクトル  $h_2, h_3$  を計算すると

$$h_2 = \begin{bmatrix} \sigma \\ \frac{\sigma - 1}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma - 1}{2}\right)^2 + r\sigma} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_3 = \begin{bmatrix} \sigma \\ \frac{\sigma - 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma - 1}{2}\right)^2 + r\sigma} \\ 0 \end{bmatrix}$$

を得る. したがって

$$\begin{aligned} E^s &= \{x \in R^3 \mid x = a_1 h_2 + a_2 e_3, \ a_1, \ a_2 \in R\} \\ E^u &= \{x \in R^3 \mid x = a_3 h_3, \ a_3 \in R\} \end{aligned} \quad (2.65)$$

となる.

■

次に, 自律系 (2.2) の  $t=0$  において初期値  $u \in R^n$  を通る解を

$$x(t) = \varphi(t, u), \quad x(0) = \varphi(0, u) = u \quad (2.66)$$

と書くことにしよう. そこで集合

$$\begin{aligned} W^u(x_0) &= \{u \in R^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, u) = x_0\} \\ W^s(x_0) &= \{u \in R^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, u) = x_0\} \end{aligned} \quad (2.67)$$

を考えよう. これらの集合は, それぞれ双曲型平衡点  $x_0$  の不安定 (unstable) および安定多様体 (stable manifold) と呼ばれている. この2つの集合は状態空間内にあり, 時間が経過するにしたがって平衡点から遠ざかる, あるいは近づく初期値の集合である. また, 点  $x_0$  での線形化を行えば, 上で定義した不安定部分空間  $E^u$  と安定部分空間  $E^s$  が得られる. これらの部分空間は点  $x_0$  の接空間を張っていることに注意しよう. 実際次の性質がある.

$$\begin{aligned} \dim E^u &= \dim W^u(x_0) \\ \dim E^s &= \dim W^s(x_0) \\ \dim W^u(x_0) \cap \dim W^s(x_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

### 【例 2.7】単振り子の頂点の平衡点

例 1.1, 1.5, 1.6 で扱った摩擦のない振り子の平衡点  $(\pi, 0)$  を通る安定および不安定多様体 (この場合は曲線) を求めてみよう. 式 (1.38) はエネルギー関数 (1.65) を保存する. いまこのエネルギーが平衡点  $(\pi, 0)$  のそれに等しい場合を考える.

$$H(\theta, p) = \frac{p^2}{2m\ell^2} - mg\ell \cos \theta = H(\pi, 0) = mg\ell \quad (2.69)$$

この式を整理して

$$p = \pm 2m\ell \sqrt{g\ell} \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.70)$$

を得る. これらの2本の曲線は相平面  $(\theta, p) \in R^2$  において, 式 (1.38) の解軌道となっている. 特に

$$p = 2m\ell \sqrt{g\ell} \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.71)$$

上に初期値を与えると, 状態は平衡点  $(\pi, 0)$  に近づく方向に運動する. また,

$$p = -2m\ell \sqrt{g\ell} \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.72)$$

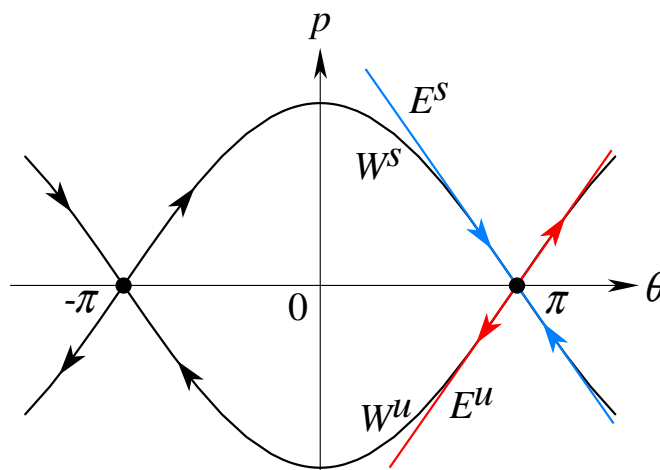


図 2.1 単振り子のサドルの安定・不安定曲線.

上に初期値を与えると、逆に状態は平衡点  $(\pi, 0)$  から遠ざかる方向に運動する。このことから、平衡点  $(\pi, 0)$  では、式 (2.71) が安定多様体を、式 (2.72) が不安定多様体となる。なお、平衡点  $(-\pi, 0)$  では状況が反対になっている。このことから式 (2.71) は平衡点  $(\pi, 0)$  の安定多様体であると同時に、平衡点  $(-\pi, 0)$  の不安定多様体となっている。

平衡点  $(\pi, 0)$  において 2 つの曲線 (2.71), (2.72) に接する 2 直線

$$\begin{aligned} p &= -ml\sqrt{g/l}(\theta - \pi) \\ p &= ml\sqrt{g/l}(\theta - \pi) \end{aligned} \tag{2.73}$$

は、それぞれ特性根  $\mu_1 = -\sqrt{g/l}$  および  $\mu_2 = \sqrt{g/l}$  に対する安定および不安定部分空間（この場合は直線）である。図 2.1 に相平面図でこれらの状況を示した。



さて、2 つの平衡点が位相幾何学的に同じ性質を持つとは、これらの平衡点の近傍において、時間の進展の向きに向き付けられた解軌道全体を考えたとき、同位相写像 (1:1 写像で逆写像も共に連続となる写像) によって互いに写り変わることでできる場合をいう。このことから双曲型平衡点はその不安定多様体（または同じことであるが安定多様体）の次元が異なる毎に、その位相幾何学的性質が異なると言える。

そこでいま、

$$\dim W^u(x_0) = m, \quad \dim W^s(x_0) = n - m \tag{2.74}$$

の性質を持つ平衡点を  $m$  次元不安定な双曲型平衡点と呼び、 $mO$  と書くことにしよう。ここでは平衡点の記号の左下付き添字に不安定次元を記すこととした。  $m$  は 0 から  $n$  まで  $n + 1$  個変えることができる。したがって次の結果を得る。

**位相的に異なる双曲型平衡点**

自律系 (2.2) の位相的に性質の異なる (すなわち位相的タイプの異なる) 双曲型平衡点の総数は全部で  $n + 1$  個である。それらは

$${}_0O, {}_1O, \dots, {}_nO$$

である。 ${}_0O$  は不安定次元が零次元なので、**安定な双曲型平衡点**または**沈点** (sink) という。逆に  ${}_nO$  は安定次元を持たない平衡点なので**完全不安定な双曲型平衡点**または**源点** (source) という。 ${}_1O, \dots, {}_{n-1}O$  はひとまとめにして**鞍型点**、**峠点**あるいは**サドル** (saddle) などと呼ばれている。

**双曲型平衡点の性質**

さて、双曲型平衡点の重要な性質は、この平衡点の近傍では元の非線形方程式 (2.2) の解と線形化方程式 (2.7) の解が位相的に同じ性質を持つことである。このことから、双曲型平衡点であると線形化近似した式 (2.7) の解を調べることによって元の方程式の解の様子を議論できる。

次に、特性方程式の係数と双曲型平衡点のタイプとの間の関係について考えておこう。平衡点での線形化方程式を式 (2.11) とし、その特性方程式を

$$\chi(\mu) = \det(\mu I_n - A) = \mu^n + a_1\mu^{n-1} + a_2\mu^{n-2} + \dots + a_{n-1}\mu + a_n = 0 \quad (2.75)$$

とする。このとき、平衡点のタイプは式 (2.75) の係数の満足する関係式で与えることができる。この研究はラウス (Routh) やフルッピッツ (Hurwitz) によってなされた。安定な平衡点となる場合の条件は、大抵の制御工学の教科書に紹介されているので参照してほしい。ここでは以下 2 次元と 3 次元の場合について、根と係数の関係から直接計算した結果を例としてあげる。次元が高い場合は、式 (2.75) を数値的に解いて平衡点のタイプを調べるのが実用的であろう。

**2.3.2 2次元双曲型平衡点と相平面図**

特性方程式

$$\chi(\mu) = \det(\mu I_2 - A) = \mu^2 + a_1\mu + a_2 = 0 \quad (2.76)$$

の係数と平衡点のタイプとの関係は次表 2.1 の 3 つの場合となる。

表 2.1 特性方程式の係数と平衡点のタイプとの関係

平衡点のタイプ	特性方程式の係数が満たすべき条件
${}_0O$ (沈点)	$a_1 > 0, a_2 > 0$
${}_1O$ (サドル)	$a_2 < 0$
${}_2O$ (源点)	$a_1 < 0, a_2 > 0$

これらの関係を  $(a_1, a_2)$ -平面で表示すると図 2.2 となる。次に、ジョルダン標準形を用いたそれぞれの場合の相平面図を示しておこう。

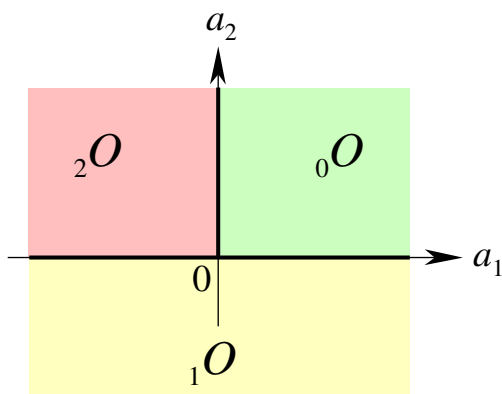


図 2.2 平衡点の位相的分類.

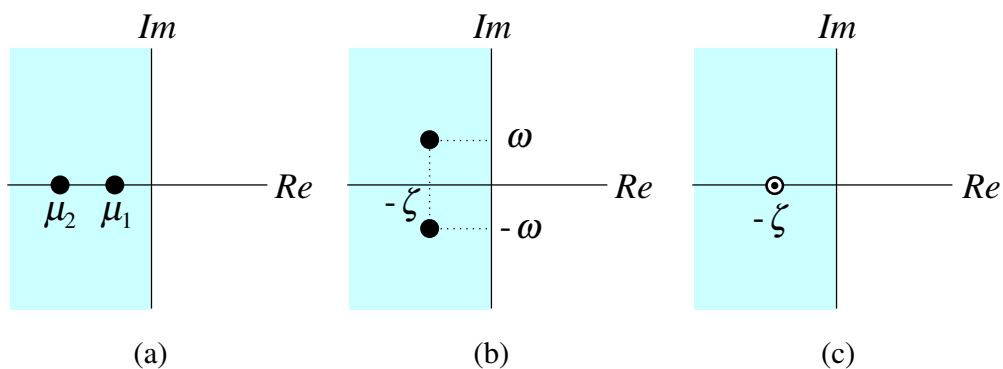


図 2.3 安定な平衡点  ${}_0O$  の特性根の分布.

(1) 沈点, すなわち  $\mu_1, \mu_2$  が共に負の実根の場合

特性根の定性的に可能な配置は図 2.3 となる. すなわち

$$(a) \mu_1 < \mu_2 < 0, \quad (b) \mu_1 = -\zeta + j\omega, \mu_2 = -\zeta - j\omega, \zeta > 0$$

$$(c) \mu_1 = \mu_2 = -\zeta$$

それぞれの場合について, 微分方程式 (2.26) の係数行列  $Q$  は次の行列となる.

$$(a) \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} -\zeta & \omega \\ -\omega & -\zeta \end{bmatrix}, \zeta > 0$$

$$(c-1) \begin{bmatrix} -\zeta & 0 \\ 0 & -\zeta \end{bmatrix}, \quad (c-2) \begin{bmatrix} -\zeta & 1 \\ 0 & -\zeta \end{bmatrix}$$

そこで相平面上に種々の初期値を与えて解軌道を描くと, これらの相平面図を得る. 結果は図 2.4 となる. なお, (a) の場合を安定結節点 (stable node), (b) の場合を安定渦状点 (spiral or focus),

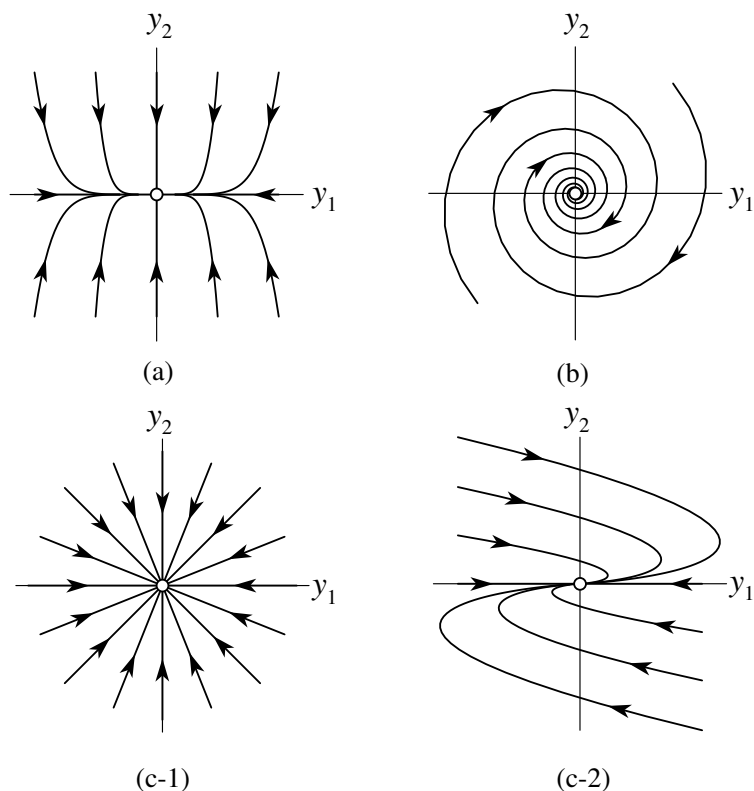


図 2.4 安定な平衡点  ${}_0O$  の相平面図.

(c-1) と (c-2) の場合を**安定な退化結節点**と呼んでいる. なお, それぞれの場合に対応する一般の場合の解は, 式 (2.33), (2.36), (2.44) を参照して容易に得ることができる.

**(2) サドル, すなわち  $\mu_2 < 0 < \mu_1$  の場合**

この場合の標準形 (2.26) の係数行列  $Q$  は

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

である. 解は式 (2.32) で与えられる. したがって相平面図は図 2.5 となる.

**(3) 源点, すなわち  $\mu_1, \mu_2$  が共に正の実根の場合**

沈点の場合の軌道の向きを逆にすればよい.

**(4) 双曲型とならない場合**

ここで双曲型とならない平衡点について解の様子をみておこう. 特性方程式 (2.76) の係数が次の条件を満たす場合が双曲的性質が失われる, 図 2.2 参照.

(a)  $a_1 = 0, a_2 > 0,$  (b)  $a_2 = 0$



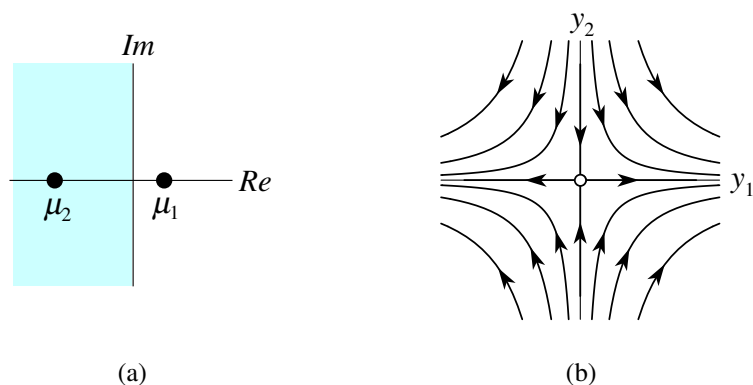


図 2.5 (a) サドル点  $O$  の特性根の分布, (b) 相平面図.

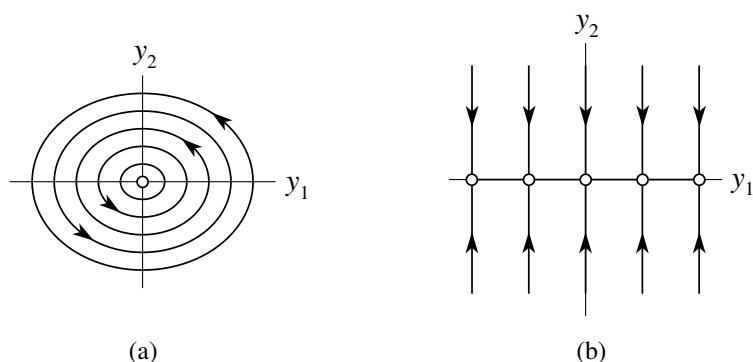


図 2.6 非双曲的な平衡点: (a) 渦心点, (b) 零特性根を持つ平衡点.

それぞれの場合の標準形 (2.26) の係数行列  $Q$  は

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

となる. すなわち, 特性根が純虚数になる場合と零根となる場合である. したがって, 基本解は (a) の場合は三角関数で, また (b) の場合は定数解と  $e^{\mu t}$  なる. このことから相平面図は図 2.6 のようになる.

**(a) の場合** 平衡点は渦心点 (center) と呼ばれている. この場合, 行列  $A$  の要素をわずかに変化させるだけで安定渦状点または不安定渦状点になってしまう. このことはまた線形化によって無視した非線形項の影響を受けて渦心点の性質が失われる場合のあることを意味している. したがって線形化方程式が渦心点を持つ場合は, もとの非線形方程式にかえて軌道の性質を吟味し直す必要がある.

**(b) の場合**  $y_1$  軸上の点はすべて平衡点となっている. この場合, 零固有値に対応する定数解が摂動によって指数関数の解に変化する.

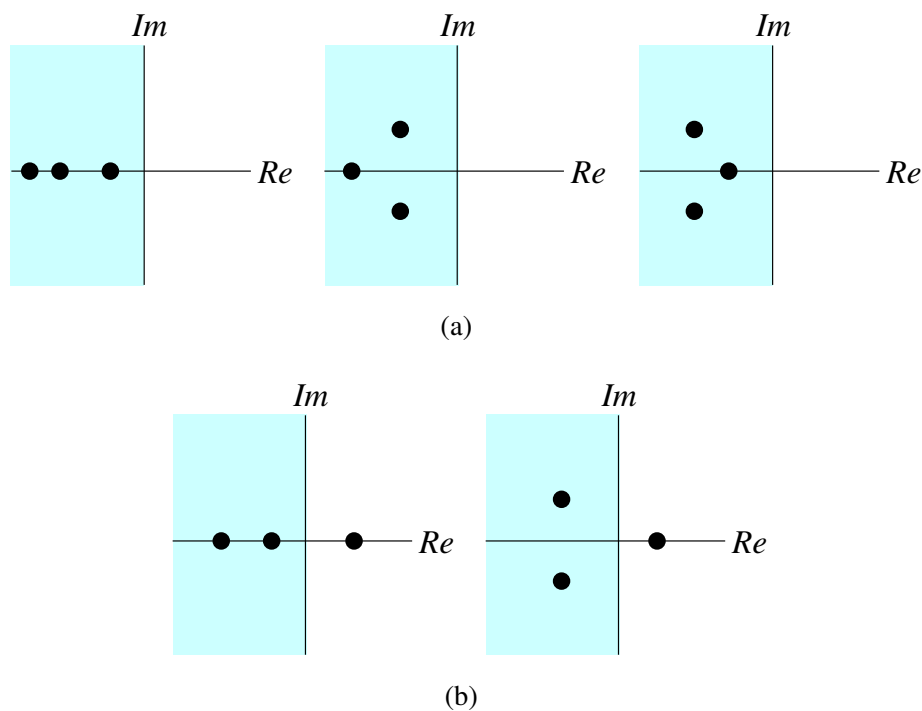


図 2.7 平衡点の特性根の分布：(a)  $0O$  , (b)  $1O$  .  $3O$  と  $2O$  については、それぞれを虚軸で反転した分布となる.

### 2.3.3 3次元双曲型平衡点の位相的に異なるタイプ

3次元の線形系 (2.11) についてみておこう. 特性方程式

$$\chi(\mu) = \det(\mu I_3 - A) = \mu^3 + a_1\mu^2 + a_2\mu + a_3 = 0 \tag{2.77}$$

の係数と平衡点のタイプとの関係は次表 2.2 の 4 つの場合となる.

表 2.2 特性方程式の係数と平衡点のタイプとの関係

平衡点のタイプ	特性方程式の係数が満たすべき条件
$0O$ (沈点)	$a_1 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 - a_3 > 0$
$1O$ (サドル)	$a_1 > 0, a_3 < 0$ あるいは $a_1 < 0, a_3 < 0, a_1a_2 - a_3 > 0$
$2O$ (サドル)	$a_1 < 0, a_3 > 0$ あるいは $a_1 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 - a_3 < 0$
$2O$ (源点)	$a_1 < 0, a_3 < 0, a_1a_2 - a_3 < 0$

重根を持たない場合の特性根の配置の例を図 2.7 に示しておく. それぞれの場合に対応した解軌道の様子は前節の標準形の方程式の解より求めることができる.

## 2.4 平衡点の安定性

物理や工学などの応用分野において平衡点が平衡の位置として意味を持つためには、平衡点はある種の安定性の条件を満たさなければならない。平衡点の安定性については ラグランジュ (Lagrange) 以来、マックスウェル (Maxwell) やラウス (Routh) などによって研究されたが、今日もっとよく使われている安定性の概念はリヤプーノフ (A. M. Lyapounov) によって考えられたものである。

振り返ってみるとこの章でも双曲型平衡点の定義で指数関数的に増大する部分空間を不安定、指数関数的に減少する部分空間を安定な部分空間と呼んできた。この意味を素朴に考えてみよう。まず、力学系の状態は初期値を与えると一意的に定まる。しかし、実在の物理系モデルとしての力学系を考えると、初期値には不確かさが付き物である。繰り返し実験のできる電気回路のような比較的検証の容易な系を考えてみても系の状態であるキャパシタ電圧やインダクタ電流をまったく同一の初期値に設定することはできないし、また使用する測定器による計測の誤差も必ず存在する。実験はこれらの精度以下の「初期値のずれ」は引き続いておこる現象に小さな変動しかもたらさないであろうことを暗に期待して行われる。初期値に関する解の連続性だけでこのことが期待できるのであろうか。

いま、 $x_0$  を自律系 (2.2) の平衡点とし、初期値  $x(0) = u$  を  $x_0$  の近傍に持つ任意の解を  $x(t) = \varphi(t, u)$  としよう。初期値に関する解の連続性は、時刻  $t$  での平衡点からの小さなずれを  $\epsilon > 0$  の範囲におさえる、すなわち  $\|\varphi(t, u) - x_0\| < \epsilon$  とするためには、初期値のずれの許容範囲が  $\|u - x_0\| < \delta(t, \epsilon)$  でなければならないことを教えてくれる。したがって、初期値のずれの許容範囲  $\delta(t, \epsilon)$  の  $t$  と  $\epsilon$  への依存性がどうなっているかが問題となる。一般に  $\epsilon$  を大きくすれば  $\delta$  も大きく取れるであろう。つまり  $\delta$  は  $\epsilon$  に対しては増加関数となっている。他方、時刻  $t$  に関してはこのことはまったく期待できない。減少関数となる場合も容易に考えられる。

簡単な例として

$$\dot{x} = x \quad (2.78)$$

を取りあげてみよう。

$$x(t) = e^t u, \quad x(0) = u \quad (2.79)$$

であるから、時刻  $t$  において平衡点である  $0$  からのずれを  $\epsilon$  におさえるためには  $|e^t u| < \epsilon$  より  $|u| < \delta = \epsilon e^{-t}$  でなければならない。このことは遠い未来においても、ずれを有限に保つには初期値は限りなく平衡点の近くに置かなければならないことを意味している。したがって、 $t \rightarrow \infty$  の極限を考えると  $\delta \rightarrow 0$  となって初期値設定は不可能となる。実際、上式を数値計算するとして、 $t = 40$  で  $\epsilon = 1$  の誤差を許すとしても  $\delta = e^{-40} < 10^{-17}$  となって倍精度計算でも初期値を与えづらくなる。

この状況から安定性の考え方が生まれたといえよう。未来のすべての時刻において  $\epsilon$  以内に解の変動をおさえるために、時刻  $t \in [0, \infty)$  とは独立に  $\delta(\epsilon)$  が選択できれば平衡点は安定であると考えてよいであろう。

### リヤプーノフの意味での安定性

平衡点は、その近くの解が将来にわたって近くにとどまるとき、リヤプーノフの意味で安定であるという。

このことを少し詳しく言い換えてみよう。いま、 $x_0$  を自律系 (2.2) の平衡点とする。平衡点  $x_0$  が **リヤプーノフの意味で安定** であるとは、任意の正の実数  $\epsilon > 0$  を与えたとき、これに対応して正の実数  $\delta > 0$  がとれて、 $\|u - x_0\| < \delta$  を満足するどのような初期値  $u \in R^n$  から出発する解  $x(t) = \varphi(t, u)$  についても、すべての  $t \geq 0$  に対して  $\|\varphi(t, u) - x_0\| < \epsilon$  とできる場合をいう。すなわち、

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \|\forall u - x_0\| < \delta, \forall t \geq 0, \|\varphi(t, u) - x_0\| < \epsilon \quad (2.80)$$

が言える場合、リヤプーノフの意味で安定であるという。以後平衡点が安定といえ、それはリヤプーノフの意味で安定であることとしよう。

時間が経過したとき、平衡点の近傍の解が平衡点に近づく性質は漸近安定性と呼ばれている。

#### 漸近安定性 (asymptotic stability)

平衡点  $x_0$  が漸近安定 (asymptotically stable) であるとは

- (1)  $x_0$  はリヤプーノフの意味で安定である。
- (2)  $\exists \epsilon > 0, \|\forall u - x_0\| < \epsilon, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$

の2つの条件が満たされる場合をいう。2番目の条件を**吸引力的性質** (attractivity) という。

散逸系では大抵の場合、安定な平衡点は漸近安定となっている。

また、平衡点がリヤプーノフの意味で安定でないとき、その平衡点を不安定という。すなわち、論理式 (2.80) を否定して

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \|\exists u - x_0\| < \delta, \exists \tau \geq 0, \|\varphi(\tau, u) - x_0\| > \epsilon \quad (2.81)$$

の場合平衡点  $x_0$  は不安定である。否定の命題は否定辞を文頭からどこまで後ろに置くかによって言い回しが色々あるので注意してほしい。

前節で考えた双曲型の平衡点は、 $0O$  タイプの平衡点が漸近安定、他のタイプはすべて不安定である。

#### 平衡点の安定性の吟味：手順

これまでの話を整理して、自律系 (2.2) の平衡点の安定性を検討する手順を考えてみよう。

1. 平衡点を見いだす。すなわち、方程式 (2.3) の解を見つける。
2. 各平衡点について線形化方程式を求める。つまりヤコビ行列 (2.8) を計算する。
3. ヤコビ行列 (2.8) の固有値を計算する。双曲型平衡点の条件を満たしておれば固有値から直ちに平衡点の位相的タイプが定まり、安定性が吟味できる。
4. 双曲型平衡点でなければ、線形化方程式からは吟味できない。この場合は元の方程式 (2.2) に還って、非線形項も考慮した別の方法を検討する。たとえば後に述べるリヤプーノフ関数による方法などを使用する。

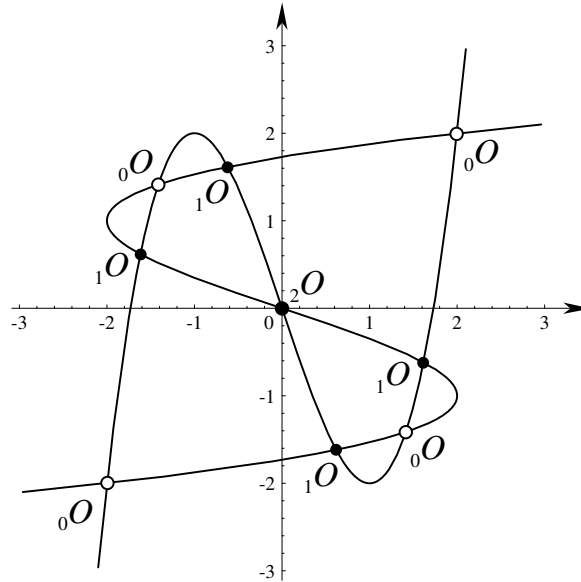


図 2.8 式 (2.83) の平衡点 :  $\alpha = 4, \delta = 1$  の場合.

**【例 2.8】 例 1.10 の RC 回路の平衡点**

例 1.10 であげた方程式 (1.89) の平衡点とその安定性を調べてみよう. いま抵抗の非線形特性は, 次の 3 次関数と仮定しよう.

$$g(v) = -av + bv^3 \tag{2.82}$$

ここに,  $a, b > 0$  とする. 式 (2.82) を式 (1.89) に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - x^3 - \delta(x - y) \\ \dot{y} &= \alpha y - y^3 - \delta(y - x) \end{aligned} \tag{2.83}$$

を得る. ここに

$$\alpha = \frac{a}{C}, \quad \delta = \frac{G}{C}, \quad v_1 = \sqrt{\frac{C}{b}}x, \quad v_2 = \sqrt{\frac{C}{b}}y \tag{2.84}$$

とおいた. したがって平衡点は, 次の 2 つの曲線の交点として求められる.

$$\begin{aligned} \alpha x - x^3 - \delta(x - y) &= 0 \\ \alpha y - y^3 - \delta(y - x) &= 0 \end{aligned} \tag{2.85}$$

具体的な例として,  $\alpha = 4, \delta = 1$  の場合を取りあげてみると, 図 2.8 となる. いま平衡点の座標を  $(x_0, y_0)$  とすると, この点におけるヤコビ行列は

$$A = \begin{bmatrix} \alpha - \delta - 3x_0^2 & \delta \\ \delta & \alpha - \delta - 3x_0^2 \end{bmatrix} \tag{2.86}$$

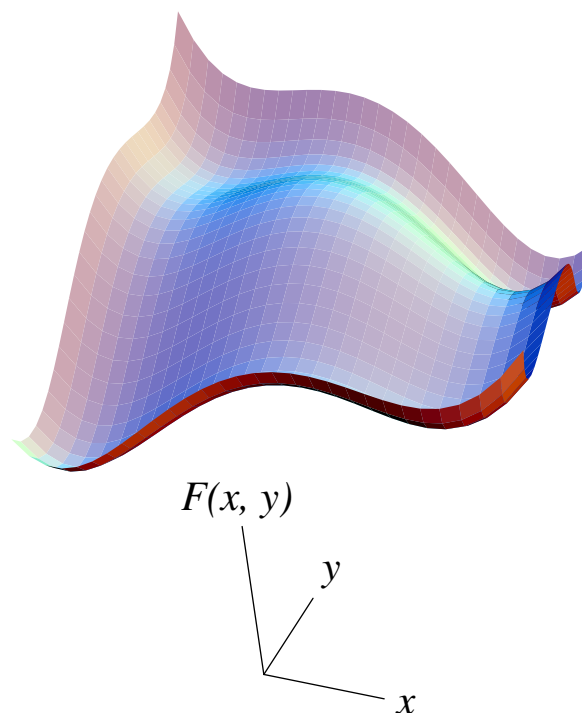


図 2.9 関数 (2.87) の曲面. 状態は最急勾配の方向へ動く.

となるので, この平衡点の特性方程式から容易に安定性を判定できる. この例では平衡点はすべて双曲型となり, それらのタイプは図 2.8 に示したものとなる.

なお, 関数

$$F(x, y) = -\frac{1}{2}\alpha(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}(x^4 + y^4) + \frac{1}{2}(x - y)^2 \quad (2.87)$$

を定義すると, 式 (2.83) は次式で表される勾配系となっている. 図 2.9 参照,

$$\dot{x} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial F}{\partial y} \quad (2.88)$$

このことから, 行列 (2.86) が対称行列となること, したがってその特性根は実数となることも分かる. 平衡点のタイプは安定結節点, 不安定結節点, あるいはサドルに限られる. 数値計算による相平面図を図 2.10 に示した. ■

## 2.5 本章のまとめと文献

### 2.5.1 本章のまとめ

1. 自律系の平衡点とは状態速度が零となる点をいう.
2. 平衡点の近傍で系の線形化を行うと定数係数の線形同次方程式が得られる.
3. 平衡点は, すべての特性根の実部が零とならないとき双曲的であるという.
4. 双曲的な平衡点には不安定および安定多様体が入り出りしている.

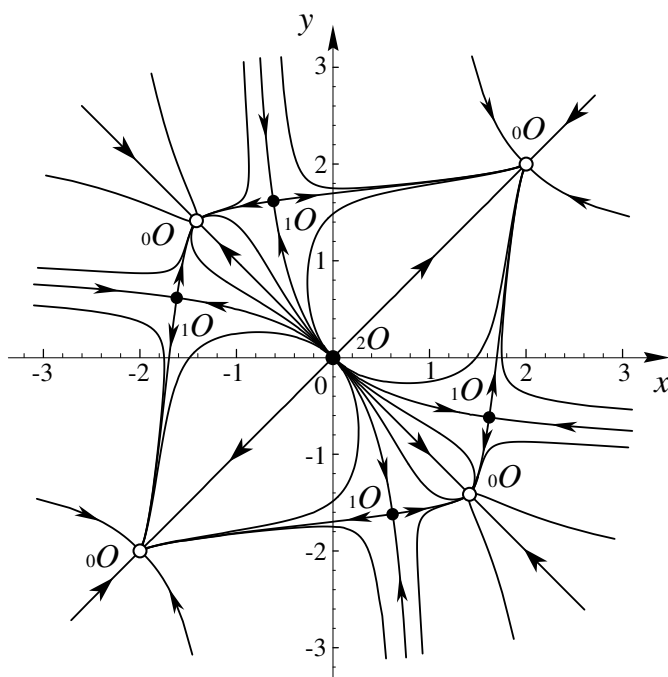


図 2.10 式 (2.83) の相平面図： $\alpha = 4$ ,  $\delta = 1$  の場合.

5.  $n$  次元自律系では，位相的に性質の異なる平衡点のタイプは全部で  $n + 1$  種類である．
6. 平衡点が安定であるというのは，通常はリヤプーノフの意味で安定な場合である．平衡点は安定でないとき，不安定であるという．
7. 漸近安定な平衡点は近傍の解を引き寄せる．

### 2.5.2 本章の文献

自律系の平衡点については大抵の常微分方程式や力学の教科書で詳しく説明されている．位相的分類を扱った教科書としては，アーノルド [O1] がある．線形定係数常微分方程式についても，アーノルド [O1]，ハーシュ・スメイル [O7]，白岩 [O4]，ポントリャーギン [O11] などに詳しく扱われている．平衡点の安定性の議論もこれらの書物を参照するとよいであろう．

平衡点はその近傍の解の性質を調べれば大体の性質がわかる．この意味で平衡点の定性的性質を調べる問題は，状態空間の局所的な (local) 性質をみる問題といえる．しかし，不安定な平衡点の安定・不安定多様体は状態空間の大域的性質に関係するので，系全体の性質を知りたい場合にはこれらの幾何学的形状を知ることが大切となる．このことについては第 8 章でふれる．

双曲的でない平衡点では，特性根零あるいは純虚数に対応した部分空間に接した多様体が考えられる．これは中心多様体 (center manifold) と呼ばれている．中心多様体の話は少し程度が高いと考えられるので本書では触れずにおいた．このことについては岡本 [D19]，Matsumoto [D15] を参照するとよいであろう．

## 2.6 練習問題 2

- 2.1 **例題 2.3** と **2.4** を参考にしながら，式 (2.10) の原点の位相的タイプを調べ，原点近傍の相平面図をスケッチせよ．ただし， $\epsilon > 0$  とする．
- 2.2 式 (2.57) の相平面図を描け．ただし，係数はすべて正の実数とする．
- 2.3 **例題 2.6** にあげたローレンツ方程式について，原点以外の平衡点を求め，その位相的タイプを調べよ．
- 2.4 2つの化学物質が反応してそれらの濃度  $x$  と  $y$  が時間的に変化する化学反応系の力学系モデルとして次の自律系で与えられるブラスレータ (Brussellator) がある．

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a - (b+1)x + x^2y \\ \dot{y} &= bx - x^2y\end{aligned}\tag{2.89}$$

この方程式の平衡点を求め，パラメータ  $a, b$  を変化させた場合の平衡点の位相的タイプを調べよ．

- 2.5 次の自律系の平衡点の位相的タイプを調べよ．

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} - y^2\right)x \\ \dot{y} &= \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2}\right)y\end{aligned}\tag{2.90}$$

- 2.6 **2.3.3** で述べた 3次元双曲型平衡点の各位相的タイプを与える条件を導出せよ．
- 2.7 平衡点が漸近安定であるためには 2つの条件が必要であった．2つ目の条件である吸引的性質を持つがリヤプーノフの意味で安定ではない平衡点の例を挙げよ．相平面図をスケッチするだけでよい．
- 2.8 **例題 2.8** の平衡点を実際に計算し，パラメータ  $\alpha$  と  $\delta$  を変化させたときにその個数，位相的タイプがどう変化するかを検討せよ．

### プログラミング演習問題

- 2.1 練習問題で必要となる相平面図を描くプログラムを作れ．



## 第3章

# 固定点とその安定性

この章は前章と対をなす。この章では離散時間系、すなわち差分方程式で定義される力学系の固定点および周期点の位相幾何学的性質について考える。固定点は差分方程式で定義される自律系の最も基本的状態である。固定点では状態が写像によって同じ点に写されるので、状態は静止している。他方、長時間にわたって系の固定点があるままの状態に留まるかどうかは、その固定点の安定であるかどうかによって依存している。

固定点の安定性は、系を固定点の近傍で線形化することによって検討することができる。このことは前章の議論と同様である。線形化によって得られる方程式は、線形定係数同次差分方程式となるため、解を陽に求めることができる。すなわち、問題はこの場合も線形代数の固有値問題に換言され、固有値の性質によって位相幾何学的に分類が可能となる。 $n$  個の状態からなる  $n$  次元自律系では、一般に  $4n$  個の位相幾何学的に性質の異なる固定点があることが分かるであろう。この章での議論は、次の章で検討する連続時間力学系の周期振動の定性的解析法の基礎となる。したがって、話の流れは前章と重複する部分が多いが繰り返し述べることにした。

### 3.1 固定点と周期点

各時刻  $k \in Z$  と、状態空間  $R^n$  の各点において定義された次の離散時間力学系を考える。

$$x_i(k+1) = f_i(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

あるいはベクトル表示を用いて簡潔に

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (3.2)$$

と書くことにしよう。ここに、 $k$  は時刻を表す整数であり、 $x$  は状態を表す： $k \in Z, x \in R^n$ 。また、右辺を定義している写像：

$$f : R^n \rightarrow R^n; \quad x \mapsto f(x)$$

は連続でかつ必要な回数だけ微分可能な性質を持つと仮定しよう。

写像  $f$  によって変化しない点、すなわち

$$f(x) = x \quad (3.3)$$

を満足する点を**固定点** (fixed point) という。また、 $l$  回写像  $f$  を作用させた後初めて元の点に写される点を  $l$ -**周期点** ( $l$ -periodic point) という。すなわち、互いに異なる  $l$  個の点が

$$f(x_0) = x_1, f(x_1) = x_2, \dots, f(x_{l-1}) = x_0 \quad (3.4)$$

となっているとき、それぞれの点はすべて最小周期  $l$  を持つ  $l$ -周期点である。以下単に  $l$ -周期点とさえば、最小周期が  $l$  である  $l$ -周期点のこととしよう。

$l$ -周期点は、 $l$  回の繰り返し写像：

$$x(l) = f(x(l-1)) = \underbrace{f(f(f(\dots f(x_0))))}_{l} = f^l(x_0) \quad (3.5)$$

の固定点となっている。このことから、周期点についての性質は固定点の性質の議論から容易に知ることができ。したがって以下固定点の性質を検討しよう。

いま、点  $x_0 \in R^n$  が式 (3.2) の固定点とし、この固定点からの微小変動量 (これを変分という) を  $\xi(k)$  とする：

$$x(k) = x_0 + \xi(k) \quad (3.6)$$

これを式 (3.2) に代入して

$$x(k+1) = x_0 + \xi(k+1) = f(x_0 + \xi(k)) \quad (3.7)$$

を得る。変分  $\xi(k)$  が十分に小さいものとする、右辺をテイラー展開し

$$f(x_0 + \xi(k)) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \xi(k) + \dots = x_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \xi(k) + \dots \quad (3.8)$$

となる。ここで  $\dots$  の項は  $\xi(k)$  の 2 次以上の項を表す。式 (3.7) と (3.8) より の線形部分を取り出すと

$$\xi(k+1) = A\xi(k) \quad (3.9)$$

を得る。ここに

$$A = Df(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \quad (3.10)$$

とおいた。式 (3.9) は固定点  $x_0$  に関する変分方程式 (variational equation) である。また、式 (3.9) を固定点  $x_0$  に関する式 (3.2) の線形化方程式ともいう。

式 (3.9) は線形定係数同次差分方程式となっている。このことから前章で考察した平衡点の場合と同様に、式 (3.10) の行列  $A$  が適当な条件を満たせば式 (3.9) の解の性質によって元の式 (3.2) の固定点の性質を知ることができる。

### 【例 3.1】エノン写像 (1.51) の固定点

式 (1.51) の固定点は

$$x = 1 + y - ax^2, \quad y = bx \quad (3.11)$$

を解いて求められる.  $a \neq 0$ ,  $(b-1)^2 + 4a > 0$  の場合は 2 つあり, それぞれ

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= \left( \frac{b-1 + \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a}, \frac{b(b-1) + b\sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a} \right) \\ (x_2, y_2) &= \left( \frac{b-1 - \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a}, \frac{b(b-1) - b\sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

となる. この点における変分方程式は  $x(k) = x_i + \xi(k)$ ,  $y(k) = y_i + \eta(k)$ ,  $i = 1, 2$  とすれば,

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= -2ax_i\xi(k) + \eta(k) \\ \eta(k+1) &= b\xi(k) \end{aligned} \quad (3.13)$$

となる. ■

## 3.2 線形定係数同次差分方程式

### 3.2.1 同次方程式の基本解

式 (3.9) を改めて書き直し, 方程式

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (3.14)$$

について考えよう. 式 (3.14) の解とは, ある時刻 (これは一般性を失うことなく  $k=0$  と仮定してよい) に与えられた初期値を出発し, 各時刻でこれらの式を満足する関数のことである. いま, 初期条件として  $k=0$  において  $x(0) = x_0$  を満たす解を

$$x(k) = \phi(k, x_0) \quad (3.15)$$

と書くことにしよう. ここに

$$x(0) = \phi(0, x_0) = x_0 \quad (3.16)$$

である.  $k=1, 2, \dots$  と繰り返し式 (3.14) に代入することによって次式を得る.

$$\begin{aligned} x(1) &= \phi(1, x_0) = Ax_0 \\ x(2) &= \phi(2, x_0) = Ax_1 = AAx_0 = A^2x_0 \\ &\dots \\ x(k) &= \phi(k, x_0) = Ax(k-1) = A^kx_0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

したがって, 同次方程式 (3.14) の解は

$$x(k) = \phi(k, x_0) = A^kx_0 \quad (3.18)$$

と求めることができる. さて, 式 (3.18) の解を前章の 2.2 と同様に具体的に計算してみよう. いま, 解として

$$x(k) = \mu^k h \quad (3.19)$$

を仮定し、式 (3.14) に代入すると次式を得る.

$$Ah = \mu h \quad (3.20)$$

したがって、式 (3.19) の形の解を求める問題は式 (3.20) の固有値問題となることが分かる. このことから前章の 2.2 と同様に解析すればよい. たとえば特性根:

$$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\} = \{\mu_i \in C \mid \det(\mu_i I_n - A) = 0\}$$

がすべて相異なる場合は、一般解として

$$x(k) = c_1 \mu_1^k h_1 + c_2 \mu_2^k h_2 + \dots + c_n \mu_n^k h_n \quad (3.21)$$

を得る. ここに、 $c_i$  は任意定数、 $h_i$  は  $\mu_i$  に対する固有ベクトルを表す. これは式 (3.18) の別の表現となっている. また、幾何学的にみると各固有ベクトルは不変部分空間となっている. すなわち、初期値を 1 つの固有ベクトルが張る部分空間:

$$x(0) \in E_i = \{c \in R^n \mid x = ah_i, a \in R\}$$

に選ぶと、解 (3.21) は以後この空間に留まる.

### 【例 3.2】2次元線形方程式の一般解

差分方程式:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= -2ax(k) + y(k) \\ y(k+1) &= -bx(k) \end{aligned} \quad (3.22)$$

の一般解を求めてみよう.

行列  $A$  は

$$A = \begin{bmatrix} -2a & 1 \\ -b & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

したがって、特性方程式は

$$\chi(\mu) = |\mu I_2 - A| = \mu^2 + 2a\mu + b = 0 \quad (3.24)$$

となる. 2 つの特性根について場合を分けて考えよう.

#### (1) 相異なる 2 実根となる, すなわち $a^2 > b$ の場合

特性根は

$$\mu_1 = -a + \sqrt{a^2 - b}, \quad \mu_2 = -a - \sqrt{a^2 - b} \quad (3.25)$$

となるので、それぞれの固有ベクトルは次式より求めることができる.

$$\begin{aligned} Ah = \mu_1 h, [A - \mu_1 I_2] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 0 &\Rightarrow \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a + \sqrt{a^2 - b} \end{bmatrix} \\ Ah = \mu_2 h, [A - \mu_2 I_2] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 0 &\Rightarrow \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a - \sqrt{a^2 - b} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.26)$$

したがって、一般解は

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = c_1 \left(-a + \sqrt{a^2 - b}\right)^k \begin{bmatrix} 1 \\ a + \sqrt{a^2 - b} \end{bmatrix} + c_2 \left(-a - \sqrt{a^2 - b}\right)^k \begin{bmatrix} 1 \\ a - \sqrt{a^2 - b} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

となる。

### (2) 2つの特性根が複素共役根となる、すなわち $a^2 < b$ の場合

2つの特性根は複素共役：

$$\mu_1 = -a + j\sqrt{b - a^2}, \quad \mu_2 = -a - j\sqrt{b - a^2}, \quad j = \sqrt{-1} \quad (3.28)$$

となるので、1つの根に対する複素固有ベクトルを求め、その実部および虚部のベクトルが基本解となる。これを求めよう。

$$Ah = \mu_1 h, \quad \left[A - \left(-a + j\sqrt{b - a^2}\right) I_2\right] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a + j\sqrt{b - a^2} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

したがって、1つの複素基本解は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} &= \left(-a + j\sqrt{b - a^2}\right)^k \begin{bmatrix} 1 \\ a + j\sqrt{b - a^2} \end{bmatrix} = \left(\sqrt{b}e^{-j\theta}\right)^k \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{b}e^{j\theta} \end{bmatrix} \\ &= \left(\sqrt{b}\right)^k \begin{bmatrix} e^{-jk\theta} \\ e^{-j(k-1)\theta} \end{bmatrix} = \left(\sqrt{b}\right)^k \begin{bmatrix} \cos k\theta - j \sin k\theta \\ \cos(k-1)\theta - j \sin(k-1)\theta \end{bmatrix} \\ &= \left(\sqrt{b}\right)^k \begin{bmatrix} \cos k\theta \\ \cos(k-1)\theta \end{bmatrix} - j \left(\sqrt{b}\right)^k \begin{bmatrix} \sin k\theta \\ \sin(k-1)\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.30)$$

これより、一般解は

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = c_1 \left(\sqrt{b}\right)^k \begin{bmatrix} \cos k\theta \\ \cos(k-1)\theta \end{bmatrix} + c_2 \left(\sqrt{b}\right)^k \begin{bmatrix} \sin k\theta \\ \sin(k-1)\theta \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

となる。ここに

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{b - a^2}}{a}$$

とおいた。

### (3) 重根となる、すなわち $a^2 = b$ の場合

特性根は

$$\mu_1 = \mu_2 = -a \quad (3.32)$$

となる。そこで、べき零行列  $N$  は

$$\begin{aligned} N &= A - \mu_1 I_2 = A + aI_2 = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -a^2 & a \end{bmatrix} \\ N^2 &= 0, \quad AN = NA \end{aligned} \quad (3.33)$$

となる。この場合は行列のべき乗を直接計算して次式を得る。

$$A^k = (-aI_2 + N)^k = (-a)^k I_2^k + k(-a)^{k-1}N = (-a)^k \begin{bmatrix} 1+k & \frac{k}{a} \\ -ak & 1-k \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

したがって、一般解は

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = (-a)^k \begin{bmatrix} 1+k & \frac{k}{a} \\ -ak & 1-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1(-a)^k \begin{bmatrix} 1+k \\ -ak \end{bmatrix} + c_2(-a)^k \begin{bmatrix} \frac{k}{a} \\ 1-k \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

となる。 ■

### 3.2.2 線形写像としての性質

差分方程式 (3.14) は見方を変えると、初期値に線形写像  $A$  を次々に作用させて点列を生成してゆく過程を表す公式と考えられる。あるいはまた、平面内の初期値の集合をそっくり  $A$  で写すともみることが出来る。この場合写像の性質は、まず  $A$  が向きを保つ変換であるかどうかによって異なったものとなる。

$A$  が状態空間の向きを保つ変換となるのは、

$$\det(A) > 0 \quad (3.36)$$

の場合である。また、向きを反転するのは

$$\det(A) < 0 \quad (3.37)$$

の場合である。なお、

$$\det(A) = 0 \quad (3.38)$$

の場合は  $\text{rank } A$  次元の部分空間への写像となる退化した場合である。

なお、状態空間の体積要素を  $V$  とすれば、1回の写像で  $V$  は

$$V_1 = \det(A)V \quad (3.39)$$

に写される。したがって

$$|\det(A)| < 1 \quad (3.40)$$

の性質を持つ写像  $A$  は体積縮小型写像である。

## 【例 3.3】例 3.2 の差分方程式

例 3.2 の差分方程式を定義する線形写像  $A$  は

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} -2a & 1 \\ -b & 0 \end{bmatrix} = b \quad (3.41)$$

より,  $b > 0$  の場合向きを保つ写像,  $b < 0$  の場合向きを反転する写像となる.  $b = 0$  の場合は, 式 (3.22) から分かるように, 与えた初期状態は 1 回の写像で  $y = 0$  すなわち  $x$  軸に落ち, その後  $x$  軸上を

$$x(k+1) = -2ax(k) \quad (3.42)$$

に従って運動する. また,  $|b| < 1$  のときは, 面積縮小型写像となる. ■

## 3.3 固定点の位相的分類

固定点に関して位相幾何学的な分類を考えよう. これは以下の章で問題となる周期運動の安定性や分岐問題において重要な役割を果たす.

いま,  $x_0 \in R^n$  を式 (3.2) の 1 つの固定点とし, この点におけるヤコビ行列を式 (3.10) とする. また, この行列  $A = Df(x_0)$  の特性方程式を

$$\chi(\mu) = \det(\mu I_n - Df(x_0)) = \mu^n + a_1\mu^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mu + a_n = 0 \quad (3.43)$$

とし, 特性根を

$$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\} = \{\mu_i \in C \mid \det[\mu_i I_n - Df(x_0)] = 0\} \quad (3.44)$$

とする. 以下, 特性根には零根はないものとしておく. 零根があれば, 前節で述べたように写像  $A$  が退化してしまうからである.

固定点  $x_0$  は次の条件を満たすとき, **双曲的** (hyperbolic) または **単純** (simple) であるという.

**固定点が双曲的である条件**

係数行列  $A$  のすべての特性根について

$$\mu_i \neq 0, \quad |\mu_i| \neq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.45)$$

この条件は, 基本解が時刻の進展に従って増大するか, あるいは減少する関数の重ね合わせによって構成されていることを意味している.

さて, 双曲型固定点に出入りする解の作る曲面 (多様体) を定義しよう. このため, 双曲型固定点において  $|\mu_i| > 1$  となる  $\mu_i$  の一般化された固有空間の直和と  $R^n$  の共通部分を, **不安定部分空間** と呼び  $E^u$  と書くことにする. 同様に  $|\mu_i| < 1$  となる  $\mu_i$  の一般化された固有空間の直和と  $R^n$  の共通部分を, **安定部分空間** と呼び  $E^s$  と書くことにする. また, 自律系 (3.2) の  $k = 0$  において初期値  $u \in R^n$  を通る解を

$$x(k) = \varphi(k, u) \quad (3.46)$$

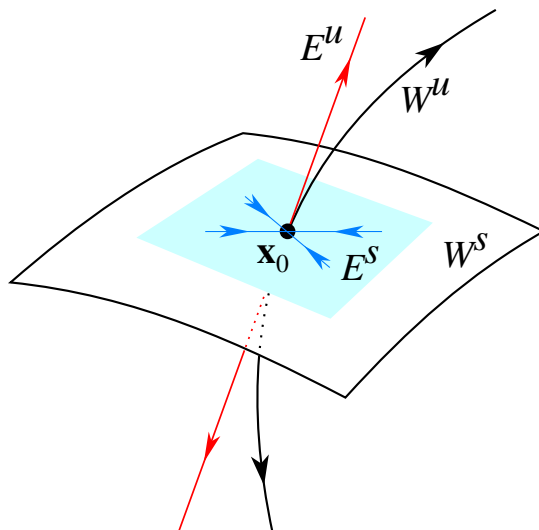


図 3.1 双曲型固定点近傍の幾何学的構造.

と書くことにしよう. ここに,  $x(0) = \varphi(0, u) = u$  である. そこで集合

$$\begin{aligned} W^u(x_0) &= \{u \in R^n \mid \lim_{k \rightarrow -\infty} \varphi(k, u) = x_0\} \\ W^s(x_0) &= \{u \in R^n \mid \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k, u) = x_0\} \end{aligned} \tag{3.47}$$

を考えよう. これらは, それぞれ双曲型固定点  $x_0$  の不安定および安定多様体と呼ばれている. この2つの集合は状態空間内にあり, 時間が経過するにしたがって固定点から遠ざかる, あるいは近づく初期値の集合である. また, 点  $x_0$  での線形化を行えば, 上で定義した不安定部分空間  $E^u$  と安定部分空間  $E^s$  が得られる. これらの部分空間は点  $x_0$  の接空間を張っていることに注意しよう. 図 3.1 参照. 実際次の性質がある.

**双曲型固定点の安定・不安定多様体の性質**

$$\begin{aligned} (a) \quad \dim E^u &= \#\{\mu_i \in C \mid |\mu_i| > 1\} \\ (b) \quad \dim E^s &= \#\{\mu_i \in C \mid |\mu_i| < 1\} \\ (c) \quad E^u \oplus E^s &= R^n, \quad W^u(x_0) \cap W^s(x_0) = x_0 \end{aligned} \tag{3.48}$$

ここに  $\#\{ \}$  は集合の要素の数を表す.

したがって, 双曲型固定点となる場合は, 線形近似  $A$  により, 固定点の近傍の性質を調べることができる. これをハートマン (Hartman) とグローブマン (Grobman) の定理という.

さて, 2つの双曲型固定点が位相幾何学的に同じ性質を持つための条件を考えよう. これには次の3つの性質を合わせて考えなければならない.

- (1) まず, 写像  $A$  が向きを保つかあるいは反転するかということ. すなわち,

$$\det A$$



の符号がどうなるかということ.

- (2) 次に, 不安定と安定部分空間に制限した場合の写像  $A$  の向きがそれぞれどうなるかということ. すなわち,

$$L^u = A|_{E^u} = Df(x_0)|_{E^u}, \quad L^s = A|_{E^s} = Df(x_0)|_{E^s} \quad (3.49)$$

とおいたとき,

$$\det L^u, \quad \det L^s$$

の符号がどうなるかということ.

- (3) そして最後に, 不安定および安定部分空間の次元がどうなるかということ. すなわち,

$$\dim W^u(x_0) = \dim L^u$$

の値がどうなるかということ.

上の条件のうち, 不安定部分空間と安定部分空間に関係した (2) と (3) の性質は, 式 (3.48) から各部分空間の直和が全体の状態空間の接空間となっているので, 不安定あるいは安定部分空間のどちらかを考えると他方は自動的に決まってしまう. したがって以下, 不安定部分空間をとりあげて条件を考えることにしよう.

そこでまず, 部分空間の向きが保たれるか否かで名前をつけておこう.

#### **$D$ 型部分空間と $I$ 型部分空間**

- (1)  $\det L^u > 0$  のとき  **$D$  型不安定部分空間** (directly unstable subspace) を持つという.
- (2)  $\det L^u < 0$  のとき  **$I$  型不安定部分空間** (inversely unstable subspace) を持つという.
- (3)  $\det L^s > 0$  のとき  **$D$  型安定部分空間** (directly stable subspace) を持つという.
- (4)  $\det L^s < 0$  のとき  **$I$  型安定部分空間** (inversely stable subspace) を持つという.

さて, 写像  $A$  が向きを保つ場合考えよう.

#### **向きを保つ双曲型固定点の位相的分類**

双曲型固定点はその不安定多様体 (または同じことであるが安定多様体) の次元が異なる毎に, その位相幾何学的性質が異なる. いま,

$$\dim W^u(x_0) = m \quad (3.50)$$

としよう. 向きを保つことから

$$\det A = \det L^u \det L^s > 0 \quad (3.51)$$

となっている. したがって,  $\det L^u > 0$  となる固定点を  $m$  次元不安定な  $D$  型固定点,  $\det L^u < 0$  となる固定点を  $m$  次元不安定な  $I$  型固定点と呼ぶことにして, それぞれ  ${}_mD$  および  ${}_mI$  と記すことにしよう. ここでは固定点の記号の左下付き添字に不安定次元を記すこととした. 式 (3.51) の性質から,  $m=0$  と  $m=n$  場合には  $D$  型固定点しか存在しない. その他の場合には  $D$  型と  $I$  型が考えられる. したがって位相的に性質の異なる固定点は, 全部で次の  $2n$  個となる.

$${}_mD, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n; \quad {}_mI, \quad m = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.52)$$

表 3.1 2次元写像の双曲型固定点のタイプ.

固定点のタイプ	記法	特性根の条件
完全安定 (completely stable)	${}_0D$	$ \mu_1  < 1,  \mu_2  < 1$
正不安定 (directly unstable)	${}_1D$	$0 < \mu_1 < 1 < \mu_2$
逆不安定 (inversely unstable)	${}_1I$	$\mu_1 < -1 < \mu_2 < 0$
完全不安定 (completely unstable)	${}_2D$	$ \mu_1  > 1,  \mu_2  > 1$

表 3.2 3次元写像の双曲型固定点のタイプ.

固定点のタイプ	記法	特性根の条件
完全安定 (completely stable)	${}_0D$	$ \mu_1  < 1,  \mu_2  < 1,  \mu_3  < 1$
1次元正不安定 (directly unstable)	${}_1D$	$ \mu_1  < 1,  \mu_2  < 1, 1 < \mu_3$
1次元逆不安定 (inversely unstable)	${}_1I$	$\mu_1 < -1, -1 < \mu_2 < 0, 0 < \mu_3 < 1$
2次元正不安定 (directly unstable)	${}_2D$	$0 < \mu_1 < 1, 1 <  \mu_2 , 1 <  \mu_3 $
2次元逆不安定 (inversely unstable)	${}_2I$	$\mu_1 < -1, -1 < \mu_2 < 0, 1 < \mu_3$
完全不安定 (completely unstable)	${}_3D$	$ \mu_1  > 1,  \mu_2  > 1,  \mu_3  > 1$

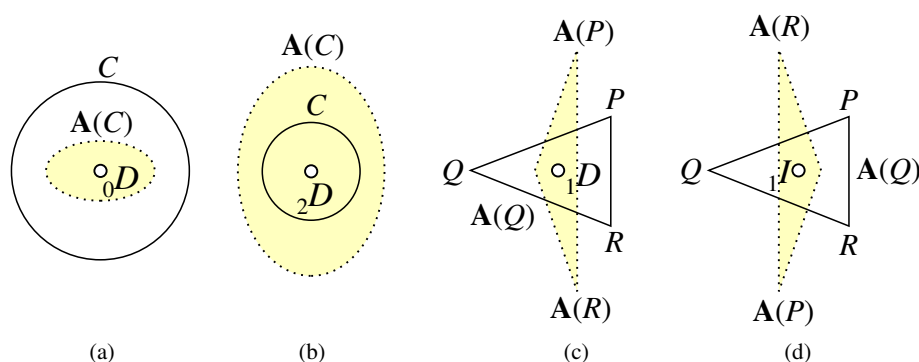


図 3.2 2次元双曲型固定点の4つのタイプ.

**【例 3.4】 2次元および3次元写像の双曲型固定点のタイプ**

それぞれの場合の固定点のタイプを表 3.1 および表 3.2 に示した. なお, 完全安定固定点を沈点 (sink), 完全不安定固定点を源点 (source), その他の固定点を単にサドル (saddle) と呼ぶことが多い.

また、2次元の場合の固定点近傍の写像による点の写される様子を模式的に図示すると、図 3.2 となる。

■

### 固定点の型と特性方程式の係数との関係

特性方程式 (3.43) の係数と固定点の型の間関係をみておこう。固定点の分類は、特性根が複素平面上で単位円の外に何個あるか、またそのうち  $(-\infty, -1)$  の実軸上に何個あるか (奇数個か偶数個か) によってなされたと考えてよい。そこで各型に対応して、特性方程式の係数が満たす条件を調べればよい。これは、線形離散システムの安定性を調べる際に用いられるラウスの表 (Routh array) やシュアー・コーン (Schur-Cohn) の基準から得られる。ただ次元が高い場合は、条件が煩雑になり使いづらい。直接数値的に固定点の型を求めるほうが楽である。ここでは 2, 3 の簡単な性質をみるにとどめる。

(1) 写像  $A$  が向きを保つことから

$$\det A = (-1)^n a_n > 0 \quad (3.53)$$

(2)  $\det L^u$  の符号については、実軸上  $(-\infty, -1)$  の特性根の個数が奇数か偶数かをみればよい。これは  $\chi(-1)$  の符号を調べるとよい。すなわち

(a) 状態空間の次元  $n$  が偶数のとき

(a-1)  $\chi(-1) > 0$  ならば  $\mu < -1$  となる実根の個数は偶数個、したがって、 $\det L^u > 0$  すなわち  $D$  型である。

(a-2)  $\chi(-1) < 0$  ならば  $\mu < -1$  となる実根の個数は奇数個、したがって、 $\det L^u < 0$  すなわち  $I$  型である。

(b) 状態空間の次元  $n$  が奇数のとき

(b-1)  $\chi(-1) > 0$  ならば  $\mu < -1$  となる実根の個数は奇数個、したがって、 $\det L^u < 0$  すなわち  $I$  型である。

(b-2)  $\chi(-1) < 0$  ならば  $\mu < -1$  となる実根の個数は偶数個、したがって、 $\det L^u > 0$  すなわち  $D$  型である。

### 2次元写像の固定点の型と特性方程式の係数との関係

特性方程式を次式としよう。

$$\chi(\mu) = \mu^2 + a_1\mu + a_2 = 0 \quad (3.54)$$

直接計算して表 3.3 を得る。表 3.3 の条件を満たす式 (3.54) の係数の範囲を  $(a_1, a_2)$ -平面上に示すと図 3.3 の範囲が得られる。

次に、写像  $A$  が向きを反転する場合みておこう。

### 向きを反転する双曲型固定点の位相的分類

この場合は、写像  $A$  が向きを反転する条件

$$\det A = \det L^u \det L^s < 0 \quad (3.55)$$

表 3.3 2次元双曲型固定点のタイプと特性方程式の係数との関係.

固定点のタイプ	記法	特性方程式の係数の満たすべき条件
完全安定 (completely stable)	${}_0D$	$0 < \chi(1)\chi(-1), 0 < a_2 < 1$
正不安定 (directly unstable)	${}_1D$	$\chi(1) < 0, 0 < \chi(-1), 0 < a_2$
逆不安定 (inversely unstable)	${}_1I$	$\chi(-1) < 0, 0 < \chi(1), 0 < a_2$
完全不安定 (completely unstable)	${}_2D$	$0 < \chi(1)\chi(-1), 1 < a_2$

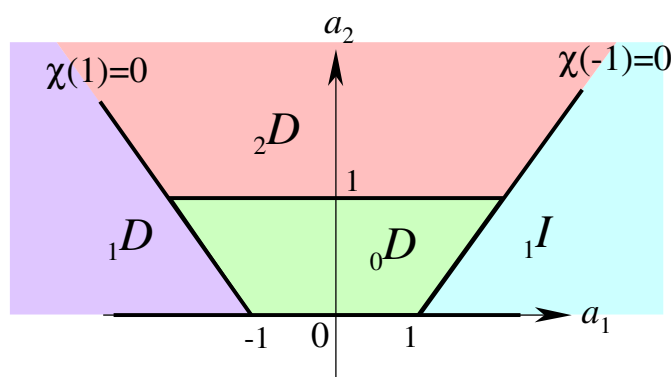


図 3.3 2次元双曲型固定点のタイプと特性方程式の係数の満たすべき条件.

を考えて, これまでと同様な話を繰り返せばよい. 結果は次の  $2n$  個の固定点の型を得る.

$${}_mRD, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n - 1; \quad {}_mRI, \quad m = 1, 2, \dots, n \tag{3.56}$$

ここに, 向きを反転する (reverse) 意味で  $R$  を付した.

なお本書では, 向きを反転する写像の話は特別な例を除いて問題にしないのでこれ以上立ち入らないことにする.

**【例 3.5】ロジスティック写像とエノン写像**

第1章の例 1.3, 1.8 で示したロジスティック写像 (1.28) は, 右辺の関数が

$$f(x) = \alpha_0(1-x)x = -\alpha_0 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\alpha_0}{4} \tag{3.57}$$

であるから,  $\alpha_0 > 0$  とすると  $x > 1/2$  の領域で向きを反転する写像となる.

またエノン写像 (1.59) のヤコビ行列は (1.60) であるから  $b > 0$  のとき, 向きを反転する写像である.



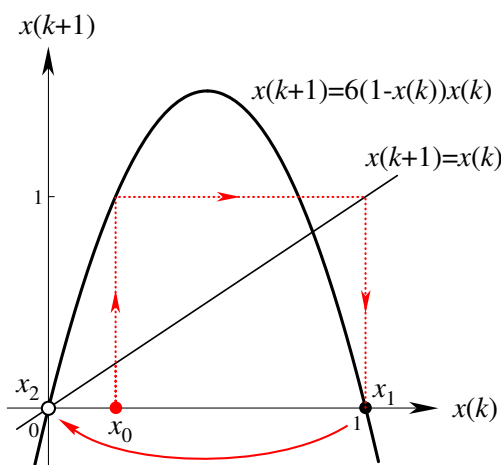


図 3.4 最終的に固定点に落ち込む解の例.

### 3.4 固定点の安定性

連続系の平衡点と同様に，固定点に関して局所的にその安定性を定義することができる．離散時間系 (3.2) の固定点  $x_0$  がリヤプーノフの意味で安定であるとは，任意の正の実数  $\epsilon > 0$  に対して，正の実数  $\delta > 0$  があって  $\|u - x_0\| < \delta$  を満足する  $u \in R^n$  を初期値とする解  $x(k) = \varphi(k, u)$  は，すべての  $k \geq 0$  に対して定義され  $\|\varphi(k, u) - x_0\| < \epsilon$  となる場合をいう：

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \|\forall u - x_0\| < \delta, \forall k \geq 0, \|\varphi(k, u) - x_0\| < \epsilon \tag{3.58}$$

また，固定点  $x_0$  が**漸近安定** (asymptotic stable) であるとは，次の 2 つの条件を満たす場合をいう．

- (1)  $x_0$  はリヤプーノフの意味で安定である．
- (2)

$$\exists \epsilon > 0, \|\forall u - x_0\| < \epsilon, \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k, u) = x_0 \tag{3.59}$$

安定でない固定点を不安定という．双曲型の固定点は，不安定であるか漸近安定であるかのいずれかに限られる．

なお，離散系の場合は運動が写像によって定義されていることから，逆写像を持たない系では，たとえ不安定な固定点であっても解がある時刻でちょうどこの不安定な固定点に帰ってくることもある．次にこの 1 例を示しておく．

#### 【例 3.6】ロジスティック写像の例

例 3.5 でみたロジスティック写像を再び取りあげよう．いま

$$x(k+1) = 6(1-x(k))x(k) \tag{3.60}$$

を考える．図 3.4 に示したように， $x = 1$  を通る解はつぎの時刻で不安定な原点に到達する．この解は**最終的に固定点になる解**と呼ばれている． ■

## 3.5 本章のまとめと文献

### 3.5.1 本章のまとめ

1. 差分方程式の解は写像を繰り返し作用させることで得られる.
2. 1回の写像で動かない点を固定点という.  $\ell$ 回の写像で初めて元の点に戻ってくる点を  $\ell$ -周期点という.
3. 固定点の性質は一般に変分方程式を調べることで知ることができる. 変分方程式は線形定係数同次差分方程式である.
4. 特性根の絶対値が1にもまた零にも等しくない固定点を双曲的であるという. 双曲型固定点には不安定多様体と安定多様体が入り込んでいる.
5. 向きを保つ写像の双曲型固定点は,  $n$ 次元系の場合, 全部で  $2n$ 種類の位相的に性質の異なる固定点に分類される.
6. 固定点についても安定といえりヤプーノフの意味で安定な場合のことである. 漸近安定な固定点は近傍の点を引き寄せる.
7. 物理的には安定な固定点や周期点が系の安定な定常状態に対応することから第一に注目される. 非線形系では複数の安定状態が存在することも珍しくないため, このような状況では不安定な固定点や周期点の安定・不安定多様体が状態空間内でどのような幾何学的形状となっているかが大域的性質を決定する. そのことから不安定固定点や周期点に関する情報が極めて重要となる. この点が線形系の解析では安定固定点のみに着目すればよかつたことと事情が異なる.

### 3.5.2 本章の文献

離散時間系の固定点について, その位相幾何学的分類を述べた. この分類については, 紹介してある教科書があまり見あたらない. 2次元の場合については Levinson[P8]がよく引用されている, たとえば南雲・古屋 [N7]. 一般の次元に対しては白岩の文献 [P11]がある. ロシアではネイマルクの本 [D18]に位相的分類の紹介がある.

計算機により差分方程式を解いて点列を追跡すると, 差分方程式の解の振る舞いを直感的に把握できる. このことについては, たとえば川上・上田 [E3] 参照.

## 3.6 練習問題 3

- 3.1  $x_0 \in R^n$  を式 (3.2) の  $\ell$ -周期点とする. この  $\ell$ -周期点に関する変分方程式は次式で与えられることを示せ.

$$\xi(k + \ell) = A\xi(k) \quad (3.61)$$

ここに,

$$A = D^\ell f(x_0) = \prod_{i=0}^{\ell-1} Df(x_i) \quad (3.62)$$

ただし,  $x_i$  は式 (3.4) で与えられる:

$$f(x_0) = x_1, f(x_1) = x_2, \dots, f(x_{\ell-1}) = x_0 \quad (3.63)$$

- 3.2 「うわさ」は人から人へと伝わってゆく間に内容が変わりやすい. その簡単なモデルを考えてみよう. いま, 「K さんが結婚した」という話を次の友人に伝えるときに, 前の人から聞いたとおりの話す確率を 95%, 聞いたのと反対の話に変えて伝える確率を 5% としよう.  $k$  番目に話を聞く人が正しい話「K さんが結婚した」を聞く確率を  $x(k)$ , 逆に誤った話「K さんはまだ独身だ」を聞く確率を  $y(k)$  としよう. うわさの伝わる式を求め, 定常状態すなわち固定点を計算せよ. また, このモデルの特徴を特性根と合わせて示せ.
- 3.3 表 3.3 に示した位相的タイプと特性方程式の係数の関係式を導け.
- 3.4 向きを反転する 2 次元写像の位相的タイプと特性方程式の係数の関係を求め, 図 3.3 にならって係数の平面内に範囲を図示せよ.
- 3.5 **例 3.1** で求めたエノン写像の固定点について, パラメータ  $a, b$  を変化させたときにみられる位相的タイプを調べよ.
- 3.6 次の差分方程式の固定点を求め, その位相的タイプを調べよ.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= y(k) + ax(k) \\ y(k+1) &= x^2(k) + b \end{aligned} \quad (3.64)$$

### プログラミング演習問題

- 3.1 1 次元あるいは 2 次元離散系の解を図示するプログラムをつくれ. 写像を繰り返し作用させるをそのままプログラムすればよい. 初期値やパラメータが変えられるように工夫してみよう.

## 第 4 章

# 周期振動

この章では、連続時間系に見られる周期振動すなわち微分方程式の周期解の解析に必要な事柄を述べる。用語の使い方として、運動、振動、解などはこれまでもあまり区別せずに使ってきた。今後もほとんど同義語として使うことにしたい。周期運動についてはポアンカレに始まる離散化による解析方法が有効である。このことを述べ、そのあと周期解の変分系として周期係数を持つ線形同次方程式の解の性質に関するフロケ・リヤプーノフの結果を述べる。この結果は周期解の近傍の解の性質を知る上で本質的役割を演じる。最後に周期振動の位相的分類と安定性を検討する。これは前章で述べた離散時間系の固定点や周期点の分類とまったく同様に検討できる。

周期振動の近似計算や数値計算については続く第 5, 6 章で考察する。

### 4.1 周期振動とポアンカレ写像

#### 4.1.1 自律系の周期振動

これまでのように状態空間を  $R^n$  とし、状態速度が次式で与えられる力学系を考える。

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.1)$$

ここに、 $t$  は時刻を表す実数であり  $t \in R$ 、 $x$  は状態を表す  $x \in M \subset R^n$ 。また、状態の時間に関する微分は上付きドットで表した。右辺を定義している写像（状態速度ベクトル）：

$$f: M \rightarrow R^n; x \mapsto f(x)$$

は連続でかつ必要な回数だけ微分可能な性質を持つと仮定しよう。言い換えると、すべての初期値に対して解の存在と一意性が満たされ、かつ解は未来と過去に延長可能であるとする。

式 (4.1) の周期解とは、ある正数  $L$  があって

$$x(t+L) = x(t), \quad \forall t \in R \quad (4.2)$$

の性質を持つ解のことである。正数  $L$  をこの周期解の周期という。  $L$  が周期ならば、 $2L, 3L, \dots$  も周期である。通常最小の周期を単に周期という。以後問題とならない限り、周期といえば最小周期を意味



するものとしよう。なお、平衡点は自明な周期解で、任意の正数  $L$  を周期として持つ。以下、断らない限り周期解といえば平衡点以外の周期解を意味するものとしよう。

いま、式 (4.1) の解を

$$x(t) = \varphi(t, x_0), \quad x(0) = \varphi(0, x_0) = x_0 \quad (4.3)$$

と書くことにする。式 (4.2) の周期解があったとして、初期値  $x_0$  をこの解となるように選んだとしよう。すると解 (4.3) は周期解を表し、式 (4.2) の周期性の性質は

$$x(L) = \varphi(L, x_0) = x(0) = x_0 \quad (4.4)$$

と書くこともできる。つまり、この式を満足する正数  $L$  と初期値  $x_0$  を持つ解があれば、それは周期解である。状態空間内での集合：

$$\gamma(x_0) = \{x \in R^n \mid x(t) = \varphi(t, x_0), \quad t \in [0, L]\} \quad (4.5)$$

を**周期軌道** (periodic orbit) または**閉軌道** (closed orbit) という。周期軌道上の任意の初期値を出発する解は、式 (4.4) の性質を持つ。

一般に周期解に限らず、解 (4.3) の軌跡を**軌道** (orbit) という。これを

$$\gamma(x_0) = \{x \in R^n \mid x(t) = \varphi(t, x_0), \quad t \in R\} \quad (4.6)$$

と書くことにする。未来へ延長した解からなる軌道：

$$\gamma^+(x_0) = \{x \in R^n \mid x(t) = \varphi(t, x_0), \quad t \in [0, \infty)\} \quad (4.7)$$

を**正の半軌道** (positive semi-orbit)、過去へ延長した解からなる軌道：

$$\gamma^-(x_0) = \{x \in R^n \mid x(t) = \varphi(t, x_0), \quad t \in (-\infty, 0]\} \quad (4.8)$$

を**負の半軌道** (negative semi-orbit) ということがある。もちろん

$$\gamma(x_0) = \gamma^+(x_0) \cup \gamma^-(x_0) \quad (4.9)$$

となっている。解の一意性から軌道は、平衡点以外の点では、決して交わることはない。

周期  $L$  の周期解の近傍に別の周期解が存在しないとき、つまり孤立した周期解となっているとき、この周期解を**極限閉軌道** (リミット・サイクル, limit cycle) という。散逸系の周期解は大抵の場合、リミット・サイクルとなる。

#### 【例 4.1】リミット・サイクルを持つ 2 次元系

例題のための人工的方程式のように見えるが次の力学系を考えよう。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \delta(A^2 - x^2 - y^2)x \\ \dot{y} &= -x + \delta(A^2 - x^2 - y^2)y \end{aligned} \quad (4.10)$$

まず、 $\delta = 0$  の場合、単振動の方程式となるので、解

$$x(t) = R \cos(t + \theta), \quad y(t) = -R \sin(t + \theta) \quad (4.11)$$

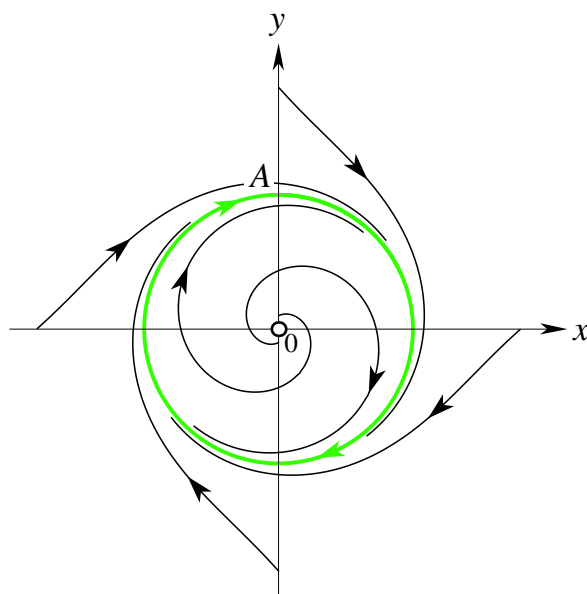


図 4.1 式 (4.10) の相平面図.

を持っている. ここに,  $R$  と  $\theta$  は任意の正定数である. さて,  $\delta \neq 0$  の場合,  $R$  と  $\theta$  を時間の関数と考え, 式 (4.11) を極座標への座標変換  $(x, y) \mapsto (R, \theta)$  とみて,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{R} \cos(t + \theta) - R(1 + \dot{\theta}) \sin(t + \theta) \\ \dot{y} &= -\dot{R} \sin(t + \theta) - R(1 + \dot{\theta}) \cos(t + \theta) \end{aligned} \quad (4.12)$$

の関係式を使って  $R$  と  $\theta$  に関する方程式を導くと, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \delta(A^2 - R^2)R \\ \dot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

したがって, 位相については  $\theta(t) = \theta_0$  (一定) となり, 振幅  $R$  については  $\delta > 0$  の場合,  $0 < R < A$  では  $\dot{R} > 0$ ,  $A < R$  では  $\dot{R} < 0$  となるので,  $R = 0$  が不安定な,  $R = A$  が安定な平衡点となっている. このことから式 (4.10) はリミット・サイクル

$$x(t) = A \cos(t + \theta_0), \quad y(t) = -A \sin(t + \theta_0) \quad (4.14)$$

を持つ. また, 原点は不安定な平衡点である. 原点以外の初期値から出発する軌道は, 時間が経つとリミット・サイクル (4.14) に漸近することも分かる. なお, このリミット・サイクル上では, 位相が一定となり変化しないことに注意しよう. すなわち, リミット・サイクル (4.14) は振幅については漸近安定であるが, 位相についてはそうでない. 後にも見るように, この性質は一般のリミット・サイクルについても言えることである. これを**軌道安定** (orbitally stable) であるという. 相平面図を図 4.1 に示した.

式 (4.10) に関連して, 方程式

$$\ddot{x} - \epsilon(A^2 - x^2 - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0 \quad (4.15)$$

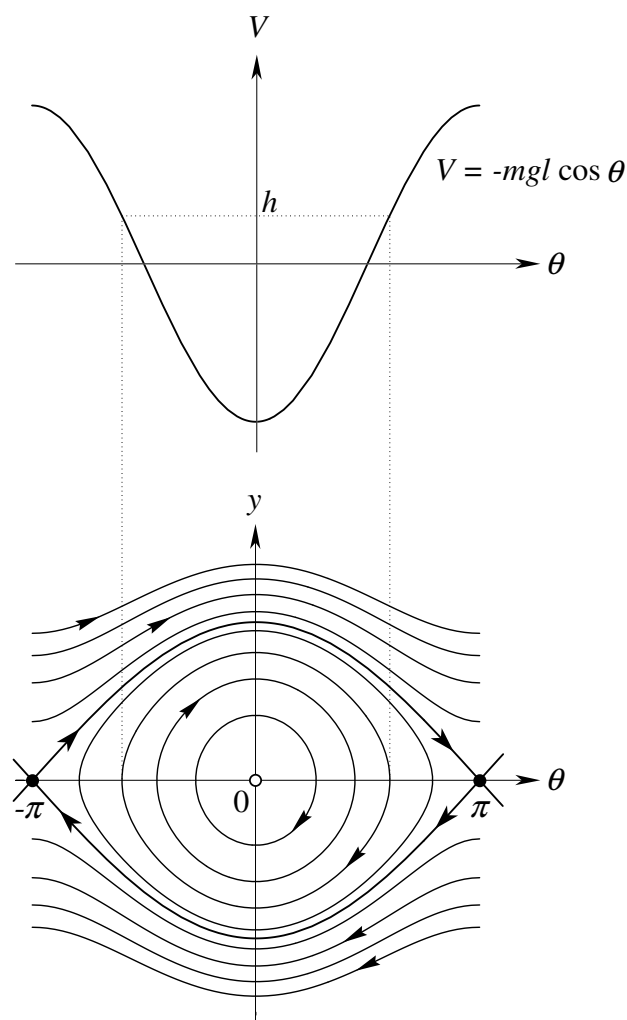


図 4.2 原点を取り巻く周期解とシリンダーに巻き付く周期解.

も，式 (4.14) をリミット・サイクルとして持つ．更に第 1 章の例 1.2 で述べたファン・デア・ポールの方程式：

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (4.16)$$

やレーリーの方程式：

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0 \quad (4.17)$$

も定性的に同じような性質を持っている．すなわち軌道安定なリミット・サイクルを 1 つ持つ． ■

#### 【例 4.2】単振り子の周期運動

例 1.1, 1.5, 1.6, 2.7 で取りあげた摩擦のない単振り子の周期振動を考えよう．シリンダー相曲面内でこの系の運動は，安定な平衡点とサドル，およびサドルに出入りする安定および不安定曲線を除くと，すべて周期振動となっている．このことをエネルギー関数 (1.65) を用いて定性的にみてみよう．

(1) 全エネルギー  $h$  が  $0 < h < mgl$  を満たす場合 :

$$H(p, \theta) = \frac{p^2}{2m\ell^2} - mgl \cos \theta = h < mgl \quad (4.18)$$

より, この曲線は  $(\theta, p)$  平面内で

$$|\theta| \leq \cos^{-1} \frac{h}{mgl}, \quad |p| \leq \sqrt{2m\ell^2(h + mgl)} \quad (4.19)$$

に留まる閉曲線となる.

(2) 全エネルギー  $h$  が  $h > mgl$  を満たす場合 :

$$H(p, \theta) = \frac{p^2}{2m\ell^2} - mgl \cos \theta = h > mgl \quad (4.20)$$

より, シリンダーを取り巻く閉曲線 :

$$p = \pm \sqrt{2m\ell^2(h + mgl \cos \theta)} \quad (4.21)$$

となる. いずれの場合もシリンダー曲面で周期軌道 (閉曲線) となっている, 図 4.2 参照. なお, 原点の平衡点は周期軌道によって取り囲まれているので, リヤプーノフの意味で安定であるが漸近安定ではないことに注意しよう. ■

さて, 周期解の安定性を検討するため, 周期解からの変分に関する変分方程式を考えてみよう. いま周期  $L$  の周期解 (4.3) があったとして, この解からの変分を  $\xi(t)$  とする :

$$x(t) = \varphi(t, x_0) + \xi(t) \quad (4.22)$$

式 (4.22) を式 (4.1) に代入して

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\{d\varphi(t, x_0) + \xi(t)\}}{dt} = f(\varphi(t, x_0) + \xi(t)) \quad (4.23)$$

変分  $\xi(t)$  が充分小さいと考えて, 右辺を展開し  $\xi(t)$  の線形項のみを取り出すと, 次式の変分方程式を得る.

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = A(t)\xi(t) \quad (4.24)$$

ここに,  $f$  の微分 (ヤコビ行列) を

$$A(t) = Df(\varphi(t, x_0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t, x_0)) \quad (4.25)$$

とおき,  $\varphi(t, x_0)$  が解であるという性質 :

$$\frac{d\varphi(t, x_0)}{dt} = f(\varphi(t, x_0)) \quad (4.26)$$

を使って整理した、式 (4.25) の形から分かるように線形同次方程式 (4.24) の係数行列の各要素は、時間の関数であり一般には元の周期解の周期と同じ周期  $L$  を持つ周期関数となる。すなわち

$$A(t+L) = A(t), \quad t \in R \quad (4.27)$$

したがって、周期解の安定性を調べるために変分方程式 (4.24) を用いるとすれば、周期係数を持った同次方程式 (4.24) の解の性質を知る必要がある。このことについては次節で考える。

### 4.1.2 ポアンカレ写像

周期解の著しい特徴は、状態が 1 周期毎に元の状態に戻ってくる式 (4.2) の性質である。すなわち周期軌道は、状態空間内で閉曲線となっていて周期解はこの曲線上でのみ運動している。この性質を用いて周期解の近傍の解の様子を幾何学的に考えてみよう。リミット・サイクルに対してこのような幾何学的考察は、特に有効な解析手段であり、前世紀の終わりにポアンカレ (Poincaré) によって提案された手法である。

いま、周期  $L$  の周期解があったとしてこれを式 (4.3) で表したとしよう。このとき、初期値  $x_0$  は周期軌道上どこに取ってもよい。また、周期軌道の近くの解軌道はほぼ周期軌道に平行に走っている。そこでこれらの軌道に横断的な超曲面  $\Pi$  を 1 つ考えて、初期値をこの曲面上に限定して与えることにしよう。すると解曲線と初期値の間に対応関係を定義できる。このことを定式化してみよう。

まず、超曲面  $\Pi$  を関数：

$$q: R^n \rightarrow R; \quad x \mapsto q(x) \quad (4.28)$$

を用いて

$$\Pi = \{x \in R^n \mid q(x) = 0\} \quad (4.29)$$

で定義しよう。いま考えている周期解は点  $x_0 \in \Pi$  でこの超曲面を横切るものとする。すなわち、解

$$x(t) = \varphi(t, x_0) \quad (4.30)$$

が周期解としよう。するとこの周期解と超曲面  $\Pi$  が横断的に交わる条件は

$$\frac{\partial q(x_0)}{\partial x} \cdot f(x_0) = f(x_0) \cdot \text{grad } q(x_0) \neq 0 \quad (4.31)$$

となる。ベクトル場  $f$  と横断的に交わる超曲面は一般に局所的にしか定義できない。式 (4.31) が成り立てば点  $x_0$  の近傍で超曲面が局所的に存在することがいえる。この超曲面  $\Pi$  のことを周期解 (4.30) に関する**局所断面** (local cross section) という。

さて、このような局所断面を適切に選んだとしよう。すると超曲面上の点  $x_0 \in \Pi$  の近傍  $\Delta \subset \Pi$  から  $\Pi$  への写像  $T$  を、解曲線を使って次のように定義することができる。

$$T: \Delta \rightarrow \Pi; \quad x \mapsto \varphi(\tau, x) \quad (4.32)$$

ここに、 $\tau$  は初期値  $x \in \Delta \subset \Pi$  を出発した解  $\varphi(t, x)$  が再び最初に  $\Pi$  と交わるまでの時間を表す。 $\tau$  は  $x$  の関数となっている。この時間  $\tau$  を最初の**帰還時間** (first return time) または単に**帰還時間**とい

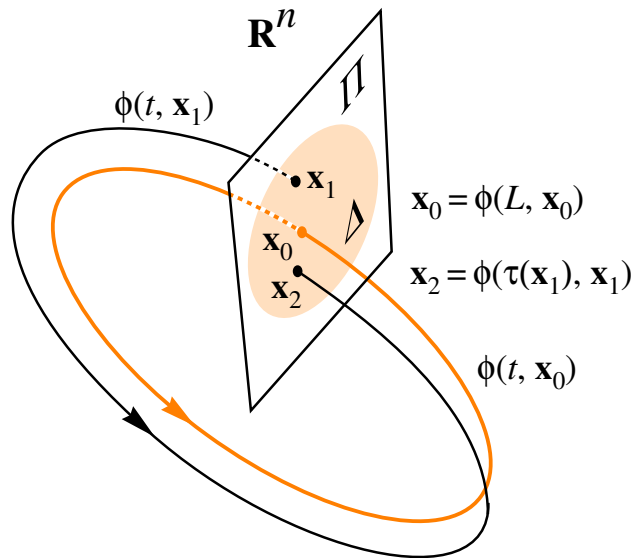


図 4.3 周期解とポアンカレ写像.

う. また, 写像  $T$  は**ポアンカレ写像** (Poincaré map) または**帰還写像** (return map) と呼ばれている. 図 4.3 参照.

写像  $T$  を用いると, 周期解の初期値は

$$T(x_0) = x_0 \tag{4.33}$$

で表される  $T$  の固定点となる. また帰還時間は

$$\tau(x_0) = L \tag{4.34}$$

となり, 周期解の周期となる. したがって, 周期解 (4.30) と写像  $T$  の固定点  $x_0$  の間に 1:1 の対応関係ができる.

以上のことからポアンカレ写像を用いると, 周期解の問題は状態空間の次元が 1 次元小さい局所断面上の離散力学系の問題に換言できることが分かる. このことによって周期解の定性的性質を調べることが容易になる場合が多い. 特に数値計算で周期解を求める場合には有効である.

**【例 4.3】例 4.1 のポアンカレ写像**

**例 4.1** で考えた 2 次元系 (4.10) を取りあげてみよう. 極座標表示では式 (4.13) となる. このことから局所断面  $\Pi$  として動径方向を選べばよいので, これを  $x$  軸に選ぼう.

$$\Pi = \{(x, y) \in R^2 \mid y = 0, x > 0\} \tag{4.35}$$

すると  $x$  軸の初期値  $x_0$  を出発した解は, 式 (4.13) の第 1 式に従って,  $2\pi$  時間後に  $\Pi$  にかえってくる. この点を  $x_1 \in \Pi$  としよう.

さて, 式 (4.13) の第 1 式は積分できて

$$R^2(t) = \frac{A^2}{1 + Ke^{-2\delta A^2 t}} \tag{4.36}$$

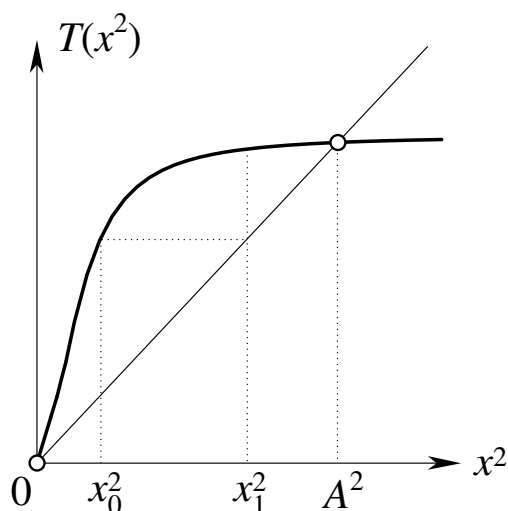


図 4.4 式 (4.37) のポアンカレ写像と安定固定点.

と表すことができる. ここに,  $K$  は積分定数である. この解を用いて,  $R$  と  $x$  座標を同じとみたことから, 初期値  $x_0 \in \Pi$  を代入し整理すると

$$x_1^2 = \frac{A^2 x_0^2}{x_0^2 + (A^2 - x_0^2)e^{-4\pi\delta A^2}} = T(x_0^2) \quad (4.37)$$

を得る. これより  $\Pi$  上のポアンカレ写像  $T$  が定義できる.  $T$  の固定点は  $A^2$  であり, この点における微分係数より  $\delta > 0$  の場合漸近安定となることが分かる. 図 4.4 参照. この例ではポアンカレ写像を具体的に記述できたが, 一般にはほとんどの場合数値的にしか求めることができない. 数値的考察は第 6 章参照. ■

### 4.1.3 周期的非自律系の周期振動

時間に関して周期的な非自律系の周期解を考えよう. すなわち, 状態空間を  $R^n$  とし, 状態速度が次の非自律系となる場合を取りあげよう.

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (4.38)$$

ここに, 速度ベクトル  $f$  は時間に関して周期  $L$  の周期関数とする:

$$f(t+L, x) = f(t, x) \quad (4.39)$$

初期値  $x_0 \in R^n$  を出発する式 (4.38) の解を

$$x(t) = \varphi(t, x_0), \quad x(0) = \varphi(0, x_0) = x_0 \quad (4.40)$$

と書くことにする. 周期  $K$  を持つ式 (4.38) の周期解とは

$$\varphi(t+K, x_0) = \varphi(t, x_0), \quad t \in R \quad (4.41)$$

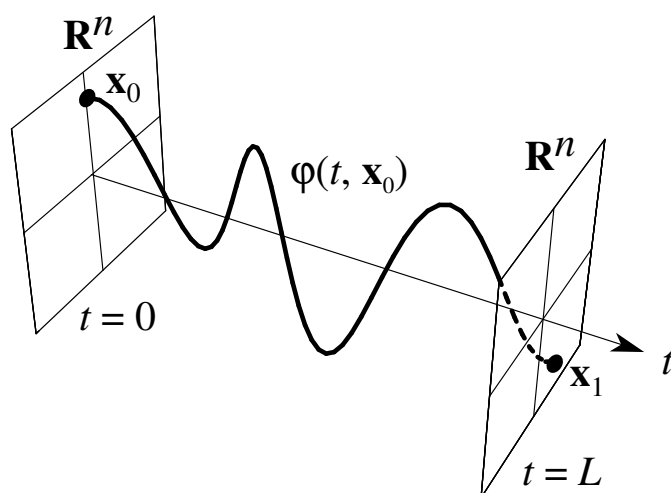


図 4.5 周期的非自律系のポアンカレ写像.

の性質を持つ解のことである。周期  $K$  が  $K = L$  の関係を持つ周期解を**基本調波周期解** (fundamental harmonic solution) あるいは系の**基本調波振動**という。また、 $K = kL$  ( $k$  は正の整数) の関係を持つ周期解を  $1/k$  **分数調波周期解** (subharmonic solution of order  $k$ ) という。

周期的非自律系の解の定性的性質はベクトル場が周期的となる式 (4.39) を用いて前節で定義したポアンカレ写像と同様な写像をうまく定義できる。この場合、断面として状態空間そのものを選ぶことができる。また、写像  $T$  を

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; x_0 \mapsto x_1 = \varphi(L, x_0) \quad (4.42)$$

で定義すればよい。この写像を**ストロボ写像** (stroboscopic mapping) または**時間  $L$  写像** (time  $L$  map) という。図 4.5 参照。この本では、この写像も単に非自律系のポアンカレ写像と呼ぶことにする。勿論写像  $T$  の固定点や周期点が式 (4.38) の基本調波周期解や分数調波周期解に対応する。

#### 【例 4.4】ダフティング (Duffing) 方程式

非線形バネで吊るされた質点の 1 次元運動や非線形インダクタを含む共振回路などのモデルとしてダフティング方程式：

$$\ddot{x} + k\dot{x} + f(x) = B \cos t \quad (4.43)$$

が知られている。ここで  $k > 0$ ,  $f(x)$  は単調に増加する奇関数で  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  ( $x \rightarrow \pm\infty$ ) とする。式 (4.43) は、1 階連立方程式に書き直すと、次式のように周期  $2\pi$  を持つ 2 次元非自律系となる。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -ky - f(x) + B \cos t \end{aligned} \quad (4.44)$$

この方程式には後にみるように非自律系特有の非線形現象が数多く存在する。たとえば、非線形共振と呼ばれる複数個の基本調波周期解の存在、各種分数調波周期解の存在などが見られる。 ■



## 4.2 周期係数を持つ線形同次方程式

### 4.2.1 周期係数を持つ線形同次方程式の正規解

4.1.1 において周期解からの変分方程式が周期係数を持つ線形同次方程式

$$\dot{x} = A(t)x \quad (4.45)$$

となることをみた。この節では式 (4.45) の解の性質を考えよう。ここで、 $x \in R^n$  とし、行列  $A(t)$  は  $t$  に関して周期  $L$  の周期関数とする：

$$A(t+L) = A(t) \quad (4.46)$$

また、式 (4.45) に対応する行列微分方程式を

$$\dot{X} = A(t)X \quad (4.47)$$

とする。式 (4.47) の**主基本行列解** (principal matrix solution) を  $\Phi(t)$  としよう。すなわち、 $\Phi(0) = I_n$  となる式 (4.47) の解を  $\Phi(t)$  で表わすことにする。

このとき、式 (4.45) および式 (4.47) の一般解は、それぞれ

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)c \\ X(t) &= \Phi(t)C \end{aligned} \quad (4.48)$$

で表わされる。ここに、 $x(0) = c, X(0) = C$  である。

関係式

$$\dot{X}(t+L) = A(t+L)X(t+L) = A(t)X(t+L) \quad (4.49)$$

より、 $X(t+L)$  はまた式 (4.47) の解となっている。そこで、解  $X(t+L)$  は  $\Phi(t)$  の線形結合で表される。これを

$$X(t+L) = \Phi(t)D \quad (4.50)$$

とおこう。すると

$$X(t+L) = \Phi(t)D = X(t)C^{-1}D = X(t)F \quad (4.51)$$

となる。ただし、式 (4.48) で  $X(t)$  の初期値  $C$  が正則行列の場合を考えた。このことから、 $D$  と  $F$  も正則行列となる。この  $F$  を  $X(t)$  の**基本行列** (fundamental matrix) という。

主基本行列解  $\Phi(t)$  に関する基本行列  $E$  は

$$\Phi(t+L) = \Phi(t)E, \quad E = \Phi(L) \quad (4.52)$$

すなわち

$$\Phi(t+L) = \Phi(t)\Phi(L) \quad (4.53)$$

となる。このことから、一般解  $X(t)$  の基本行列  $F$  は

$$X(t+L) = \Phi(t+L)C = \Phi(t)\Phi(L)C = X(t)C^{-1}EC \quad (4.54)$$

より

$$F = C^{-1}EC \quad (4.55)$$

となる。式 (4.55) よりただちに基本行列の固有値は、一般解 ( $\det X(t) \neq 0$ ) の選び方によらないことがわかる。

そこでこの基本行列に対する特性方程式：

$$\chi(\mu) = \det(\mu I_n - \Phi(L)) = 0 \quad (4.56)$$

の根  $\mu$  を**特性乗数** (characteristic multiplier),  $\nu = \frac{1}{L} \log_e \mu$  を**特性指数** (characteristic exponent) とする。ここで  $\nu$  は  $2\pi j/L$  の整数倍を除いて一意に決まる。

さて、基本行列がジョルダン標準形となる解を  $\Theta(t)$  としよう：

$$\Theta(t+L) = \Theta(t)J \quad (4.57)$$

$\Theta(t)$  は式 (4.47) の**正規解** (normal solution) と呼ばれている。簡単のため、特性方程式 (4.56) が相異なる根を持つ場合を考える。  $J$  は対角行列  $J = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  となるので  $\Theta(t)$  を列ベクトルに分解して書くと

$$\Theta(t) = \begin{bmatrix} x^{(1)}(t) & x^{(2)}(t) & \dots & x^{(n)}(t) \end{bmatrix}$$

このことから、式 (4.45) の正規解は

$$x^{(i)}(t+L) = \mu_i x^{(i)}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.58)$$

と表わすことができる。この結果は**フロケ** (Floquet) の**定理**と呼ばれている。このことから正規解は、時間が1周期経過する毎に特性乗数倍される解といえる。

なお、正規解は、特性乗数に対する固有ベクトルを使って次のように主基本行列解から構成できる。いま、特性乗数  $\mu_i$  に対する固有ベクトルを  $h_i$  とする。

$$Eh_i = \mu_i h_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.59)$$

これらをまとめて書いて

$$EH = HJ \quad (4.60)$$

ここに

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \end{bmatrix}, \quad J = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$$

とおいた。そこで、解

$$\Theta(t) = \Phi(t)H \quad (4.61)$$

を考えると、

$$\Theta(t+L) = \Phi(t+L)H = \Phi(t)\Phi(L)H = \Theta(t)H^{-1}EH = \Theta(t)J$$

より、これが正規解となっている。

### 自律系の周期解の特性乗数

自律系 (4.1) の周期解に関する変分方程式を考える。このとき、基本行列の特性乗数のうち少なくとも1つが1となる。このことをみておこう。いま、式 (4.1) が周期  $L$  の周期解 (4.3) を持っていたとしよう。式 (4.1) の解 (4.3) に関する変分方程式を式 (4.24) とする。また式 (4.24) の主基本行列解を  $\Phi(t)$  とする。いま、周期解 (4.3) を式 (4.1) に代入すると恒等式

$$\dot{\varphi}(t, x_0) = f(\varphi(t, x_0)) \quad (4.62)$$

が成り立っている。これをもう一度時間で微分すると次式を得る。

$$\ddot{\varphi}(t, x_0) = \frac{\partial f(\varphi(t, x_0))}{\partial x} \dot{\varphi}(t, x_0) = A(t) \dot{\varphi}(t, x_0) \quad (4.63)$$

すなわち、 $\dot{\varphi}(t, x_0)$  は変分方程式 (4.24) の解となっている。したがって主基本行列解  $\Phi(t)$  により

$$\dot{\varphi}(t, x_0) = \Phi(t) \dot{\varphi}(t_0, x_0) \quad (4.64)$$

と表すことができる。これより

$$\dot{\varphi}(t_0 + L, x_0) = \Phi(t_0 + L) \dot{\varphi}(t_0, x_0) = \Phi(L) \dot{\varphi}(t_0, x_0) \quad (4.65)$$

ここで  $\Phi(t_0) = I_n$  の関係を用いた。他方  $\varphi(t, x_0)$  は周期解なので

$$\dot{\varphi}(t_0 + L, x_0) = \dot{\varphi}(t_0, x_0) \quad (4.66)$$

式 (4.65) と (4.66) より

$$\Phi(L) \dot{\varphi}(t_0, x_0) = \dot{\varphi}(t_0, x_0) \quad (4.67)$$

これは基本行列  $\Phi(L)$  の特性乗数の1つが1となり、それに対する固有ベクトルが周期軌道上の速度ベクトルであることを表している。この結果は、例 4.1 でみた軌道安定性を一般的にみたものといえる。また、前節で定義したポアンカレ写像は、周期軌道に横断的な局所断面を考えることによって、上述の特性乗数1を除いた他の  $n-1$  個の性質をみようとすると写像であるとも考えられる。

### 特性乗数の積

基本行列の行列式は特性乗数の積であり、正数となることをみておこう。リュービル (Liouville) の公式より、

$$\det \Phi(L) = \det \Phi(0) e^{\int_0^L \text{trace} A(\tau) d\tau} = e^{\int_0^L \text{trace} A(\tau) d\tau} \quad (4.68)$$

ここに、行列  $A(t) = [a_{ij}(t)]$  のトレース (trace) は

$$\text{trace} A(t) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(t) \quad (4.69)$$

である。他方、特性方程式 (4.56) と式 (4.68) より

$$\det \Phi(L) = \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n = e^{\int_0^L \text{trace} A(\tau) d\tau} > 0 \quad (4.70)$$

更に、上で述べた特性乗数が1となる乗数を  $\mu_1 = 1$  とすれば、

$$\mu_2 \cdots \mu_n = e^{\int_0^L \text{trace} A(\tau) d\tau} > 0 \quad (4.71)$$

これはまた、ポアンカレ写像が向きを保つ写像となることを意味している。

#### 【例 4.5】 2次元自律系の周期解の安定性

2次元自律系：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (4.72)$$

が周期  $L$  の周期解：

$$x(t) = \phi(t), \quad y(t) = \psi(t) \quad (4.73)$$

を持っていたとして、この周期解の安定性を調べてみよう。

変分方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a(t)\xi + b(t)\eta \\ \dot{\eta} &= c(t)\xi + d(t)\eta \end{aligned} \quad (4.74)$$

ここに

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(t), \psi(t)), \quad b(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(t), \psi(t)) \\ c(t) &= \frac{\partial g}{\partial x}(\phi(t), \psi(t)), \quad d(t) = \frac{\partial g}{\partial y}(\phi(t), \psi(t)) \end{aligned} \quad (4.75)$$

とおいた。式 (4.74) の特性乗数の1つは1となるので、もう1つの特性乗数を  $\mu$  とすれば、式 (4.71) より次式を得る。

$$\mu = \exp\left(\int_0^L (a(\tau) + d(\tau)) d\tau\right) \quad (4.76)$$

したがって、安定性の条件  $\mu < 1$  は次式となる。

$$\int_0^L (a(\tau) + d(\tau)) d\tau = \int_0^L \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(\tau), \psi(\tau)) + \frac{\partial g}{\partial y}(\phi(\tau), \psi(\tau)) \right\} d\tau < 0 \quad (4.77)$$

■

#### 4.2.2 フロケ・リヤプーノフ (Floquet-Lyapounov) の表現定理

まず、複素行列関数によるフロケ・リヤプーノフの定理を導くことにしよう。いま、主基本行列解  $\Phi(t)$  の基本行列  $\Phi(L)$  は正則なので

$$\Phi(L) = e^{KL} \quad (4.78)$$

を満たす行列  $K$  が存在する。なお、 $A(t)$ 、 $\Phi(L)$  は実行列であるが、 $K$  は必ずしも実行列とはならないことに注意しよう。そこで

$$F(t) = \Phi(t)e^{-Kt} \quad (4.79)$$

とおくと,

$$F(t+L) = \Phi(t+L)e^{-K(t+L)} = \Phi(t)\Phi(L)e^{-KL}e^{-Kt} = \Phi(t)e^{-Kt} = F(t)$$

の関係を得る. このことから  $\Phi(t)$  は周期行列  $F(t)$  と指数行列  $e^{Kt}$  の積となる:

$$\Phi(t) = F(t)e^{Kt} \quad (4.80)$$

これが複素数で表したフロケ・リヤプーノフの定理である.

#### 実フロケ・リヤプーノフの表現定理

式 (4.47) の主基本行列解  $\Phi(t)$  は, 実行列  $F_0(t)$ ,  $K_0$  を用いて,

$$\Phi(t) = F_0(t)e^{K_0 t} \quad (4.81)$$

と表わすことができる. ここに,  $K_0$  は実定数行列,  $F_0(t)$  は  $F_0(t+2L) = F_0(t)$  となる周期  $2L$  の行列である.

これは, 実  $n \times n$  正則行列  $K_0$  で,

$$\Phi(L)^2 = e^{2LK_0} \quad (4.82)$$

となる  $K_0$  が存在することを使って

$$F_0(t) = \Phi(t)e^{-K_0 t} \quad (4.83)$$

とおくと

$$F_0(t+2L) = \Phi(t)\{\Phi(L)\}^2 e^{-K_0(t+2L)} = \Phi(t)e^{2K_0 L} e^{-2K_0 L} e^{-K_0 t} = \Phi(t)e^{-K_0 t} = F_0(t) \quad (4.84)$$

したがって, 式 (4.81) を得る. これより負の特性乗数の場合は周期が 2 倍になる.

#### リヤプーノフの定理

式 (4.80) で定義した周期行列  $F(t)$  を用いて座標変換:

$$x = F(t)y \quad (4.85)$$

を行うと, 式 (4.45) は定数行列  $K$  を係数とする同次方程式

$$\dot{y} = Ky \quad (4.86)$$

に変換される.

これは, 式 (4.80), (4.85) を微分して整理すると容易に導くことができる.

#### 【例 4.6】マシュー (Mathieu) の方程式

2 階の方程式:

$$\ddot{x} + (a + b \cos 2t)x = 0 \quad (4.87)$$

はマシューの方程式と呼ばれている。式 (4.87) を書き直して

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -(a + b \cos 2t)x\end{aligned}\tag{4.88}$$

を考えよう。\$t = 0\$ で初期値 \$u\_0 = (x\_0, y\_0) \in R^2\$ を持つ解を

$$x(t) = \varphi(t, u_0), \quad y(t) = \psi(t, u_0)\tag{4.89}$$

と書くことにしよう。係数の周期は \$\pi\$ なので、時間 \$\pi\$ 毎のストロボ写像をポアンカレ写像とみなして、

$$T: R^2 \rightarrow R^2; u_0 = (x_0, y_0) \mapsto u_1 = (\varphi(\pi, u_0), \psi(\pi, u_0))\tag{4.90}$$

を定義する。他方、主基本行列解を

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \psi_1(t) & \psi_2(t) \end{bmatrix}, \quad \Phi(0) = I_2\tag{4.91}$$

とすれば、

$$u_1 = \Phi(\pi)u_0\tag{4.92}$$

であるから

$$T = \Phi(\pi)\tag{4.93}$$

となっていることが分かる。

さて、一般に主基本行列解を解析的に求めることは非常に難しい問題である。数値積分をすれば、実用上は精度よく求めることができる。そこで、式 (4.93) の各要素が求められたとして特性乗数がどうなるかをみてみよう。特性方程式は

$$\begin{aligned}\chi(\mu) &= \det(\mu I_2 - \Phi(\pi)) = \begin{vmatrix} \mu - \varphi_1(\pi) & -\varphi_2(\pi) \\ -\psi_1(\pi) & \mu - \psi_2(\pi) \end{vmatrix} \\ &= \mu^2 - \{\varphi_1(\pi) + \psi_2(\pi)\}\mu + \det \Phi(\pi) = 0\end{aligned}\tag{4.94}$$

となる。一方リュービルの公式から

$$\det \Phi(\pi) = \det \Phi(0) e^{\int_0^\pi \text{trace} A(\tau) d\tau} = 1\tag{4.95}$$

ここで、行列 \$A(t)\$ は式 (4.88) の係数行列を表す。したがって、式 (4.94) は

$$\chi(\mu) = \mu^2 - \{\varphi_1(\pi) + \psi_2(\pi)\}\mu + 1 = 0\tag{4.96}$$

となる。式 (4.96) より、

$$m = \varphi_1(\pi) + \psi_2(\pi)\tag{4.97}$$

とおくと、特性乗数は次の 3 つの場合が考えられる。

(1)  $m > 2$  の場合

特性乗数は  $0 < \mu_1 < 1 < \mu_2$  となる。すなわち、原点は、正不安定固定点である。この場合のフロケ・リヤプーノフの表現を考えてみよう。  $\mu_1, \mu_2$  に対する固有ベクトルをそれぞれ  $h_1, h_2$  とし、  $H = [h_1 \ h_2]$  とおく。正規解は主基本行列解から次式として求められる。

$$\Theta(t) = \Phi(t)H, \quad \Theta(t + \pi) = \Theta(t) \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

そこで

$$\nu_1 = \frac{1}{\pi} \log \mu_1, \quad \nu_2 = \frac{1}{\pi} \log \mu_2 \quad (4.99)$$

とにおいて、解 (4.98) に表現定理を適用して

$$\Theta(t) = F(t) \begin{bmatrix} e^{\nu_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\nu_2 t} \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

となる。ここに、  $F(t + \pi) = F(t)$  であり、これは主基本行列解から

$$F(t) = \Theta(t) \begin{bmatrix} e^{-\nu_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-\nu_2 t} \end{bmatrix} = \Phi(t)H \begin{bmatrix} e^{-\nu_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-\nu_2 t} \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

と計算できる。

(2)  $m < -2$  の場合

特性乗数は  $\mu_1 < -1 < \mu_2 < 0$  となる。すなわち原点は逆不安定固定点である。この場合は

$$\Theta(t) = \Phi(t)H, \quad \Theta(t + 2\pi) = \Theta(t) \begin{bmatrix} \mu_1^2 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

であるから、

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi} \log \mu_1^2, \quad \nu_2 = \frac{1}{2\pi} \log \mu_2^2 \quad (4.103)$$

を定義すれば、前述と同様な表現

$$\Theta(t) = F(t) \begin{bmatrix} e^{\nu_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\nu_2 t} \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

を得る。ただし、この場合の周期行列の周期は  $2\pi$  である。

$$F(t + 2\pi) = F(t) \quad (4.105)$$

このことは、原点が逆不安定固定点であることから直感的に理解できることでもある。なお、式 (4.87) は復元項の係数が周期的に変化することに対応して、パラメータが周期的に変化する系の振動現象のモ

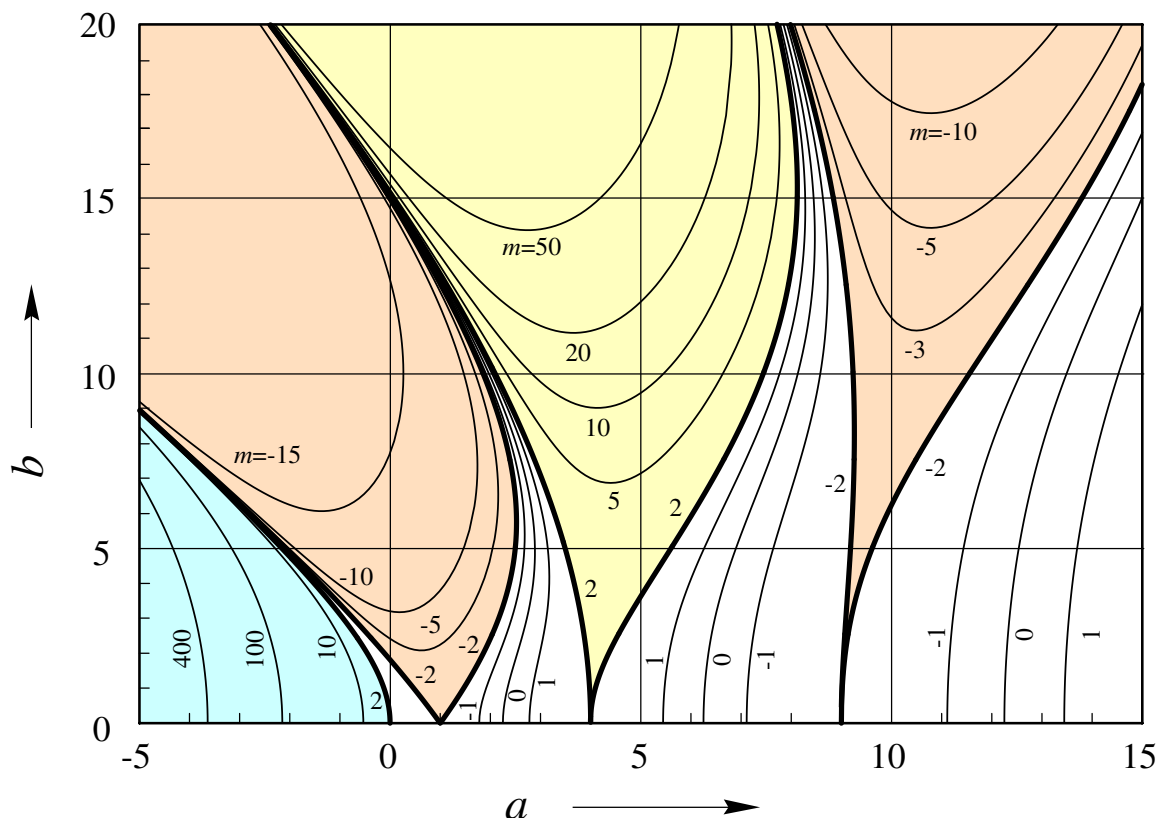


図 4.6 マッシュー方程式 (4.87) の等係数  $m$  図. 着色した領域で原点が不安定となる.

デルとしても知られている. ここで考えた条件を満たすようにパラメータを定めると原点は不安定となり, 励振周波数の  $1/2$  の振動が励起する. これを**パラメータ励振** (parametric excitation) という. ブランコの小さな振動モデルはよく引用される例である.

図 4.6 は, パラメータ  $a, b$  平面内で式 (4.97) の  $m$  の値が同じとなる, 等  $m$  曲線を描いたものである. うすく色づけした領域で原点は不安定となる. この領域は  $a = k^2, k = 1, 2, \dots$  で横軸と交わっている.  $a = 1$  より上に広がる領域が上述のパラメータ励振の起こる領域に対応している.

(3)  $|m| < 2$  の場合

特性乗数は  $\mu_1, \bar{\mu}_2 = e^{-j\theta}$  となる. ただし

$$\theta = \tan^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{4 - \{\varphi_1(\pi) + \psi_2(\pi)\}^2}}{\varphi_1(\pi) + \psi_2(\pi)} \right\} \tag{4.106}$$

とおいた. この場合は原点は双曲型固定点ではない. これは写像 (4.93) が面積を保存する写像であることから, 当然のことと言える. 式 (4.95) 参照. ■



### 4.3 周期振動の位相的分類と安定性

微分方程式の周期解は、その近傍でポアンカレ写像を考えることによって、向きを保った微分同相写像の固定点となる。これは、リュービルの公式によって、4.2.1 で述べたのと同様にポアンカレ写像が状態空間の体積要素の向きを保つからである。そこで、第3章で述べた向きを保つ微分同相写像の固定点の位相的分類をそのまま使って、周期解の位相的分類を行うことができる。この分類は3.3 とまったく同様である。すなわち、次の結果を得る。

#### 周期的非自律系の周期解

状態空間をそれ自身に写すポアンカレ写像の固定点または周期点を考えればよい。固定点または周期点の  $n$  個の特性乗数によって、双曲型周期解の位相的分類がなされる。したがって、双曲型周期解の位相的に性質の異なるタイプの総数は  $2n$  個である。第3章3.3 にならって、それらのタイプは

$${}_m D, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n; \quad {}_m I, \quad m = 1, 2, \dots, n-1$$

である。特に漸近安定な周期解は  ${}_0 D$  タイプの固定点あるいは周期点に対応する。

#### 自律系の周期解

自律系では、4.2.1 で述べたことから周期軌道に沿ったベクトル場を固有ベクトルとする特性乗数が1となる。ポアンカレ写像はこのベクトルに横断的に選んだ局所断面上での写像として定義するので、残りの  $n-1$  個の特性乗数はポアンカレ写像の固定点における微分（ヤコビ行列）の固有値（特性根）として求められる。このことから、 $n$  次元自律系の周期解は、ポアンカレ写像の固定点で考えて位相的分類をすればよい。双曲型固定点のタイプは

$${}_m D, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1; \quad {}_m I, \quad m = 1, 2, \dots, n-2$$

の  $2(n-1)$  となる。そこで安定な周期解は  ${}_0 D$  タイプの固定点に対応する。これを軌道漸近安定な周期解あるいは単に（漸近）安定なりミット・サイクルという。注意しなければならないことは、どの双曲型固定点でも、周期解としては軌道方向に特性乗数1のベクトル場に対応していて、漸近安定ではないことである。つまり軌道に沿ったずれ（位相差）は変化しない。これは自律系の周期解の特徴といえる。

#### ポアンカレ写像の固定点と周期点の記法

本書では、以後具体的な例などを通じて、多くの固定点や周期点を一度に扱うことがある。その際、各固定点や周期点を区別するため記法を定めておこう。これはあくまで便宜上本書でだけ使用する記法である。

**記法1** 固定点や周期点のタイプは、 $D$  と  $I$  で示す。また、これらの不安定次元は  ${}_m D$ ,  ${}_m I$  のように記す。

**記法2**  $l$ -周期点は  ${}_m D^l$ ,  ${}_m I^l$  のように書く。 $l$ -周期点のポアンカレ写像  $T$  による  $l$  個の像、すなわち軌道は

$$\{ {}_m D_0^l, {}_m D_1^l, \dots, {}_m D_{l-1}^l \} \quad (4.107)$$

ただし

$${}_m D_{k+1}^\ell = T({}_m D_k^\ell), \quad k \pmod{\ell}$$

のよう右下に付けた添字で区別する.

**記法 3** 1つの  $\ell$ -周期点に対して  $\ell$  個の点からなる 1つの軌道 (4.107) が決まる. これを 1組 (group) の  $\ell$ -周期点と数えることにしよう. いま, 同じタイプの  $\ell$ -周期点が複数組, たとえば  $g$  組, ある場合には

$${}_m^i D_k^\ell, \quad i = 1, 2, \dots, g$$

と書く.

**記法 4** よく出てくる記号は以下のような添字の少ない記法に簡略して使う.

- 固定点は  $D^1$  などと書かずに右上添字を省略し, 単に  $D$  と書く.
- 同じタイプの  $\ell$ -周期点が 1組しかない場合は, 組を示す左上付き添字を省略する.
- ポアンカレ写像が 2次元写像の場合は, 以下よく出てくるので, **記法 1** のタイプと不安定次元を示す記法を合わせて

$${}_0 D \text{ を } S, \quad {}_1 D \text{ を } D, \quad {}_1 I \text{ を } I, \quad {}_2 D \text{ を } U$$

のように略記する. したがって, たとえば  ${}_0 D$  タイプの固定点が 2 個 (固定点の場合は組と言わずに個と言っても混乱はない) ある場合は,  ${}^1 S, {}^2 S$  のように記す.

#### 【例 4.7】ダフティング方程式の周期解

例 4.4 であげた方程式 (4.44) の特別な場合として

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -0.1y - x^3 + 0.3 \cos t \quad (4.108)$$

の周期解を数値計算して求めた例を図 4.7 に示す. 点線は解軌道を示している. 固定点は  ${}^1 S$  と  ${}^2 S$  が  ${}_0 D$ ,  $D$  が  ${}_1 D$  タイプである. すなわち, 2つの漸近安定な周期解と 1つの正不安定な周期解がある. 表 4.1 参照. また, これらの計算法については例 6.6 で述べる. 各周期解をフーリエ級数に展開すると次式を得る.

$$\begin{aligned} x_D(t) &= -0.9022 \cos t + 0.3047 \sin t - 0.0149 \cos 3t + 0.0241 \sin 3t \\ &\quad + 0.0001 \cos 5t + 0.0008 \sin 5t + \dots \\ x_{1S}(t) &= -0.3219 \cos t + 0.0349 \sin t - 0.0009 \cos 3t + 0.0003 \sin 3t + \dots \\ x_{2S}(t) &= 1.1192 \cos t + 0.5246 \sin t + 0.0211 \cos 3t + 0.0679 \sin 3t \\ &\quad - 0.0020 \cos 5t + 0.0032 \sin 5t - 0.0002 \cos 7t + \dots \end{aligned} \quad (4.109)$$

ただし, 各係数は小数第 5 位を四捨五入した.

図 4.7 には, 正不安定固定点について, ポアンカレ写像による安定・不安定不変曲線も描いてある. これは非自律系の相平面図とみてよい. たとえば, 着色した領域に初期値を持つ解は, 時間の経過とともに小さい周期解  ${}^1 S$  に漸近してゆく. ■

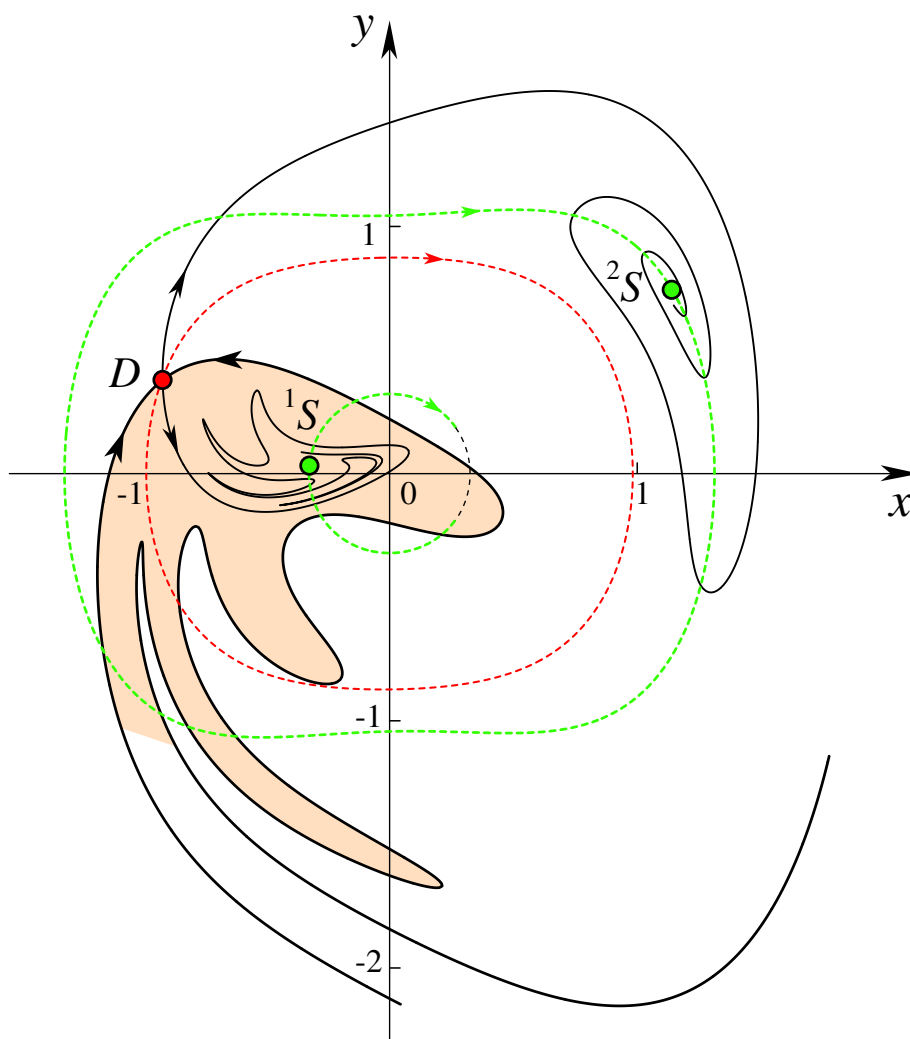


図 4.7 Duffing 方程式 (4.108) の周期解 (点線) と固定点およびポアンカレ写像による相平面図.

表 4.1 固定点の座標と安定性.

固定点	固定点の座標 $(x_0, y_0)$	特性乗数 $\mu_1, \mu_2$	固定点のタイプ
$D$	$(-0.9170, 0.3812)$	$3.763, 0.142$	正不安定 ( ${}_1D$ )
$^1S$	$(-0.3228, 0.0360)$	$-0.586 \pm 0.436j$	完全安定 ( ${}_0D$ )
$^2S$	$(1.1381, 0.7446)$	$-0.171 \pm 0.710j$	完全安定 ( ${}_0D$ )

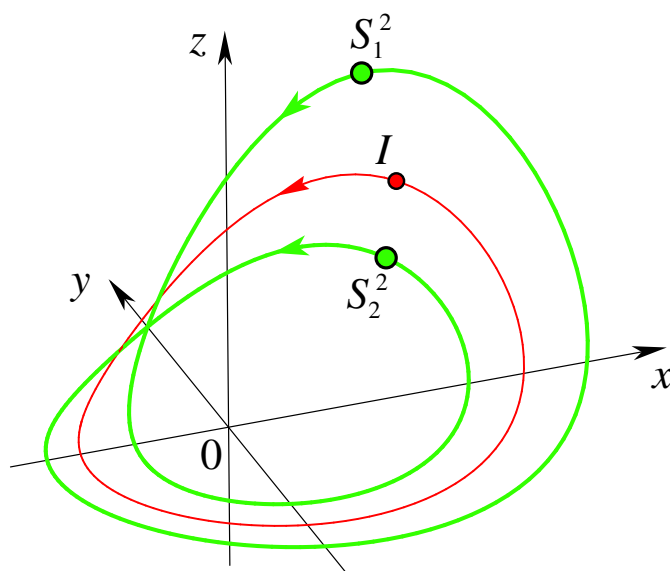


図 4.8 Rössler 方程式 (4.110) の周期解の例.

#### 【例 4.8】レスラー (Rössler) 方程式の周期解

レスラー方程式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= bx - cz + xz \end{aligned} \quad (4.110)$$

は、後に述べるカオス振動のみられる系としてよく知られた方程式である。パラメータを、 $a = 0.6$ ,  $b = 0.5$ ,  $c = 1.6$  とした場合には周期軌道が 2 つある。これらの軌道を図 4.8 に示した。  $y = 0.0$  を局所断面としてポアンカレ写像を考えると、これらの周期解に対応する逆不安定固定点  $I$ 、完全安定 2 周期点  $S_1^2, S_2^2$  が得られる。実際の計算については第 6 章の例 6.8 参照。 ■

## 4.4 本章のまとめと文献

### 4.4.1 本章のまとめ

1. 周期軌道 (解) に対してポアンカレ写像を考えると、周期軌道の定性的性質を調べる問題は、向きを保つ写像で定義される離散力学系の問題となる。すなわち、周期振動は、周期毎にもとの位置に帰ってくる性質があるので、これをうまく利用し離散化すれば離散力学系の固定点問題に翻訳できる。周期振動はその軌道が状態空間内で閉曲線となっている。状態空間内への閉曲線の埋め込みは多様であるから、周期振動に関する問題といえども本来は局所的問題ではない。それをポアンカレ写像の固定点問題として局所的問題に換言できることに注目したい。
2. 周期解に対する変分方程式は、周期係数を持つ線形同次方程式となる。この方程式の正規解およ

びフロケ・リヤプーノフの表現定理は、もとの周期解の安定性を知る上で基本的である。

3. 周期解の位相的分類は、向きを保つ写像で定義される離散力学系の固定点の分類に従う。

#### 4.4.2 本章の文献

周期係数を持つ線形同次方程式の解析は、これも大抵の常微分方程式の教科書に紹介されている。たとえば、ポントリャーギン [O11], 白岩 [O14], Hale [O5] をみよ。また Yakubovich [O15] には多くの性質が述べられている。

マシュー方程式については、McLachlan [O10], Champbell [O3] をみよ。パラメータ励振のついては、佐藤 [N14], Stern [N18], Migulin [N12] に色々なモデルが解析されている。

ダフィング方程式については、林 [N8] を参照した。レスラー方程式については Rössler [P9] をみよ。

### 4.5 練習問題 4

- 4.1 4.1.2 で定義した自律系のポアンカレ写像を考える。周期解はこの写像の固定点となる。さて、この固定点の特性乗数は局所断面の選び方によらないことを示せ。
- 4.2 式 (4.32) の  $x$  に関する微分を計算せよ。
- 4.3 例 4.4 と 4.7 で扱ったダフィング方程式は、 $k > 0$  の場合、ストロボ写像  $T$  は面積縮小写像となることを示せ。
- 4.4 式 (4.68) を参考にして、第 1 章でみたハミルトン系 (1.70) は解に沿って時間の経過とともに体積保存が保存されることを示せ。また勾配系 (1.82) では体積が減少することも示せ。

#### プログラミング演習問題

- 4.1 ストロボ写像 (4.42) を求めるプログラムをつくれ。
- 4.2 図 4.6 を描くプログラムをつくれ。
- 4.3 図 4.7 を描くプログラムをつくれ。

## 第 5 章

# 周期解の近似計算

この章では、弱非線形系の周期解を近似的に計算する方法について考える。近似計算の代表的方法として摂動法と平均化法を述べる。まず最初に、5.1 で線形系の周期解について共振現象を説明する。共振現象は非線形系では非線形共振現象となる。後者の 1 つの特徴は複数個の周期解がみられることである。このことを 5.2 において摂動法や平均化法の例として取りあげる。非線形共振は基本的な非線形現象の 1 つであるから後の章でも繰り返し例示される。したがって、弱非線形系の解析方法と合わせて非線形共振、特に基本調波共振について理解してほしい。

この章では摂動法も平均化法も 2 次元系を例にとって説明した。高次元系への拡張は原理的には難しいが、共振現象に関連して級数展開可能性など技術的な問題が生じることと計算量が膨大となることと理由から、説明が長くなるので省略した。必要が生じた場合には適当な参考書を参照していただきたい。

### 5.1 線形系の強制振動

線形系の強制振動は、非線形系に見られる様々な現象を考える上でも基本となる。そこでこの節では、典型的な具体例によってその一端をみておこう。

#### 【例 5.1】電圧源を印加した線形 RLC 回路

電気回路が他の回路や物理系の影響を受けると、系を記述する状態方程式にこの影響を表す項が付加される。回路に加えられる電源はこの例である。この影響は外力 (forcing term) と呼ばれている。

さて、図 5.1 に示した RLC 直列回路に電圧源が印加された回路を考えよう。回路の状態変数として、図中に示したインダクタを流れる電流  $i(t)$  とキャパシタの両端の電圧  $v(t)$  を選ぼう。回路方程式は

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= i \\ L \frac{di}{dt} &= -Ri - v + e(t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

あるいは

$$\ddot{v} + 2\zeta\dot{v} + \omega_0^2 v = \omega_0^2 e(t) \quad (5.2)$$

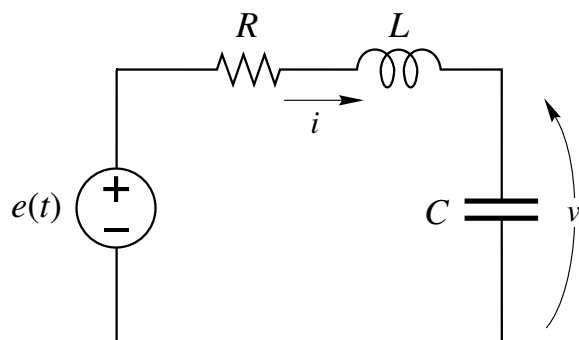


図 5.1 線形 RLC 直列回路.

となる. ここに

$$\zeta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.3)$$

とおいた.

#### A. 自由振動が減衰振動となる場合

まず, 電圧源を取り除いた回路 ( $e(t) = 0$ ) の自由振動をみておこう. 回路方程式は 2 階の同次方程式

$$\ddot{v} + 2\zeta\dot{v} + \omega_0^2 v = 0 \quad (5.4)$$

である. 特性方程式は

$$\chi(\mu) = \mu^2 + 2\zeta\mu + \omega_0^2 = 0 \quad (5.5)$$

となる. ここでは特性根が複素数となる場合, すなわち  $\omega_0 > \zeta$ , を取りあげよう.

$$\mu_1 = \bar{\mu}_2 = -\zeta + j\sqrt{\omega_0^2 - \zeta^2} = -\zeta + j\omega_d \quad (5.6)$$

ここに,  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \zeta^2}$  とおいた. 式 (5.4) の一般解は次式となる.

$$\begin{aligned} v(t) &= Ve^{-\zeta t} \cos(\omega_d t + \theta) \\ i(t) &= C\dot{v} = -Ie^{-\zeta t} \cos(\omega_d t + \theta - \delta) \end{aligned} \quad (5.7)$$

ただし,  $V, \theta$  は任意積分定数,

$$I = CV\sqrt{\zeta^2 + \omega_d^2} = \omega_0 CV, \quad \delta = \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\zeta} \quad (5.8)$$

とおいた. 以下, 状態  $v(t)$  のみを取りあげる.  $i(t)$  は式 (5.1) 第 1 式から容易に導くことができる.

#### B. 直流電圧源の場合, すなわち $e(t) = E$ の場合

式 (5.2) は次式となる.

$$\ddot{v} + 2\zeta\dot{v} + \omega_0^2 v = \omega_0^2 E \quad (5.9)$$

したがって、この方程式の特殊解  $v_s(t)$  として定常状態  $E$  を考えると

$$v_s(t) = E \quad (5.10)$$

を得る。したがって、一般解は式 (5.7) と (5.10) の和で表される。

### C. 交流電圧源の場合、すなわち $e(t) = E \cos \omega t$ の場合

回路方程式は次式となる。

$$\ddot{v} + 2\zeta\dot{v} + \omega_0^2 v = \omega_0^2 E \cos \omega t \quad (5.11)$$

この方程式の特殊解の 1 つである定常解を求めるには、複素振幅の方法を用いると便利である。この方法は電気回路の交流理論として広く知られている。式 (5.11) の定常解は次式となる。

$$v_s(t) = V_s \cos(\omega t - \phi) \quad (5.12)$$

ここに

$$V_s = \frac{\omega_0^2 E}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega)^2}}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (5.13)$$

とおいた。

したがって、式 (5.11) の一般解は

$$v(t) = V e^{-\zeta t} \cos(\omega_d t + \theta) + v_s(t) \quad (5.14)$$

となる。十分に時間が経過すれば、過渡状態としての第 1 項が消え、定常解 (5.12) に落ちつくことがわかる。すなわち、式 (5.11) は  $\zeta > 0$  の場合、周期が外力の周期  $2\pi/\omega$  に等しい周期解をただ一つ持ち、これが漸近安定な状態となっている。

### D. 正弦波応答と共振

周期解 (5.12) と系のパラメータとの関係のみておこう。電圧  $v_s(t)$  は、式 (5.13) で定義された振幅と位相によって定まる。このことより、 $\omega$ ,  $\zeta$  を変化させた場合、振幅と位相が変化する。これは周波数応答曲線として知られている。 $\zeta$  が小さい、すなわち抵抗の値が小さい場合には、 $\omega \approx \omega_0$  で振幅が大きくなり、位相の遅れは 0 から  $\pi$  へと大きく変化する。 $\zeta = 0$ ,  $\omega = \omega_0$  では振幅は無限大となってしまう。この現象は**共振** (resonance) と呼ばれている。共振でない場合を**非共振** (nonresonance) という。周波数応答曲線のうち振幅特性を示しておこう。式 (5.13) を正規化した曲線を描くことにする。いま

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad Q = \frac{\omega_0}{2\zeta} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

とおくと、利得あるいはゲインと呼ばれる  $V_s$  の  $E$  に対する比  $G$  は次式となる。

$$G = \frac{V_s}{E} = \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\nu - 1)^2 + \left(\frac{\nu}{Q}\right)^2}} \quad (5.15)$$



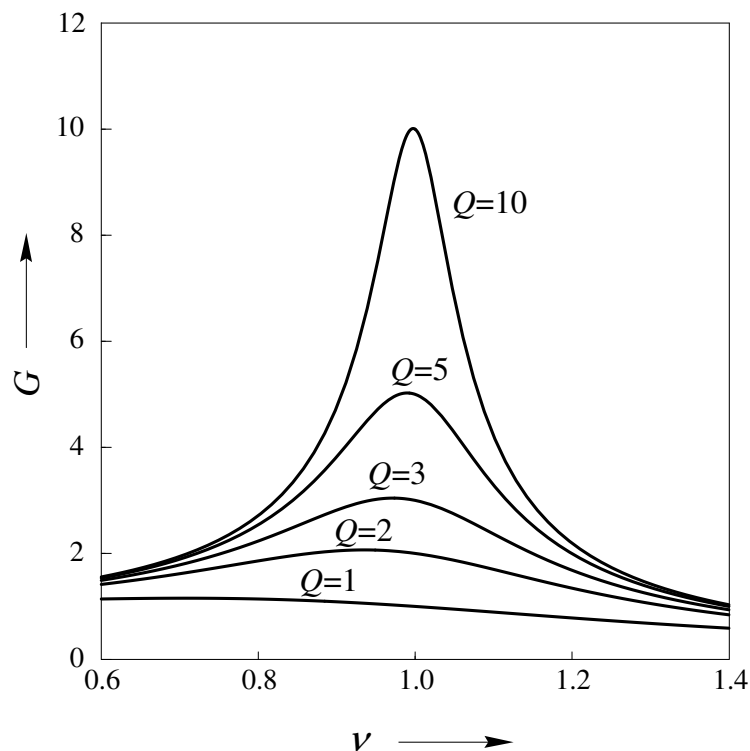


図 5.2 振幅の共振曲線.

$Q$  は系の損失の逆数に比例し、回路の良さを表す。幾つかの  $Q$  に関して式 (5.15) を図示すると図 5.2 となる。共振周波数  $\nu = 1$  において  $G = Q$  となっている。したがって損失が小さくなり  $Q$  が大きくなると利得  $G$  も大きくなる。

共振の場合を元の微分方程式にもどって考えてみよう。式 (5.11) は次式となる。

$$\ddot{v} + \omega_0^2 v = \omega_0^2 E \cos \omega_0 t \tag{5.16}$$

したがって、一般解は

$$v(t) = V \cos(\omega_0 t + \theta) + \frac{1}{2} \omega_0 t E \sin \omega_0 t \tag{5.17}$$

となる。減衰がないので、状態は第 1 項の自由振動と外力による第 2 項の重ね合わせとなる。第 2 項の振幅には  $t$  が含まれ時間とともに増大する。図 5.3 参照。この項は**永年項** (secular term) と呼ばれ、系にはもはや周期解は存在しなくなる。

### E. 共振と周期解の存在条件

共振現象をもうすこし詳しくみておこう。最初に導いた式 (5.2) で周期  $2\pi/\omega$  の一般的な外力  $e(t)$  を印加したとき、どのような条件のもとで周期解が存在するだろうか。外力をフーリエ級数に展開して考えよう。

$$e(t) = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (E_{ck} \cos k\omega t + E_{sk} \sin k\omega t) \tag{5.18}$$

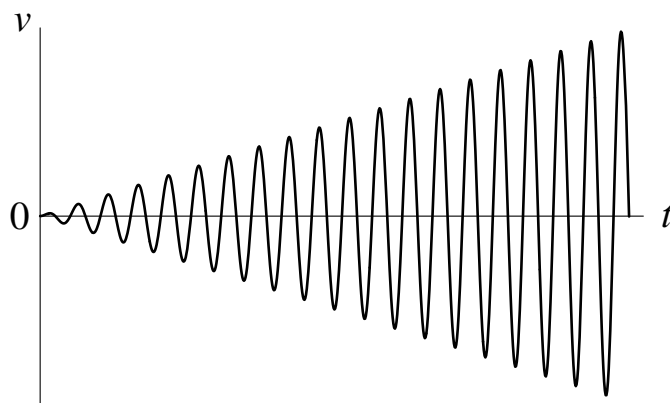


図 5.3 式 (5.16) に含まれる永年項の振動波形.

ここに,

$$\begin{aligned}
 E_0 &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e(\tau) d\tau \\
 &\dots \\
 E_{ck} &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e(\tau) \cos k\omega\tau d\tau \\
 E_{sk} &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e(\tau) \sin k\omega\tau d\tau
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

である.

(a)  $\zeta \neq 0$  の場合. 非共振

C での考察と同様にして各周波数成分について計算し, それらを重ね合わせることによって定常状態を得る. 系は唯一の周期解を持つ. 自由振動を表す同次方程式 (5.4) の平衡点 (原点) は双曲型となっていることに注意しよう.

(b)  $\zeta = 0$  の場合

回路方程式は

$$\ddot{v} + \omega_0^2 v = \omega_0^2 \left\{ E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (E_{ck} \cos k\omega t + E_{sk} \sin k\omega t) \right\} \tag{5.20}$$

となっている. 自由振動は

$$\ddot{v} + \omega_0^2 v = 0 \tag{5.21}$$

すなわち, 周期  $2\pi/\omega_0$  の単振動であり, 式 (5.21) の平衡点 (原点) は双曲的ではない. 以下, 幾つの場合に分けて考えよう.

(b-1)  $\omega = \omega_0$  の場合: 基本調波共振 (harmonic resonance) 式 (5.20) が周期解を持つためには, 永年

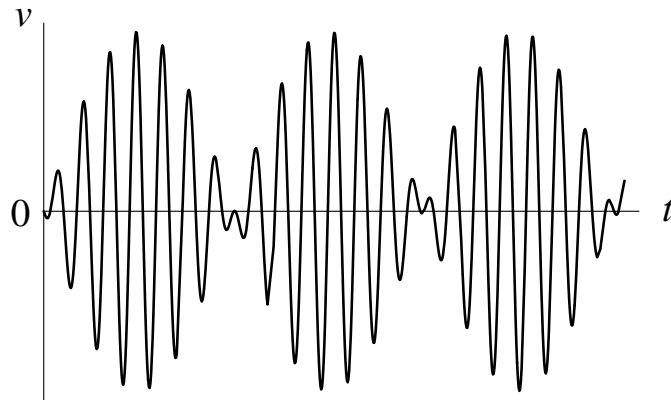


図 5.4 うなり振動波形の例.

項が現れてはいけなから

$$E_{c1} = \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} e(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau = 0$$

$$E_{s1} = \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} e(\tau) \sin \omega_0 \tau d\tau = 0$$
(5.22)

でなければならない. 逆に, この条件があれば式 (5.20) の解はすべて周期  $2\pi/\omega_0$  の周期解となる. 実際, 外力から決まる特殊解は次式のように計算できる.

$$v_s(t) = E_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{E_{ck}}{1-k^2} \cos k\omega_0 t + \frac{E_{sk}}{1-k^2} \sin k\omega_0 t \right)$$
(5.23)

したがって, 一般解は

$$v(t) = M \cos \omega_0 t + N \sin \omega_0 t + v_s(t)$$
(5.24)

となる. ここに,  $M, N$  は任意定数を表す.

(b-2)  $\omega/\omega_0 \neq n/m$  の場合: **非共振** 一般解は, 上と同様に計算して

$$v(t) = M \cos \omega_0 t + N \sin \omega_0 t + E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\omega_0^2 E_{ck}}{\omega_0^2 - k^2 \omega^2} \cos k\omega t + \frac{\omega_0^2 E_{sk}}{\omega_0^2 - k^2 \omega^2} \sin k\omega t \right)$$
(5.25)

となる. ここに,  $M, N$  は任意定数である. したがって, 周期  $2\pi/\omega$  の周期解はただ一つ ( $M = N = 0$  の場合) しか存在しないことが分かる.  $M$  や  $N$  が零でない場合は,  $\omega$  と  $\omega_0$  の比が無理数となっているため, 一般解は 2 つの基本周波数を持つ三角関数の和で表される**準周期関数** (quasi-periodic function) となる. これは**うなり振動** (beat oscillation) と呼ばれる状態に対応する. 図 5.4 参照.

(b-3)  $\omega/\omega_0 = n/m$  の場合: **分数調波共振** (subharmonic resonance) この場合の一般解は, 式 (5.25) で  $\omega_0 = n\omega/m$  と置き換えればよい. したがって,

$$v(t) = M \cos \frac{m}{n} \omega t + N \sin \frac{m}{n} \omega t + E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{m^2 E_{ck}}{m^2 - k^2 n^2} \cos k\omega t + \frac{m^2 E_{sk}}{m^2 - k^2 n^2} \sin k\omega t \right)$$
(5.26)

となる。すべての解は周期的となり、その周期は

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\frac{m}{n}\omega} = \frac{n}{m} \frac{2\pi}{\omega}$$

となる。  $m = 1$  の場合を  $1/n$ -**分数調波共振**、  $n = 1$  の場合を  $m$ -**高調波共振**（外力に  $m\omega$  の角周波数の成分を含むことはできない）という。  $m \neq 1, n \neq 1$  のときは**分数調波的高調波共振**あるいは**超分数調波共振**と呼ぶことがある。 ■

## 5.2 周期解の近似計算

$\epsilon$  を小さなパラメータ ( $|\epsilon| \ll 1$ ) とし、 $\epsilon$  を含んだ  $n$  次元非自律系

$$\dot{x} = Ax + f(t) + \epsilon F(x, \dot{x}, t) \quad (5.27)$$

や  $n$  次元自律系

$$\dot{x} = Ax + \epsilon F(x, \dot{x}) \quad (5.28)$$

を考えよう。このような系は  $\epsilon = 0$  の線形系からの摂動系と考えられるので、線形に近い系、**弱非線形系** (weakly nonlinear system)、あるいは**準線形系** (quasi linear system) などと呼ばれている。弱非線形系の周期解を解析的に求める問題は理論的にもまた応用上も重要な問題であり、これまでに多くの結果が知られている。以下 2 次元系を例にとり、摂動法と平均化法を説明しよう。

### 5.2.1 摂動法

#### A. 周期解の計算

いま、小さなパラメータ  $\epsilon$  を含んだ非自律系

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = \epsilon F(x, \dot{x}, \epsilon, t) \quad (5.29)$$

の周期解について考えよう。この節では、右辺の関数を時間に関して周期  $2\pi$  の周期関数に規格化して考えよう。

$$f(t + 2\pi) = f(t), \quad F(x, \dot{x}, \epsilon, t + 2\pi) = F(x, \dot{x}, \epsilon, t) \quad (5.30)$$

また、関数  $F$  はその引数について級数展開可能な解析的な関数であるとしておく。

方程式 (5.29) の周期解が  $\epsilon$  の中級数に展開できると考え各係数を逐次計算する。このような方法で周期解が得られるかどうかの数学的検討は略述し、計算方法についてすこし詳しく説明する。いま、

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \epsilon^3 x_3(t) + \cdots \quad (5.31)$$

と形式的に  $\epsilon$  の巾級数に展開する.

$$\begin{aligned}
F(x, \dot{x}, \epsilon, t) &= F(x_0, \dot{x}_0, 0, t) + \epsilon[F_{100}^1 x_1 + F_{010}^1 \dot{x}_1 + F_{001}^1] \\
&+ \epsilon^2 \left[ F_{100}^1 x_2 + F_{010}^1 \dot{x}_2 + \frac{1}{2} F_{200}^2 x_1^2 + \frac{1}{2} F_{020}^2 \dot{x}_1^2 + F_{110}^2 x_1 \dot{x}_1 + F_{101}^2 x_1 + F_{011}^2 \dot{x}_1 + \frac{1}{2} F_{002}^2 \right] \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{5.32}$$

ただし

$$\frac{\partial^{p+q+r} F}{\partial x^p \partial \dot{x}^q \partial \epsilon^r}(x_0, \dot{x}_0, 0, t) = F_{pqr}^{p+q+r}$$

と略記した. 式 (5.31) を式 (5.29) に代入し, 式 (5.32) の関係を使って  $\epsilon$  の等巾の項を整理すると次式を得る.

$$\begin{aligned}
\epsilon^0 : \ddot{x}_0 + \Omega^2 x_0 &= f(t) \\
\epsilon^1 : \ddot{x}_1 + \Omega^2 x_1 &= F(x_0, \dot{x}_0, 0, t) = F_1 \\
\epsilon^2 : \ddot{x}_2 + \Omega^2 x_2 &= F_{100}^1 x_1 + F_{010}^1 \dot{x}_1 + F_{001}^1 = F_2 \\
\epsilon^2 : \ddot{x}_3 + \Omega^2 x_3 &= F_{100}^1 x_2 + F_{010}^1 \dot{x}_2 + \frac{1}{2} F_{200}^2 x_1^2 + \frac{1}{2} F_{020}^2 \dot{x}_1^2 \\
&+ F_{110}^2 x_1 \dot{x}_1 + F_{101}^2 x_1 + F_{011}^2 \dot{x}_1 + \frac{1}{2} F_{002}^2 = F_3 \\
&\dots
\end{aligned} \tag{5.33}$$

これらの方程式の右辺の関数は, それぞれ 1 つ前までの解の関数となっていることに注意しよう. すなわち  $F_k$  は  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$  の関数である. したがってこれらが計算できると  $F_k$  は時間の関数となり,  $k$  番目の方程式

$$\ddot{x}_k + \Omega^2 x_k = F_k \tag{5.34}$$

を解けばよい形になっている.

さて, このようにして逐次解くことができるかどうか検討してみよう. まず, 外力  $f(t)$  を次式で与えよう.

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{5.35}$$

### (1) 非共振の場合

まず,  $\Omega$  が整数でない場合を考えよう. この場合は, 式 (5.33) の第 1 式を解いて

$$x_0(t) = \frac{a_0}{\Omega^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k}{\Omega^2 - k^2} \cos kt + \frac{b_k}{\Omega^2 - k^2} \sin kt \right) = \varphi(t) \tag{5.36}$$

を得る. したがって式 (5.33) の第 2 式は次式となる.

$$\ddot{x}_1 + \Omega^2 x_1 = F(\varphi(t), \dot{\varphi}(t), 0, t) \tag{5.37}$$

この右辺は周期  $2\pi$  の周期関数である。このことは  $x_0(t)$  を解くのと同様な手順で解けることを意味している。以下同様にして  $x_k(t)$  を求めることができる。周期解は、これらを式 (5.31) に代入して求めることができる。この解は、 $\epsilon$  が十分小さい場合、初期値を  $(\varphi(0), \dot{\varphi}(0))$  の近傍を持つ唯一の周期解であることを示すことができる。

## (2) 共振の場合

次に、 $\Omega$  がある整数  $m$  に近い場合を考えよう。

$$m^2 - \Omega^2 = \epsilon a \quad (5.38)$$

および外力 (5.35) の周波数  $m\omega$  の係数も小さいと仮定しよう。

$$a_m = \epsilon\alpha, \quad b_m = \epsilon\beta \quad (5.39)$$

そうすると式 (5.27) は次式のように書き直すことができる。

$$\ddot{x} + m^2x = g(t) + \epsilon G(x, \dot{x}, \epsilon, t) \quad (5.40)$$

ここに

$$g(t) = f(t) - (a_m \cos mt + b_m \sin mt) = a_0 + \sum_{k=1, k \neq m}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (5.41)$$

$$G(x, \dot{x}, \epsilon, t) = F(x, \dot{x}, \epsilon, t) + (\alpha \cos mt + \beta \sin mt) + ax$$

とおいた。

さて、式 (5.40) について、周期解を求めよう。解を式 (5.31) と仮定して、式 (5.32), (5.33) と同様なべき級数展開を行うと、まず  $\epsilon^0$  の項から次式を得る。

$$\ddot{x}_0 + m^2x_0 = g(t) \quad (5.42)$$

この方程式の一般解は次式となる。

$$\begin{aligned} x_0(t) &= M_0 \cos mt + N_0 \sin mt + \frac{a_0}{m^2} + \sum_{k=1, k \neq m}^{\infty} \left( \frac{a_k}{m^2 - k^2} \cos kt + \frac{b_k}{m^2 - k^2} \sin kt \right) \\ &= M_0 \cos mt + N_0 \sin mt + \varphi(t) \end{aligned} \quad (5.43)$$

ここに、 $M_0, N_0$  は任意定数である。したがって、共振の場合は周期解はこの段階で一意的に定めることはできない。 $x_0(t)$  を式 (5.43) のままにして、 $x_1(t)$  を求める手順に移ろう。方程式は次式となる。

$$\ddot{x}_1 + m^2x_1 = G(x_0, \dot{x}_0, 0, t) = G_1 \quad (5.44)$$

そこで、式 (5.44) が周期解を持つためには、永年項が現れないための条件：

$$\begin{aligned} P(M_0, N_0) &= \int_0^{2\pi} G(x_0, \dot{x}_0, 0, \tau) \sin m\tau d\tau = 0 \\ Q(M_0, N_0) &= \int_0^{2\pi} G(x_0, \dot{x}_0, 0, \tau) \cos m\tau d\tau = 0 \end{aligned} \quad (5.45)$$

を満たす必要がある。この方程式より、 $M_0, N_0$  を決定すると、式 (5.43) の周期解が求まる。一方この条件のもとに、式 (5.44) の右辺は、

$$G(x_0, \dot{x}_0, 0, t) = G_1(t) = a_{01} + \sum_{k=1, k \neq m}^{\infty} (a_{k1} \cos kt + b_{k1} \sin kt) \quad (5.46)$$

と表すことができるので、周期解は次式となる。

$$x_1(t) = M_1 \cos mt + N_1 \sin mt + \frac{a_{01}}{m^2} + \sum_{k=1, k \neq m}^{\infty} \left( \frac{a_{k1}}{m^2 - k^2} \cos kt + \frac{b_{k1}}{m^2 - k^2} \sin kt \right) \quad (5.47)$$

$M_1, N_1$  の決定には、 $x_2(t)$  の方程式

$$\ddot{x}_2 + m^2 x_2 = G_{100}^1 x_1 + G_{010}^1 \dot{x}_1 + G_{001}^1 = G_2 \quad (5.48)$$

の右辺の関数に、永年項が現れない条件を使う。このような手順で次々と  $M_k, N_k$  を決定できるのは、式 (5.45) の解が単根であればよいことが少し煩雑な計算を試みれば分かる。すなわち

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial M_0} & \frac{\partial P}{\partial N_0} \\ \frac{\partial Q}{\partial M_0} & \frac{\partial Q}{\partial N_0} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (5.49)$$

を満たす根であれば、逐次計算が可能となる。また同時に、この条件があれば求めた解 (5.31) はその初期値を  $(x_1(0), \dot{x}_1(0))$  の近傍に持つ唯一の周期解であることも証明できる。

**【例 5.2】ダフティング方程式の基本調波共振**

例 4.4, 4.7 であげたダフティング方程式の典型的な場合：

$$\ddot{x} + \epsilon \zeta \dot{x} + \Omega^2 x + \epsilon c x^3 = B \cos t \quad (5.50)$$

の周期解を考えてみよう。

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = B \cos t - \epsilon(\zeta \dot{x} + c x^3) \quad (5.51)$$

とにおいて、周期解

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \epsilon^3 x_3(t) + \dots \quad (5.52)$$

を計算しよう。

**(1) 非共振： $\Omega \neq 1$  の場合**

式 (5.33) の方程式を逐次計算して

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \frac{B}{\Omega^2 - 1} \cos t \\ x_1(t) &= \frac{\zeta B}{(\Omega^2 - 1)^2} \sin t - \frac{3cB^3}{4(\Omega^2 - 1)^4} \cos t - \frac{cB^3}{4(\Omega^2 - 1)^3(\Omega^2 - 9)} \cos 3t \\ &\dots \end{aligned} \quad (5.53)$$

を得る。

(2) 基本調波共振： $\Omega \approx 1$  の場合

次の仮定をおこう.

$$1 - \Omega^2 = \epsilon a, \quad B = \epsilon b \quad (5.54)$$

式 (5.51) は次式となる.

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = \epsilon(b \cos t + ax - \zeta \dot{x} - cx^3) \quad (5.55)$$

解 (5.52) を代入して

$$\begin{aligned} \epsilon^0 &: \quad \ddot{x}_0 + x_0 = 0 \\ \epsilon^1 &: \quad \ddot{x}_1 + x_1 = b \cos t + ax_0 - \zeta \dot{x}_0 - cx_0^3 \\ &\dots \end{aligned} \quad (5.56)$$

を得る. したがって

$$x_0(t) = M_0 \cos t + N_0 \sin t \quad (5.57)$$

これを式 (5.56) の第 2 式に代入して

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 &= \left\{ \zeta M_0 + \left( a - \frac{3}{4} cr^2 \right) N_0 \right\} \sin t + \left\{ \left( a - \frac{3}{4} cr^2 \right) M_0 - \zeta N_0 + b \right\} \cos t \\ &\quad + \frac{1}{4} c(N_0^2 - 3M_0^2) N_0 \sin 3t + \frac{1}{4} c(3N_0^2 - M_0^2) M_0 \cos 3t \end{aligned} \quad (5.58)$$

ここに,

$$r^2 = M_0^2 + N_0^2$$

とおいた. この方程式が周期解を持つ条件は

$$\begin{aligned} P(M_0, N_0) &= \zeta M_0 + \left( a - \frac{3}{4} cr^2 \right) N_0 = 0 \\ Q(M_0, N_0) &= \left( a - \frac{3}{4} cr^2 \right) M_0 - \zeta N_0 + b = 0 \end{aligned} \quad (5.59)$$

となる.

また, このとき

$$x_1(t) = M_1 \cos t + N_1 \sin t - \frac{1}{32} c(N_0^2 - 3M_0^2) N_0 \sin 3t - \frac{1}{32} c(3N_0^2 - M_0^2) M_0 \cos 3t \quad (5.60)$$

となる. 式 (5.59) を整理すると次式を得る.

$$\left\{ \left( a - \frac{3}{4} cr^2 \right)^2 + \zeta^2 \right\} r^2 = b^2 \quad (5.61)$$

この式の単根が共振時の解を与える. 式 (5.61) を  $(b, r)$ -平面に描いた曲線を振幅特性,  $(a, r)$ -平面のそれを周波数応答曲線という. 図 5.5, 5.6 参照. これらの曲線は非線形共振現象の特徴を表している. すなわち, 外力の振幅  $b$  や系の角周波数  $a$  を適当に選ぶと応答  $r$  が 3 個得られる. これは線形共振にはなかったことである. 図 5.2 と図 5.6 を比較してみるとよい. 複数個の周期解が得られることはまた, それらの安定性の検討を必要とする. 次にこれを検討しよう. ■



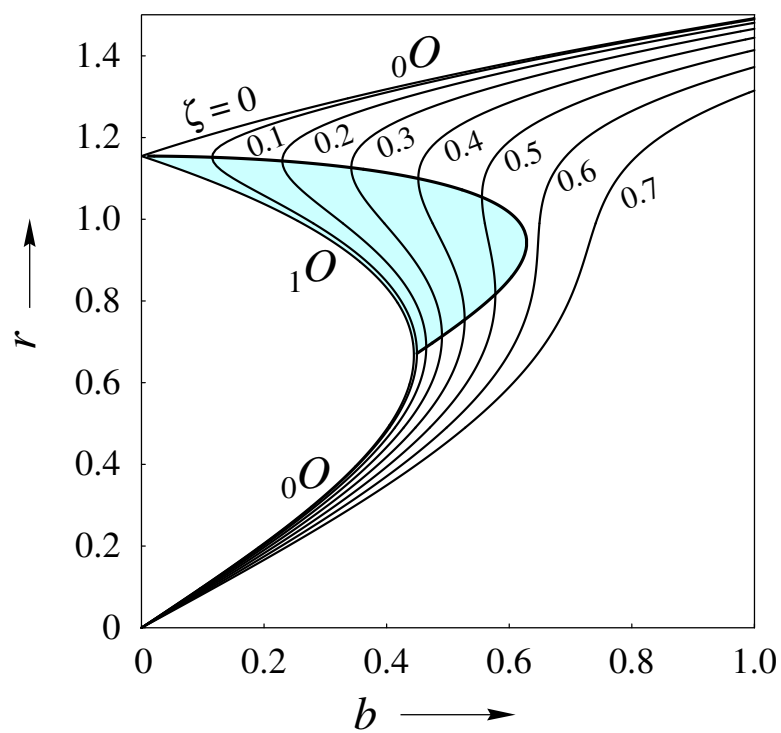


図 5.5 式 (5.61) で与えられる振幅特性 ( $a = c = 1.0$ ).

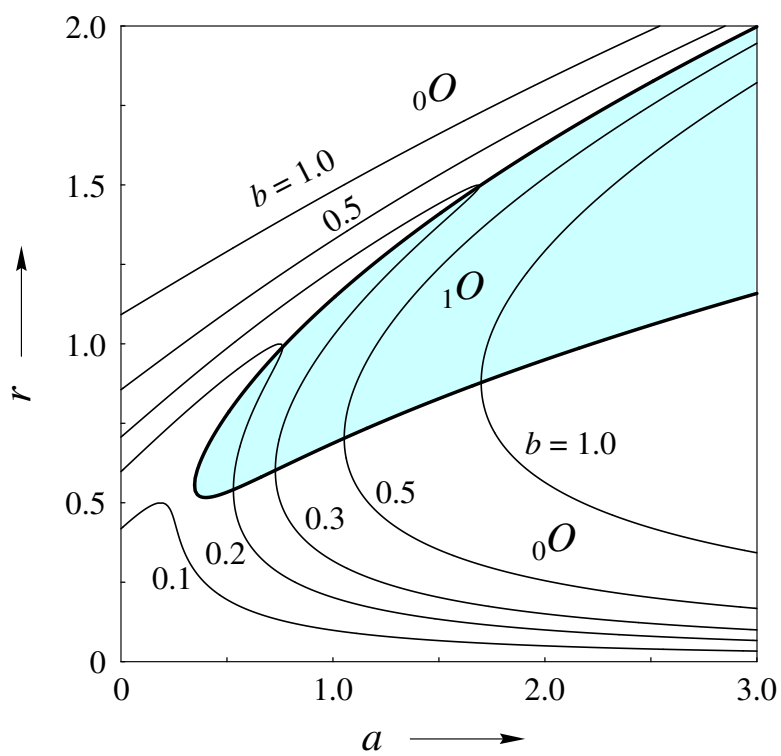


図 5.6 式 (5.61) で与えられる周波数特性 ( $c = 1, \zeta = 0.2$ ).

### 安定性の検討

さて、これまでに述べた方法で周期解 (5.31) が計算できたとして、その安定性を調べよう。以下共振の場合、すなわち式 (5.38) - (5.40) が成り立つ場合を考える。まず、周期解 (5.31) が求められたとし、これを次式としよう。

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \epsilon^3 x_3 + \dots = \varphi^*(t) \quad (5.62)$$

この解からの変分を

$$x(t) = \varphi^*(t) + \xi(t) \quad (5.63)$$

とし、変分方程式は次式となる。

$$\ddot{\xi} + m^2 \xi = \epsilon \frac{\partial G}{\partial x} \xi + \epsilon \frac{\partial G}{\partial \dot{x}} \dot{\xi} \quad (5.64)$$

そこで、この方程式の主基本行列解を摂動法で計算しよう。すなわち、解

$$\begin{aligned} \xi^{(1)}(t) &= \xi_0^{(1)}(t) + \epsilon \xi_1^{(1)}(t) + \epsilon^2 \xi_2^{(1)}(t) + \dots \\ \xi^{(2)}(t) &= \xi_0^{(2)}(t) + \epsilon \xi_1^{(2)}(t) + \epsilon^2 \xi_2^{(2)}(t) + \dots \end{aligned} \quad (5.65)$$

を、初期値

$$\begin{aligned} \xi_0^{(1)}(0) = 1, \quad \dot{\xi}_0^{(1)}(0) = 0, \quad \xi_k^{(1)}(0) = \dot{\xi}_k^{(1)}(0) = 0, \\ \xi_0^{(2)}(0) = 0, \quad \dot{\xi}_0^{(2)}(0) = 1, \quad \xi_k^{(2)}(0) = \dot{\xi}_k^{(2)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.66)$$

のもとで計算し、これによって安定性の条件を検討する。式 (5.65) を式 (5.64) に代入して  $\epsilon$  の等べきの項を取り出すと次式を得る。

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_0^{(1)} + m^2 \xi_0^{(1)} &= 0 \\ \ddot{\xi}_0^{(2)} + m^2 \xi_0^{(2)} &= 0 \\ \ddot{\xi}_1^{(1)} + m^2 \xi_1^{(1)} &= \epsilon \frac{\partial G(x_0, \dot{x}_0, 0, t)}{\partial x_0} \xi_0^{(1)} + \epsilon \frac{\partial G(x_0, \dot{x}_0, 0, t)}{\partial \dot{x}_0} \dot{\xi}_0^{(1)} \\ \ddot{\xi}_1^{(2)} + m^2 \xi_1^{(2)} &= \epsilon \frac{\partial G(x_0, \dot{x}_0, 0, t)}{\partial x_0} \xi_0^{(2)} + \epsilon \frac{\partial G(x_0, \dot{x}_0, 0, t)}{\partial \dot{x}_0} \dot{\xi}_0^{(2)} \end{aligned} \quad (5.67)$$

そこで、式 (5.67) の最初の 2 式の解は

$$\xi_0^{(1)} = \cos mt, \quad \xi_0^{(2)} = \frac{1}{m} \sin mt \quad (5.68)$$

となる。この解を残りの 2 式の右辺に代入し、初期条件を満たす解を求めると次式を得る。

$$\begin{aligned} \xi_1^{(1)}(t) &= \frac{1}{m} \int_0^t \left[ \frac{\partial G(x_0, \dot{x}_0, 0, \tau)}{\partial x_0} \cos m\tau - m \frac{\partial G(x_0, \dot{x}_0, 0, \tau)}{\partial \dot{x}_0} \sin m\tau \right] \sin m(t - \tau) d\tau \\ \xi_1^{(2)}(t) &= \frac{1}{m^2} \int_0^t \left[ \frac{\partial G(x_0, \dot{x}_0, 0, \tau)}{\partial x_0} \sin m\tau + m \frac{\partial G(x_0, \dot{x}_0, 0, \tau)}{\partial \dot{x}_0} \cos m\tau \right] \sin m(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.69)$$

次に、特性方程式の係数を計算する。まず、特性方程式は次式となる。

$$\chi(\mu) = \begin{vmatrix} \mu - \xi^{(1)}(2\pi) & -\xi^{(2)}(2\pi) \\ -\dot{\xi}^{(1)}(2\pi) & \mu - \dot{\xi}^{(2)}(2\pi) \end{vmatrix} = \mu^2 + a_1\mu + a_2 = 0 \quad (5.70)$$

ここに、

$$\begin{aligned} a_1 &= -\{\xi^{(1)}(2\pi) + \dot{\xi}^{(2)}(2\pi)\} \\ a_2 &= \xi^{(1)}(2\pi)\dot{\xi}^{(2)}(2\pi) - \xi^{(2)}(2\pi)\dot{\xi}^{(1)}(2\pi) \end{aligned} \quad (5.71)$$

とおいた。式 (5.71) に (5.65) の解を代入して整理すると

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 - \epsilon\{\xi_1^{(1)}(2\pi) + \dot{\xi}_1^{(2)}(2\pi)\} - \epsilon^2\{\xi_2^{(1)}(2\pi) + \dot{\xi}_2^{(2)}(2\pi)\} - \dots \\ a_2 &= 1 + \epsilon\{\xi_1^{(1)}(2\pi) + \dot{\xi}_1^{(2)}(2\pi)\} \\ &\quad + \epsilon^2\{\xi_2^{(1)}(2\pi) + \dot{\xi}_2^{(2)}(2\pi) + \xi_1^{(1)}(2\pi)\dot{\xi}_1^{(2)}(2\pi) - \xi_1^{(2)}(2\pi)\dot{\xi}_1^{(1)}(2\pi)\} + \dots \end{aligned} \quad (5.72)$$

となる。

さて、周期解のタイプは、第3章表 3.3 に示した判定条件で決めることができる。そのため、つぎの値を計算しておこう。

$$\begin{aligned} \chi(-1) &= 1 - a_1 + a_2 = 4 + \epsilon\{\dots\} + \dots > 0 \\ \chi(1) &= 1 + a_1 + a_2 = \epsilon^2\{\xi_1^{(1)}(2\pi)\dot{\xi}_1^{(2)}(2\pi) - \xi_1^{(2)}(2\pi)\dot{\xi}_1^{(1)}(2\pi)\} + \epsilon^3\{\dots\} + \dots \\ a_2 &= 1 + \epsilon\{\xi_1^{(1)}(2\pi) + \dot{\xi}_1^{(2)}(2\pi)\} + \dots \end{aligned} \quad (5.73)$$

これらの右辺を式 (5.69) を使って具体的に計算するため、それぞれの項を求めると次式を得る。

$$\begin{aligned} \xi_1^{(1)}(2\pi) &= -\frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial G(x_0, \dot{x}_0, 0, \tau)}{\partial x_0} \cos m\tau - m \frac{\partial G(x_0, \dot{x}_0, 0, \tau)}{\partial \dot{x}_0} \sin m\tau \right] \sin m\tau d\tau \\ &= -\frac{1}{m} \frac{\partial P}{\partial M_0} \\ \dot{\xi}_1^{(1)}(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial G(x_0, \dot{x}_0, 0, \tau)}{\partial x_0} \cos m\tau - m \frac{\partial G(x_0, \dot{x}_0, 0, \tau)}{\partial \dot{x}_0} \sin m\tau \right] \cos m\tau d\tau \\ &= \frac{\partial Q}{\partial M_0} \\ \xi_1^{(2)}(2\pi) &= -\frac{1}{m^2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial G(x_0, \dot{x}_0, 0, \tau)}{\partial x_0} \sin m\tau + m \frac{\partial G(x_0, \dot{x}_0, 0, \tau)}{\partial \dot{x}_0} \cos m\tau \right] \sin m\tau d\tau \\ &= -\frac{1}{m^2} \frac{\partial P}{\partial N_0} \\ \dot{\xi}_1^{(2)}(2\pi) &= \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial G(x_0, \dot{x}_0, 0, \tau)}{\partial x_0} \sin m\tau + m \frac{\partial G(x_0, \dot{x}_0, 0, \tau)}{\partial \dot{x}_0} \cos m\tau \right] \cos m\tau d\tau \\ &= \frac{1}{m} \frac{\partial Q}{\partial N_0} \end{aligned} \quad (5.74)$$

表 5.1 周期解のタイプとその条件.

周期解の型	条件	行列 $A$ の条件
完全安定 ( ${}_0D$ )	$0 < \chi(1), 0 < a_2 < 1$	$0 < \det A, \text{trace}A < 0$
正不安定 ( ${}_1D$ )	$\chi(1) < 0, 0 < a_2$	$\det A < 0$
完全不安定 ( ${}_2D$ )	$0 < \chi(1), 1 < a_2$	$0 < \det A, 0 < \text{trace}A$

ここに, 解 (5.43) を式 (5.45) に代入した関係式を用いた. したがって, 式 (5.73) は次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} \chi(1) &= \frac{\epsilon^2}{m^2} \det A + \epsilon^3 \{ \dots \} + \dots \\ a_2 &= 1 + \frac{\epsilon}{m} \text{trace}A + \epsilon^3 \{ \dots \} + \dots \end{aligned} \tag{5.75}$$

ここに, 行列

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\partial P}{\partial M_0} & \frac{\partial P}{\partial N_0} \\ -\frac{\partial Q}{\partial M_0} & \frac{\partial Q}{\partial N_0} \end{bmatrix} \tag{5.76}$$

を定義した.

周期解の分類に移ろう. まず, 充分小さい  $\epsilon$  に対して  $\chi(-1) > 0$  であるから,  $I$  型周期解は存在しないことが分かる. その他のタイプについて, 式 (5.75) を参照して分類すると表 5.1 となる.

**【例 5.3】ダフリング方程式の周期解の安定性**

例 5.2 で計算した周期解のタイプを見てみよう. 式 (5.59) より次式を得る.

$$\begin{aligned} \text{trace}A &= -2\zeta < 0 \\ \det A &= a^2 + \zeta^2 - 3acr^2 + \frac{27}{16}c^2r^4 \end{aligned} \tag{5.77}$$

したがって, 完全不安定周期解は存在しないことが分かる. 他方, 式 (5.61) から

$$\frac{db^2}{dr^2} = a^2 + \zeta^2 - 3acr^2 + \frac{27}{16}c^2r^4 = \det A \tag{5.78}$$

となる. このことから, 振幅特性において  $db^2/dr^2 > 0$  ならば完全安定,  $db^2/dr^2 < 0$  ならば正不安定周期解となる. このことは, 基本調波共振において 3 個の応答が得られる場合, 振幅  $r$  の大きい振動と小さい振動が安定になり, 中間の振幅の振動が不安定となることを示している. 大きい振幅の振動を共振状態 (resonant state), 小さいそれを非共振状態 (non-resonant state) という. どちらの振動に落ちつくかは最初与えた初期状態に依存して決まる. ■

### 5.2.2 平均化法

この小節でも  $\epsilon$  を小さなパラメータとする 2 階非自律方程式：

$$\ddot{x} + x = \epsilon G(x, \dot{x}, \epsilon, t) \quad (5.79)$$

の周期解について考えよう。

$$G(x, \dot{x}, \epsilon, t + 2\pi) = G(x, \dot{x}, \epsilon, t) \quad (5.80)$$

を仮定しておく。

式 (5.79) を 1 階連立方程式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \epsilon G(x, y, \epsilon, t) \end{aligned} \quad (5.81)$$

に書き直す。まず  $\epsilon = 0$  のときは式 (5.81) は解

$$\begin{aligned} x(t) &= u \cos t + v \sin t \\ y(t) &= -u \sin t + v \cos t \end{aligned} \quad (5.82)$$

を持つ。さて  $\epsilon \neq 0$  ( $0 < \epsilon \ll 1$ ) のとき、座標変換

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) \cos t + v(t) \sin t \\ y(t) &= -u(t) \sin t + v(t) \cos t \end{aligned} \quad (5.83)$$

によって式 (5.81) を  $(u, v)$  の微分方程式に変換してみよう。関係式

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{u}(t) \cos t + \dot{v}(t) \sin t - u(t) \sin t + v(t) \cos t \\ \dot{y}(t) &= -\dot{u}(t) \sin t + \dot{v}(t) \cos t - u(t) \cos t - v(t) \sin t \end{aligned} \quad (5.84)$$

を式 (5.81) に代入して

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) \cos t + \dot{v}(t) \sin t &= 0 \\ -\dot{u}(t) \sin t + \dot{v}(t) \cos t &= \epsilon G(u \cos t + v \sin t, -u \sin t + v \cos t, \epsilon, t) \end{aligned} \quad (5.85)$$

を得る。これを  $u, v$  について解くと

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -\epsilon G(u \cos t + v \sin t, -u \sin t + v \cos t, \epsilon, t) \sin t \\ \dot{v}(t) &= \epsilon G(u \cos t + v \sin t, -u \sin t + v \cos t, \epsilon, t) \cos t \end{aligned} \quad (5.86)$$

を得る。これが変数  $u, v$  についての微分方程式である。式 (5.86) は、このままでは式 (5.81) より見かけ上複雑な方程式となっていて解析が困難であるかにみえる。しかし右辺をみると  $\epsilon$  がどちらの式にもかかっている。したがって  $\epsilon$  が十分小さい場合、速度  $\dot{u}, \dot{v}$  は小さいといえる。すなわち  $u, v$  はゆっくりと変化する。これは  $\cos t, \sin t$  の変化に比べてゆっくりと変化するとの意味である。また、式 (5.86) は線形部が零 (2 つの零固有値) の系からの摂動系とみることができる。

さて、式 (5.86) の近似式として式 (5.86) の右辺を時間  $[0, 2\pi]$  で平均した方程式

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= -\frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(u \cos \tau + v \sin \tau, -u \sin \tau + v \cos \tau, \epsilon, \tau) \sin \tau d\tau \\ \dot{v}(t) &= \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(u \cos \tau + v \sin \tau, -u \sin \tau + v \cos \tau, \epsilon, \tau) \cos \tau d\tau\end{aligned}\quad (5.87)$$

を考える。このようにして得られた式 (5.87) を**平均化方程式**という。また、この手法はファン・デア・ポールによって始められ、一般に**平均化法** (method of averaging) と呼ばれている。

式 (5.86) の右辺は  $t$  に関して周期  $2\pi$  の周期関数であるから  $t$  に関して Fourier 級数に展開できる。

$$\begin{aligned}-G(x, y, \epsilon, t) \sin t &= \varphi_0(u, v) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varphi_{ck}(u, v) \cos kt + \varphi_{sk}(u, v) \sin kt \right\} \\ G(x, y, \epsilon, t) \cos t &= \psi_0(u, v) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \psi_{ck}(u, v) \cos kt + \psi_{sk}(u, v) \sin kt \right\}\end{aligned}$$

この右辺の定数項が式 (5.87) の右辺となっている：

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= \epsilon \varphi_0(u, v) \\ \dot{v}(t) &= \epsilon \psi_0(u, v)\end{aligned}\quad (5.88)$$

この方程式の平衡点  $(u_0, v_0)$  は式 (5.83) に代入して考えると分かるように、元の方程式 (5.81) の周期解を与える。また平衡点の安定性は、対応する周期解の安定性を意味する。

平均化された方程式 (5.88) を更に座標変換：

$$\begin{aligned}u &= A \cos \vartheta \\ v &= A \sin \vartheta\end{aligned}\quad (5.89)$$

することによって振幅と位相の方程式を導こう。問題によってはこの  $A, \vartheta$  表現が便利な場合がある。

$$\begin{aligned}x &= u \cos t + v \sin t = A \cos t \cos \vartheta + A \sin t \sin \vartheta = A \cos(t - \vartheta) \\ y &= -u \sin t + v \cos t = -A \sin t \cos \vartheta + A \cos t \sin \vartheta = -A \sin(t - \vartheta) \\ \dot{u} &= \dot{A} \cos \vartheta - \dot{\vartheta} A \sin \vartheta = -\frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(x, y, \epsilon, \tau) \sin \tau d\tau \\ \dot{v} &= \dot{A} \sin \vartheta - \dot{\vartheta} A \cos \vartheta = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(x, y, \epsilon, \tau) \cos \tau d\tau\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -\frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(A \cos(\tau - \vartheta), -A \sin(\tau - \vartheta), \epsilon, \tau) \sin(\tau - \vartheta) d\tau = \epsilon \Phi(A) \\ \dot{\vartheta} &= \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(A \cos(\tau - \vartheta), -A \sin(\tau - \vartheta), \epsilon, \tau) \cos(\tau - \vartheta) d\tau = \epsilon \Psi(A)\end{aligned}\quad (5.90)$$

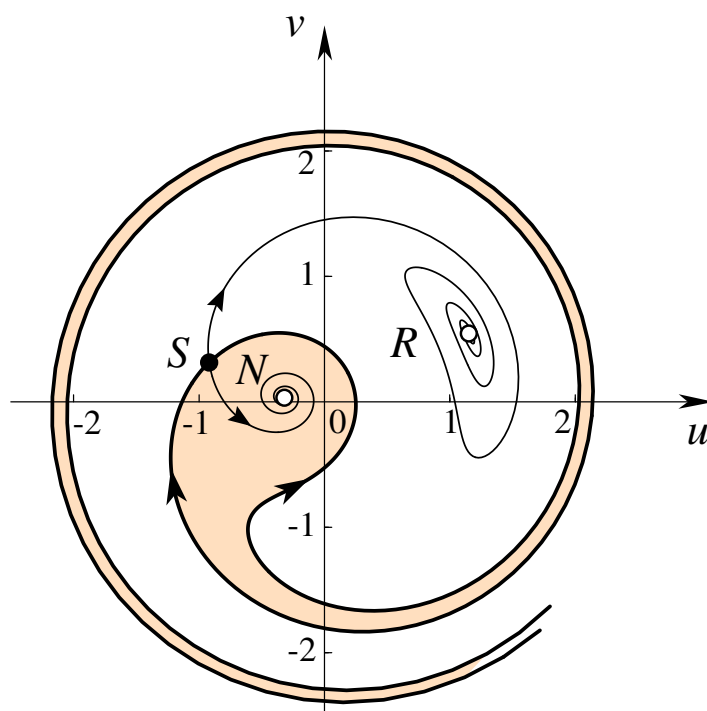


図 5.7 式 (5.95) の相平面図の例 ( $a = c = 1, b = 0.3, \zeta = 0.1$ ).

を得る. 特に, この方程式では右辺が  $A$  のみの関数となっているので解析が容易であることに注意しよう. 式 (5.90) の第 1 式の平衡点は

$$\Phi(A) = 0 \tag{5.91}$$

を満足する. これを  $A_0$  とし, 第 2 式に代入して

$$\vartheta(t) = \epsilon\Psi(A_0)t + \vartheta_0 \tag{5.92}$$

これより式 (5.81) の周期解は

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 \cos \left\{ (1 - \epsilon\Psi(A_0))t - \vartheta_0 \right\} \\ y(t) &= -A_0 \sin \left\{ (1 - \epsilon\Psi(A_0))t - \vartheta_0 \right\} \end{aligned} \tag{5.93}$$

となる. 解 (5.93) の安定性は平衡点 (5.91) の安定性と等価となる. 式 (5.90) の第 1 式より, 平衡点  $A_0$  は  $d\Phi(A_0)/dA < 0$  ならば漸近安定,  $d\Phi(A_0)/dA > 0$  ならば不安定である.

**【例 5.4】ダフティング方程式の周期解**

例 5.2 と 5.3 で解析したダフティング方程式を再び取りあげてみよう. 方程式 (5.55) すなわち,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \epsilon(b \cos t + ax - \zeta y - cx^3) \end{aligned} \tag{5.94}$$

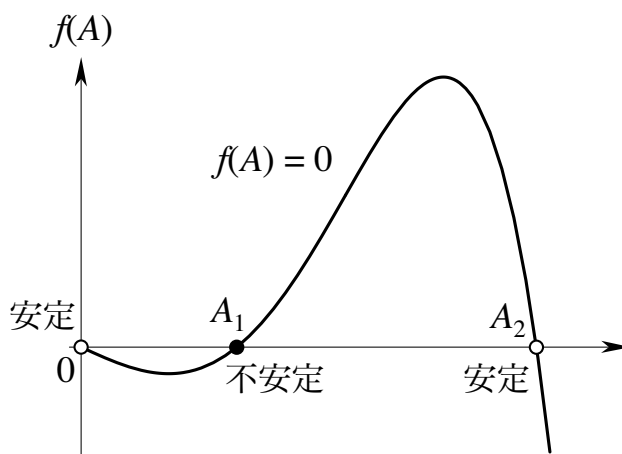


図 5.8 式 (5.98) の平衡点とその安定性.

を考える. 式 (5.83) から (5.87) までの変換と平均を行って, 平均化方程式 (5.88) は次式となる.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{\epsilon}{2} \left\{ \zeta u + \left( a - \frac{3}{4} cr^2 \right) v \right\} = -\frac{\epsilon}{2} P(u, v) \\ \dot{v} &= \frac{\epsilon}{2} \left\{ \left( a - \frac{3}{4} cr^2 \right) u - \zeta v + b \right\} = \frac{\epsilon}{2} Q(u, v) \end{aligned} \tag{5.95}$$

ここに,  $P, Q$  は式 (5.89) で定義した関数である. このことから, 式 (5.95) の平衡点は摂動法で求めた  $M_0, N_0$  とまったく一致することが分かる. 平均化方程式は自律系なので, 平衡点の情報以外にも状態  $u, v$  の運動を近似的に知ることができる. 式 (5.95) の相平面図の一例を図 5.7 に示した. ■

**【例 5.5】 硬いファン・デア・ポール方程式のリミット・サイクル**

もう 1 つの例として, 5 次の負性抵抗特性を持つファン・デア・ポール方程式:

$$\ddot{x} + \epsilon(\alpha - \beta x^2 + x^4)\dot{x} + x = 0 \tag{5.96}$$

のリミット・サイクルを求めてみよう.  $\epsilon, \alpha, \beta > 0$  と仮定する. なお, 平均化法は自律系についても同じような手順で解析が可能であることに注意しよう.

式 (5.96) を書き直して

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - \epsilon(\alpha - \beta x^2 + x^4)y \end{aligned} \tag{5.97}$$

に平均化法を適用する. この例では式 (5.90) を使って, 平均すると次式が導かれる.

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\frac{\epsilon}{2} A \left( \alpha - \frac{\beta}{4} A^2 + \frac{3}{8} A^4 \right) = \epsilon \Phi(A) \\ \dot{\vartheta} &= 0 \end{aligned} \tag{5.98}$$



したがって、まず振幅は、第1式より  $\beta > 2\sqrt{6\alpha}$  ならば、

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\beta - \sqrt{\beta^2 - 24\alpha}}, \quad A_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\beta + \sqrt{\beta^2 - 24\alpha}} \quad (5.99)$$

の2個存在し、 $A_1$  が不安定、 $A_2$  が安定となることが分かる。それぞれに対応して、式(5.96)に不安定および安定なリミット・サイクルのあることも理解できる。図5.8参照。原点は安定な平衡点である。また、この程度の近似的な解析では各リミット・サイクルの周波数の違いがどうかといった解析はできない。これは式(5.98)の第2式の右辺が零になってしまうからである。■

## 5.3 本章のまとめと文献

### 5.3.1 本章のまとめ

1. 周期的な外力の印加された系では、外力の周波数が系の固有振動の周波数、あるいはその整数分の一や整数倍、に近い値で共振現象がおこる。線形系では共振の振幅特性は一意的であるが、非線形系では複数個の応答（周期振動）がみられることがある。後者を非線形共振という。
2. 弱非線形系の周期解は摂動法や平均化法を用いて解析できる。
3. 平均化法では、非自律系の周期解の問題を自律系（平均化方程式）の平衡点の問題に翻訳して考察した。この手法は実際の問題でよく使用される。

### 5.3.2 本章の文献

本書では、摂動法と平均化法について2次元系を例にとりて説明した。これらの手法は非線形振動に関する解析的方法として多くの研究がある。また、級数展開の方法にも色々と工夫された解析法が確立されている。たとえばボゴリューボフとミトロポリスキーによる漸近展開法 [N3]、多変数摂動展開法 [D17] などが有名である。5.2 で述べた摂動法は最も素朴な手法ではないかと思われる。この部分はマルキン (Malkin) による名著の一部分を紹介させていただいた [N11]。高次元系、すなわち多自由度系についての議論も Malkin [N11]、や Rouche・Mawhin [O12] を参照してほしい。応用面では Andronov [N1]、Minorsky [N13]、Stoker [N19]、古屋・南雲 [N7] に古典的な例題がある。

## 5.4 練習問題 5

### 5.1 摂動法非共振の場合の存在証明

5.2.1A(1) で述べた非共振の場合の周期解の存在を次の手順に従って示せ。

(1) 第1近似解 (5.36)  $\varphi(t)$  の近傍にある周期解を

$$x(t, \xi, \eta, \epsilon) = \varphi(t) + \xi A(t) + \eta B(t) + \epsilon C(t) + \cdots \quad (5.100)$$

としよう。ただし初期値は

$$x(0, \xi, \eta, \epsilon) = \varphi(0) + \xi, \quad \dot{x}(0, \xi, \eta, \epsilon) = \dot{\varphi}(0) + \eta \quad (5.101)$$

を満たしているものとする。ここに  $\xi, \eta$  は  $\varphi(0), \dot{\varphi}(0)$  からの小さなずれを表す定数である。証明は、 $\epsilon = 0$  のとき存在する周期解  $\varphi(t)$  から、 $\epsilon \neq 0$  のとき解 (5.100) が一意的に定められることを示せばよい。式 (5.29) に式 (5.100) を代入し、 $A(t), B(t)$  の満たす方程式を導け。また、式 (5.101) を用いてこれらの初期値を定めよ。更にこの初期値を満たす  $A(t), B(t)$  を求めよ。

(2) 式 (5.100) が周期解となる条件は

$$\begin{aligned} G_1(\xi, \eta, \epsilon) &= x(2\pi, \xi, \eta, \epsilon) - x(0, \xi, \eta, \epsilon) = 0 \\ G_2(\xi, \eta, \epsilon) &= \dot{x}(2\pi, \xi, \eta, \epsilon) - \dot{x}(0, \xi, \eta, \epsilon) = 0 \end{aligned} \quad (5.102)$$

である。前問で求めた  $A(t), B(t)$  を式 (5.102) に代入し、 $\xi, \eta$  について整理して陰関数の定理を用い、 $\epsilon$  が十分小さい場合、初期値のずれ  $\xi, \eta$  が  $\epsilon$  の関数として存在することを示せ。

5.2 自律系の摂動法小さなパラメータ  $\epsilon$  を含んだ自律系

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \epsilon F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (5.103)$$

の周期解を摂動法によって計算しよう。周期解の周期が未知なので  $\tau = \omega t$  と変換して

$$\omega^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \epsilon F\left(x, \omega \frac{dx}{d\tau}\right) \quad (5.104)$$

の周期  $2\pi$  の周期解を次のべき級数として求めよ。

$$\begin{aligned} x(\tau) &= x_0(\tau) + \epsilon x_1(\tau) + \epsilon^2 x_2(\tau) + \dots \\ \omega &= 1 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots \end{aligned} \quad (5.105)$$

ただし、初期値を定めないとこの解は一意的に定まらないので、初期値を

$$x'(0) = x'_0(0) + \epsilon x'_1(0) + \epsilon^2 x'_2(0) + \dots = 0$$

すなわち

$$x'_0(0) = x'_1(0) = x'_2(0) = \dots = 0 \quad (5.106)$$

と仮定する。ここに ' は  $\tau$  に関する微分を表す。

5.3 前問の結果を用いてファン・デア・ポール方程式

$$\ddot{x} + x = \epsilon(1 - x^2)\dot{x} \quad (5.107)$$

の周期解を計算せよ。

5.4 マシュー方程式

$$\ddot{x} + (a + \epsilon \cos 2t)x = 0 \quad (5.108)$$

の周期解を摂動法で計算しよう。例 4.6 で見たことから、周期解はパラメータが図 4.6 の安定限界を表す曲線（太線）上にある場合に存在する。この解を

$$\begin{aligned} a &= k^2 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 + \dots \\ x_C(t) &= \cos kt + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots \\ x_S(t) &= \sin kt + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots \end{aligned} \quad (5.109)$$

とにおいて計算しよう.  $k = 0, 1, 2$  の場合について  $a_1, a_2, x_1(t), x_2(t)$  を求めよ.

- 5.5 ダフィング方程式の基本調波共振における振幅特性 (5.59) について  $c < 0$  の場合の応答を図 5.7 と同様に描き特性の違いを検討せよ.

- 5.6 ファン・デア・ポール方程式の基本調波同期外力を印加したファン・デア・ポール方程式

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + \Omega^2 x = B \cos t \quad (5.110)$$

を考える. ただし,  $\Omega \approx 1$  とし,  $1 - \Omega = \epsilon a$ ,  $B = \epsilon b$  とする. 例 5.2 に習って周期解を計算し, 周波数特性を求め, 周期解の安定性を調べよ.

- 5.7 ダフィング・レーリィー方程式の基本調波同期外力を印加したダフィング・レーリィー方程式

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - \dot{x}^2)\dot{x} + x + \epsilon x^3 = \epsilon b \cos \nu t \quad (5.111)$$

を考える. この方程式を式 (5.81) のように 1 階連立方程式に書き直し, 平均化法により, 平均化方程式を導出せよ.

## 第 6 章

# 平衡点と周期解の数値計算

解析的方法で接近が難しい強非線形系の平衡点や周期解を求めるには、何らかの数値解析的方法に頼らざるを得ない。この章では、数値計算を前提とした解析方法について述べる。平衡点や固定点の計算には、収束が早いニュートン法を用いることにする。6.1 で平衡点の計算を例にしてニュートン法とその使用法を簡単に紹介する。6.2 では占部・ガレルキン法として知られている周期解の計算方法を略述する。そのあと工学の分野で広く知られている調和平衡法や形式的な平均化法を占部・ガレルキン法の 1 近似手法として説明する。

周期解を求める問題では、ニュートン法を使用する際必要となるヤコビ行列の計算に変分方程式の解が有効に使用できる。そこで、6.3 において初期値やパラメータに関する変分方程式についてまとめておいた。周期解を求めるためのポアンカレ写像の固定点の計算は 6.4 で述べる。

### 6.1 平衡点の計算：ニュートン法

状態空間  $M \subset R^n$  で定義された自律系：

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda) \quad (6.1)$$

を考えよう。これまでのように  $t$  は時刻を表す実数であり、 $x$  は状態、 $\lambda$  はパラメータを表す：

$$t \in R, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \in R^m$$

また、右辺を定義している写像：

$$f : M \times R^m \rightarrow R^n; (x, \lambda) \mapsto f(x, \lambda)$$

は 2 つの引数について連続かつ必要な回数だけ微分可能と仮定しよう。

この系の平衡点とは、相速度が零となる点、すなわち

$$f(x, \lambda) = 0 \quad (6.2)$$

を満足する点のことであった。この節では、この平衡点を数値的に計算する問題を取りあげ、必要となる事項を検討する。

式 (6.1) は強非線形系であり、平衡点や周期解の計算は数値的に求める以外に一般手法は知られていない。実際、状態空間  $M$  全体にわたって、式 (6.2) を満たす平衡点  $x$  をすべて求める問題はそれ自身で既に難しい問題といえる。ここでは、このような大域的な問題を取りあげるのではなく、ある程度の近似解が得られている場合に、数値的に満足のいく解を求める問題を考えてみよう。これには問題に応じて定式化した方程式をニュートン法で解くとよい。そこで以下では「数値計算するには、どのような問題設定にすればよいのか」といった、むしろ計算を具体的に始める以前に処理しておく必要のある問題を取りあげる。

線形連立方程式、行列の固有値問題、および常微分方程式の初期値問題を解くための種々の数値計算法については数値解析の教科書を参照してもらうことを前提としてここでは取り立てて議論しない。実際に具体的な力学系が与えられて、解を数値計算するには、解の定性的性質に合わせて適切な計算手法を選択しなければならない。

### 6.1.1 平衡点の計算：ニュートン法

方程式 (6.2) を満たす平衡点を求める問題を考えよう。先にも述べたように局所的な問題にはニュートン法を用いる。

一般に、数値計算によって方程式の根を求めるには次の手順に従う。

- (1) 何らかの情報をもとにして最初の近似値、すなわち最初の近似値（初期近似値）を求めておく。
- (2) 適切な漸化式を構成し、この漸化式によって逐次近似値を生成する。
- (3) 引き続き近似値間のノルムや関数の値のノルムが、あらかじめ定めておいた誤差の範囲にはいれれば計算を終了する。

この手順は、まさに求めようとする根あるいは解が、離散力学系の漸近安定な固定点となるように、1 つの力学系を構成する問題である。ニュートン法は収束の良いこの力学系の 1 つと考えられる。

さて、ニュートン法では、漸化式として次式を使用する。

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + h(k) \\ Df(x(k), \lambda)h(k) &= -f(x(k), \lambda) \end{aligned} \tag{6.3}$$

あるいは、まとめて書くと次式となる。

$$x(k+1) = x(k) - [Df(x(k), \lambda)]^{-1} f(x(k), \lambda) \tag{6.4}$$

ここに

$$Df(x(k), \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(k), \lambda) \tag{6.5}$$

は、式 (6.2) の点における微分、すなわちヤコビ行列を表す。なお、具体的な計算では式 (6.4) によって近似値を逐次生成するのではなく、式 (6.3) 第 2 式の連立方程式を解いて  $h(k)$  を求め、これを第 1 式に代入する。

さて、ニュートン法で問題となることは、漸化式 (6.4) から

$$\det(Df(x(k), \lambda)) = 0 \quad (6.6)$$

となる平衡点では、近似列を生成できないことである。これはヤコビ行列が零固有値を少なくとも1つ持つことを意味し、方程式 (6.2) に重複した根の存在することを意味している。この場合については次章において分岐の問題として取りあげる。もうひとつの問題は、いかにして最初の近似値を求めるかという初期値設定もしくは探索問題である。これは多くの場合、問題の出典にさかのぼって問題の性質から見いだすことができる。

以下、非線形共振現象の例を考えながらこれらの問題を検討してみよう。

### 【例 6.1】 ダフィング方程式の基本調波共振 (平均化方程式の平衡点解析)

例 5.4 で扱ったダフィング方程式 (5.94) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \epsilon(b \cos t + ax - \zeta y - cx^3) \end{aligned} \quad (6.7)$$

の基本調波共振に対応する周期解 (5.83) :

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) \cos t + v(t) \sin t \\ y(t) &= -u(t) \sin t + v(t) \cos t \end{aligned} \quad (6.8)$$

を考える。この解に対する平均化方程式 (5.95) :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\zeta u - \left(a - \frac{3}{4}cr^2\right)v = f(u, v, \lambda) \\ \dot{v} &= \left(a - \frac{3}{4}cr^2\right)u - \zeta v + b = g(u, v, \lambda) \end{aligned} \quad (6.9)$$

の平衡点を計算し、式 (6.7) の周期解の性質を調べてみよう。ここに、

$$r^2 = u^2 + v^2 \quad (6.10)$$

とおき、時間を  $t \rightarrow \epsilon t/2$  とスケール変換して、両式から  $\epsilon/2$  を消去してある。さらに、この式に含まれる2個のパラメータを

$$\lambda = (b, \zeta) \in R^2 \quad (6.11)$$

とおいた。式 (5.95) に含まれていたパラメータ  $a, c$  は簡単のため  $a = c = 1$  とした。すなわち、周波数  $a$  を固定し外力の振幅  $b$  と系の減衰定数  $\zeta$  をパラメータとして振幅特性を検討する。

さて、式 (6.9) の平衡点は次式を満足する。

$$\begin{aligned} f(u, v, \lambda) &= -\zeta u - \left(a - \frac{3}{4}cr^2\right)v = 0 \\ g(u, v, \lambda) &= \left(a - \frac{3}{4}cr^2\right)u - \zeta v + b = 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

式 (6.12) を満足する平衡点と式 (6.7) の周期解の関係は式 (6.8) によって対応づけられている。これを表 6.1 にまとめて示しておいた。

表 6.1 平衡点と周期解の対応関係および特性と性質.

用語の名称と解の性質	式 (6.9) の平衡点	式 (6.7) の周期解
振幅	平衡点のノルム $r$	周期解 (6.8) の振幅
安定性	$_0O$ タイプの平衡点	$_0D$ タイプの周期解
	$_1O$ タイプの平衡点	$_1D$ タイプの周期解
共振と非共振	$r$ の大きい平衡点	共振状態の周期解
	$r$ の小さい平衡点	非共振状態の周期解
振幅特性	パラメータ $b$ の変化に対する $r$ の特性曲線	
分岐曲線	$(b, \zeta)$ 平面内での平衡点の個数の変化を表す曲線	

### (1) 平衡点のパラメータ依存性

はじめに検討する現象を概観しておこう. この特殊な問題では, 式 (6.12) 第 2 式の  $b$  を右辺に移項した後, 両式を 2 乗して加えると式 (5.61) でみたように  $r^2$  のみの式となる.

$$\left\{ \left( 1 - \frac{3}{4}r^2 \right)^2 + \zeta^2 \right\} r^2 = b^2 \quad (6.13)$$

したがって,  $r^2$  に関するこの 3 次方程式を吟味すれば種々の性質を調べることができる. 振幅  $r$  がパラメータ  $(\zeta, b)$  の関数であると考え, 式 (6.13) が表す曲面 (パラメータに対する平衡点の集合) を描いてみよう. 図 6.1 の濃淡で表した曲面がこれである.  $(\zeta, b)$  が小さい部分で曲面が折り重なって 3 重になった部分が生じることに注意しよう. この曲面を  $\zeta$  を固定しながら  $b$  を変化させて  $(b, r)$  平面に射影した図が例 5.2 でみた振幅特性である. 図 5.5 参照. また曲面が垂直になる点の集合は曲線となる. この曲線を  $(\zeta, b)$  平面に射影するとパラメータ平面内で平衡点の個数が 1 個の領域と 3 個の領域の境界線を与えることが分かる. 平衡点の個数の変化は, 系の定性的変化を意味する. この図は平衡点の分岐曲線を表している.

さて,  $\zeta$  を一定にして,  $b$  を変化させて  $r$  の値 (振幅特性) を追跡しよう. 図 6.2 は  $\zeta = 0.1$  とした場合の曲線を示している. 各  $r$  に対する平衡点の位相的タイプも記入しておいた. この特性は, 振動の跳躍現象や履歴現象を示す典型的な例となっている. これを簡単に説明しておこう. いま  $b = 0$  より外力の振幅  $b$  を徐々に大きくしてゆくと振幅  $r$  も曲線に沿って大きくなる.  $b = b_2$  で 2 個の  $r$  が合体消滅し, 更に  $b$  を大きくすると  $r$  の値は上部の  $r$  の値へと急変する. これが振幅の**跳躍現象**である. 同じことは  $b$  を大きな値から減少させた場合に  $b = b_1$  で起こる.  $b_1 < b < b_2$  では,  $r$  の値は 3 個ある. 安定な平衡点が 2 個, サドルが 1 個である. 状態がどちらの平衡点に落ち着くかは, それ以前に状態

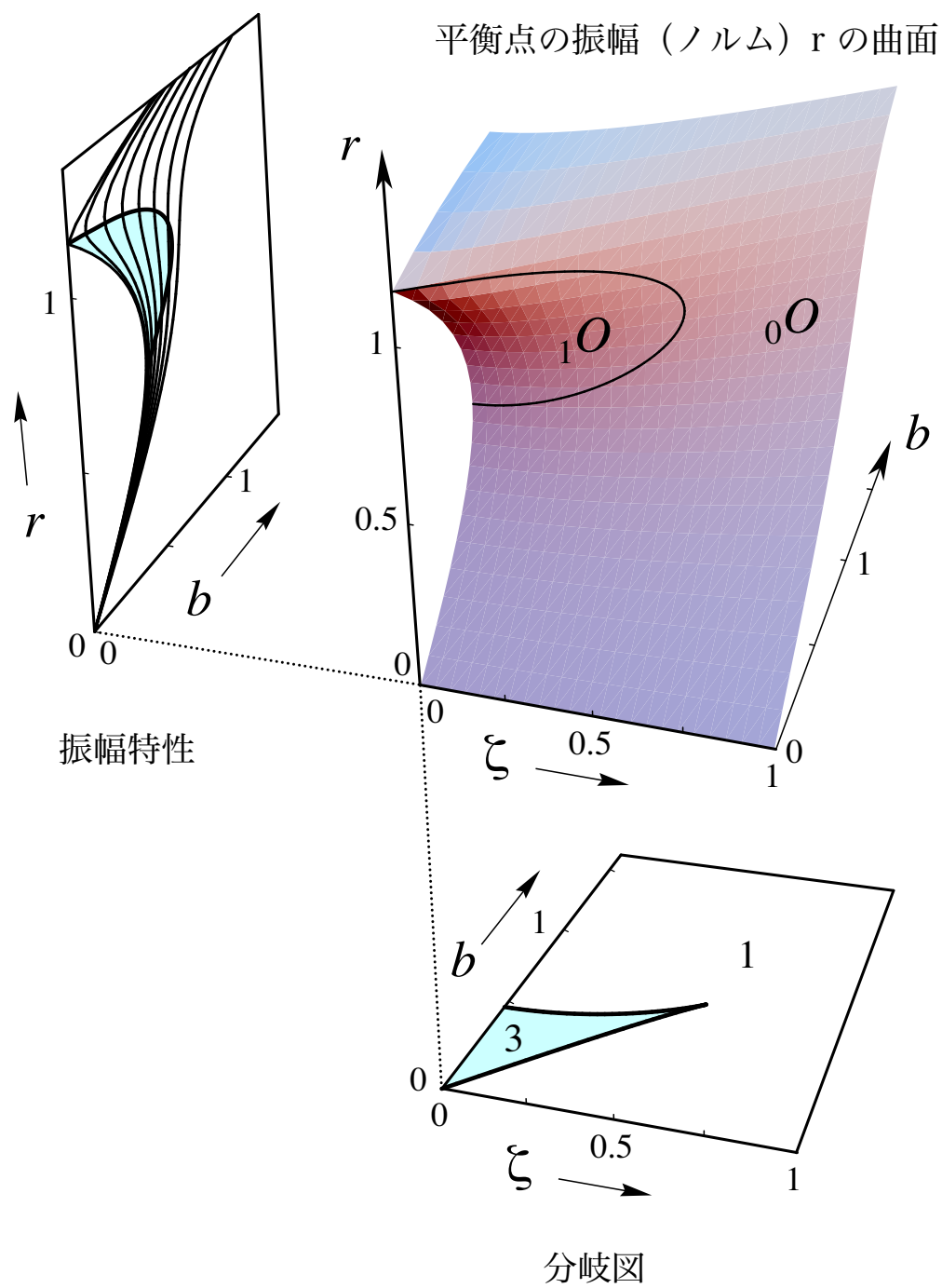


図 6.1 パラメータ  $(b, \zeta)$  に対する振幅  $r$  の曲面.



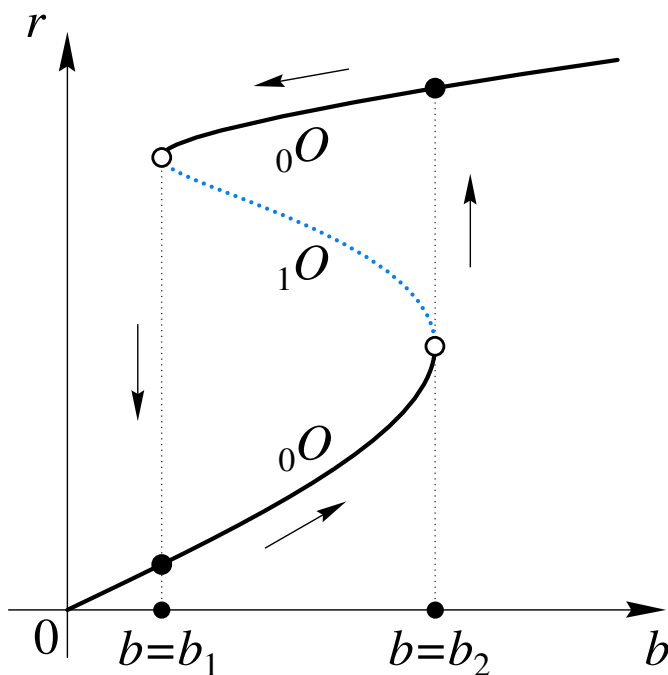


図 6.2 振幅特性  $\zeta = 0.1$ .

がどこにあったか（すなわち初期値がどうであったか）に依存する。これを**履歴現象**という。  $b$  の値を変化させた場合の相平面図の変化の一例を図 6.3 に描いておいた。原点近くの安定な平衡点は、元のダフティング方程式では振幅の小さい非共振状態を表す周期解に対応している。  $b = b_1$  で相平面の別の場所に新しくサドルと結節点が癒着した退化平衡点が生まれる。その後これらは共振状態に対応した安定な平衡点とサドルに分かれる。更に  $b$  が大きくすると  $b = b_2$  において、サドルは非共振に対応する平衡点と癒着消滅する。このように図 6.1 に示した平衡点の曲面をみると、パラメータ  $b$  と  $\zeta$  を変化させたとき相平面図がどう変化するかを概観できる。

(2) ニュートン法による平衡点の計算

式 (6.12) をニュートン法を用いて解くこと考えよう。ヤコビ行列は

$$Df(u, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\zeta + \frac{3}{2}uv & -1 + \frac{3}{4}(u^2 + 3v^2) \\ 1 - \frac{3}{4}(3u^2 + v^2) & -\zeta - \frac{3}{2}uv \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

となる。したがって

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \zeta^2 + 1 - 3r^2 + \frac{27}{16}r^4 = 0 \tag{6.15}$$

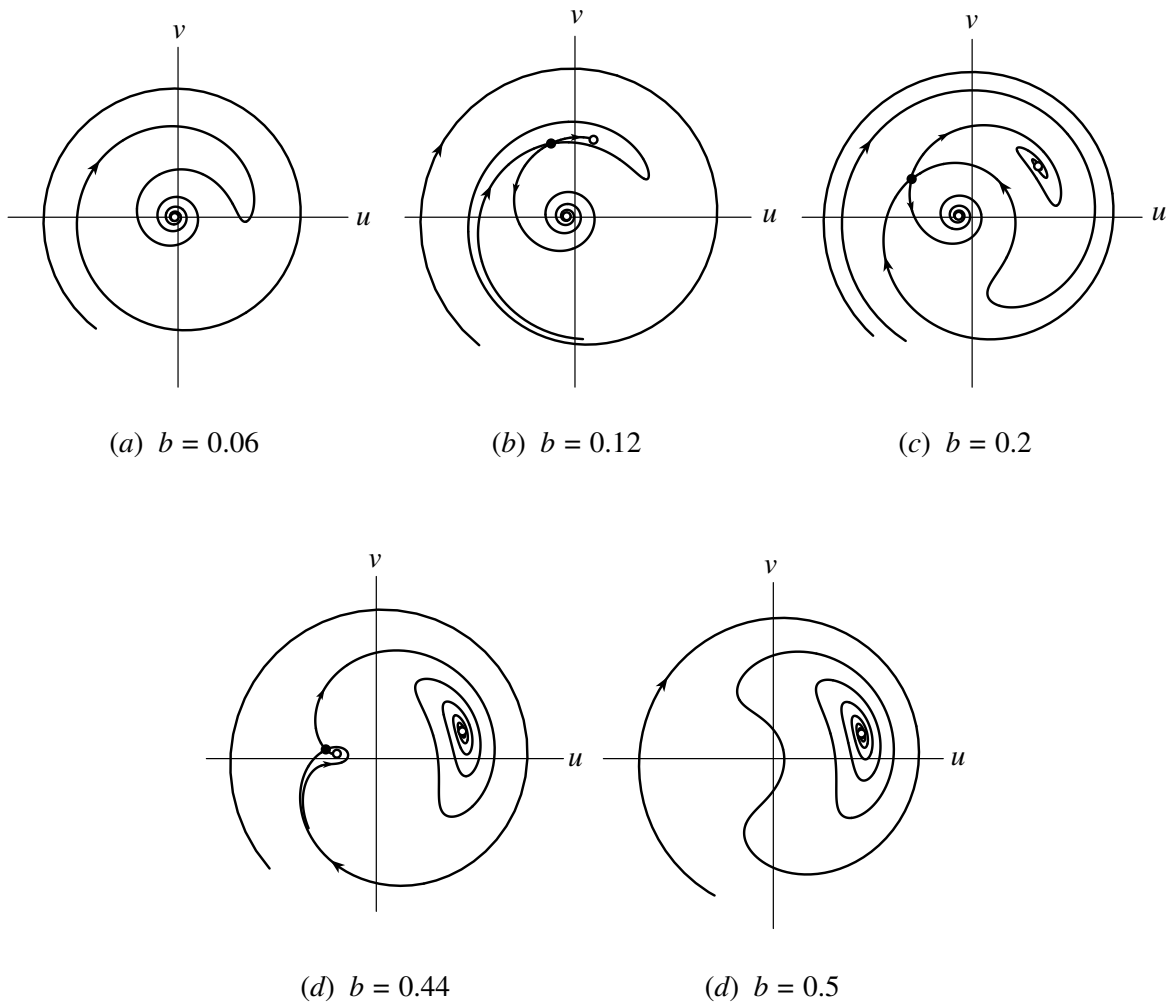


図 6.3 相平面図. 白丸は安定な平衡点を, 黒丸はサドルを表す.  $\zeta = 0.1$ .

でない限り, 連立方程式

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u(k), v(k)) & \frac{\partial f}{\partial v}(u(k), v(k)) \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u(k), v(k)) & \frac{\partial g}{\partial v}(u(k), v(k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(k) \\ h_2(k) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f(u(k), v(k), \lambda) \\ g(u(k), v(k), \lambda) \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

を解いて, 反復公式

$$\begin{aligned} u(k+1) &= u(k) + h_1(k) \\ v(k+1) &= v(k) + h_2(k) \end{aligned} \quad (6.17)$$

に代入し, ニュートン法を実行できる.

### (3) 振幅特性の計算

上述の方法を応用して図 6.2 を描いてみよう. パラメータの 1 つである外力の振幅  $b$  を変化させ, 振幅  $r$  を追跡する. まず  $b = 0.1$  程度のパラメータで近似解を  $r = 0$  とし, 解を計算したのち  $b$  を徐々に

に大きくしながら固定した各  $b$  で解を追跡する. 条件 (6.15) が成立する  $b = b_2$  近傍にくとニュートン法が使えなくなる. そこで, 今度は  $b = 1.5$  付近で近似解を求め,  $b$  を減少させて振幅を求める. この場合も式 (6.15) が成り立つ  $b = b_1$  近くで計算が停止する. 最後に適当な  $b$  の値に対してサドルとなる平衡点の近似解を求め,  $b$  を両側に変化させて曲線を追跡する. サドルに対する近似解を得るには (1) で述べた情報を使えばよい. 結局ヤコビ行列が特異となる近傍以外は曲線を追跡できたこととなる\*1.

#### (4) 2つのパラメータを変えた場合の平衡点の追跡

外力の振幅  $b$  と減衰定数  $\zeta$  を変えて, この2変数パラメータ平面内で平衡点が3個存在する領域を求める問題を考えてみよう. 平衡点の個数が変化する境界線は式 (6.15) で決まることに注意しよう. そこで問題を次のように考え直して解くことにする.

状態  $(u, v)$  とパラメータ  $(b, \zeta)$  を合わせた4次元空間において, 式

$$\begin{aligned} f(u, v, b, \zeta) &= -\zeta u - \left(1 - \frac{3}{4}r^2\right)v = 0 \\ g(u, v, b, \zeta) &= \left(1 - \frac{3}{4}r^2\right)u - \zeta v + b = 0 \\ h(u, v, b, \zeta) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \zeta^2 + 1 - 3r^2 + \frac{27}{16}r^4 = 0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

を満足する集合は, 一般に曲線となる. したがってこの曲線を, 状態とパラメータの積空間内で追跡しよう. 曲線の追跡は曲線に沿ったベクトル場を構成して微分方程式を解けばよいが, ここでは取りあえず,  $\zeta$  を固定し  $(x, y, b)$  を変数と考えて式 (6.18) をニュートン法で解くことにしよう. この場合, 初期値となる近似値は, 上述 (3) で振幅特性を計算した際, 式 (6.15) が成立しなくなって計算が停止した時の値がそっくり使用できる. 式 (6.18) のヤコビ行列は次式となる.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial b} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial b} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\zeta + \frac{3}{2}uv & 1 - \frac{3}{4}(u^2 + 3v^2) & 0 \\ 1 - \frac{3}{4}(3u^2 + v^2) & -\zeta - \frac{3}{2}uv & 1 \\ -6u + \frac{27}{4}r^2u & -6v + \frac{27}{4}r^2v & 0 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

ここで3行目の要素は  $f, g$  の2階微分となっていることに注意しよう. 固定しておいた  $\zeta$  を徐々に変えて式 (6.18) の解を求め, 平面に結果をプロットすれば3個解の存在する領域を知ることができる. たとえば図 6.4 参照. ここでも図中に示した点  $C$  でヤコビ行列 (6.19) が特異となってしまう. そこで点  $C$  を求めるにはこの条件を (6.18) に付加した4個の方程式を4個の変数  $(x, y, b, \zeta)$  について解くことが考えられる. このような図を平衡点の**分岐図** (bifurcation diagram) という. このことについては次章で詳しく考察する. ■

\*1 この例題では振幅特性 (6.13) を「 $b$  が  $r$  の関数である」と考えると,  $r$  を変化させて  $b$  を追跡すれば曲線が求められる.

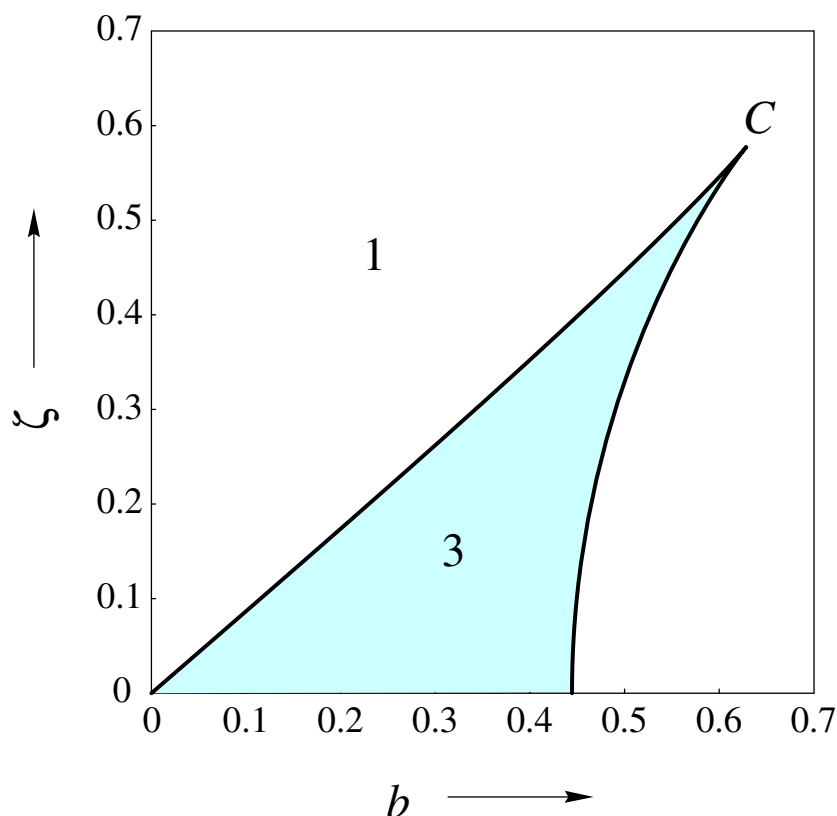


図 6.4 平衡点の分岐図. 曲線上で平衡点对の発生・消滅が起こる.

## 6.2 占部・ガレルキン法と調和平衡法

この節では強非線形系の周期解を数値的に求める占部・ガレルキン法について略述する. そのあと, 占部・ガレルキン法の第一近似である調和平衡法とこれに関連した形式的な平均化法を述べる. これらはどちらも数学的にはかなり荒っぽい近似手法と考えられるが, 工学の諸分野では古くから使われてきた実用性のある方法である.

### 6.2.1 占部・ガレルキン法

ここでは周期的非自律系を例にとって計算の手順を説明しよう. いま, 状態空間  $M \subset R^n$  で定義された系:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (6.20)$$

を考える. 右辺は時間に関して周期  $2\pi$  の周期関数:

$$f(t + 2\pi, x) = f(t, x)$$

とし、各引数について連続でかつ必要な回数だけ微分可能な性質を持つと仮定しよう。また、記法を簡単にするため方程式

$$F(t, x, \dot{x}) = f(t, x) - \dot{x} \quad (6.21)$$

を考える。

さて、式 (6.21) が周期  $2\pi$  の周期解  $x(t)$  を持っていたとすると、これは次式のようにフーリエ級数に展開できる。

$$x(t) = \varphi(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (6.22)$$

占部・ガレルキン法とは、式 (6.22) の係数ベクトル  $(a, b) = (a_0, a_1, b_1, \dots)$  を有限個近似計算する手法である。

式 (6.22) を式 (6.21) の左辺に代入し、フーリエ級数展開した式を

$$F(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) = F_{c0} + \sum_{k=1}^{\infty} (F_{ck} \cos kt + F_{sk} \sin kt) \quad (6.23)$$

とすれば、式 (6.21) より三角関数の各係数は零となる。

$$\begin{aligned} F_{c0}(a, b) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\tau, \varphi(\tau), \dot{\varphi}(\tau)) d\tau = 0 \\ F_{ck}(a, b) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\tau, \varphi(\tau), \dot{\varphi}(\tau)) \cos k\tau d\tau = 0 \quad k = 1, 2, \dots \\ F_{sk}(a, b) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\tau, \varphi(\tau), \dot{\varphi}(\tau)) \sin k\tau d\tau = 0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

そこで、この可算無限個の方程式を有限個で近似し、式 (6.24) の近似解を得る方法が、占部によって研究されたガレルキン法である。また彼は、逆に得られた近似解から式 (6.24) の真の解の存在の言えることも示した。以下計算の手続きのみを示しておこう。ここでもニュートン法を用いる。その際の計算がすべて数値的になされることを見ておきたい。

周期解 (6.22) を  $m$  次の高調波で打ち切った近似周期解を

$$x(t) = \varphi(t) = a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (6.25)$$

とする。これを  $m$  次ガレルキン近似解という。これを式 (6.21) に代入し、 $m$  次の高調波までの係数を零とおくと、式 (6.24) と同様な  $(2m+1)n$  個の方程式

$$\begin{aligned} F_{c0}(a, b) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\tau, \varphi(\tau), \dot{\varphi}(\tau)) d\tau = P_{c0}(F) = 0 \\ F_{ck}(a, b) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\tau, \varphi(\tau), \dot{\varphi}(\tau)) \cos k\tau d\tau = P_{ck}(F) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, m \\ F_{sk}(a, b) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\tau, \varphi(\tau), \dot{\varphi}(\tau)) \sin k\tau d\tau = P_{sk}(F) = 0 \end{aligned} \quad (6.26)$$

を得る. これを  $m$  次**の決定方程式**と呼ぶ. ただし

$$(a, b) = (a_0, a_1, b_1, \dots, a_m, b_m) \quad (6.27)$$

となっている. また, 各係数を取り出す積分の操作を  $P_{c0}, P_{ck}, P_{sk}, \dots$  と略記した.

そこで, 式 (6.27) の係数  $(a, b)$  を未知変数と考えて式 (6.26) を解く. ニュートン法で解くことにし, ヤコビ行列の各要素がどうなるか見てみよう. まず

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a_0} &= \frac{\partial F_{c0}}{\partial a_0} + \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial F_{ck}}{\partial a_0} \cos kt + \frac{\partial F_{sk}}{\partial a_0} \sin kt \right) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a_0} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial a_0} = \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial a_j} &= \frac{\partial F_{c0}}{\partial a_j} + \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial F_{ck}}{\partial a_j} \cos kt + \frac{\partial F_{sk}}{\partial a_j} \sin kt \right) = \frac{\partial F}{\partial x} \cos jt - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} j \sin jt \\ \frac{\partial F}{\partial b_j} &= \frac{\partial F_{c0}}{\partial b_j} + \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial F_{ck}}{\partial b_j} \cos kt + \frac{\partial F_{sk}}{\partial b_j} \sin kt \right) = \frac{\partial F}{\partial x} \sin jt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} j \cos jt \end{aligned} \quad (6.28)$$

の関係のあることに注目して, 各要素は次式となる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{c0}}{\partial a_0} &= P_{c0} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial F_{ck}}{\partial a_0} &= P_{ck} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial F_{sk}}{\partial a_0} = P_{sk} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right), \quad k = 1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial F_{c0}}{\partial a_j} &= P_{c0} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \cos jt - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} j \sin jt \right), \quad j = 1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial F_{c0}}{\partial b_j} &= P_{c0} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \sin jt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} j \cos jt \right), \\ \frac{\partial F_{ck}}{\partial a_j} &= P_{ck} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \cos jt - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} j \sin jt \right), \quad j, k = 1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial F_{sk}}{\partial a_j} &= P_{sk} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \cos jt - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} j \sin jt \right), \\ \frac{\partial F_{ck}}{\partial b_j} &= P_{ck} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \sin jt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} j \cos jt \right), \\ \frac{\partial F_{sk}}{\partial b_j} &= P_{sk} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \sin jt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} j \cos jt \right) \end{aligned} \quad (6.29)$$

したがって, これらは近似解 (6.25) の係数 (6.27) を与えると

$$F(t, \varphi_m(t), \dot{\varphi}_m(t)), \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t, \varphi_m(t), \dot{\varphi}_m(t)), \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, \varphi_m(t), \dot{\varphi}_m(t))$$

の計算とフーリエ係数を求めることで遂行できる.

### 【例 6.2】占部・ガレルキン法による周期解の計算例

ダフィング方程式

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x^3 = 0.3 \cos t \quad (6.30)$$

の周期  $2\pi$  の周期解を計算してみよう. ここでは計算の手順を理解するためにガレルキンの低次の近似解を実際に代入しながら決定方程式を導くことにする.

いま,  $x(t)$  を式 (6.30) の周期解とすると, この式非線形性が奇関数であることから,  $-x(t+\pi)$  も周期解である. 特に  $x(t) = -x(t+\pi)$  の性質を持つ周期解が存在する. この性質を持つ周期解はフーリエ級数に展開すると次のように奇数次の高調波しか含まれない.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \{a_{2k+1} \cos(2k+1)t + b_{2k+1} \sin(2k+1)t\} \quad (6.31)$$

そこで, すこし粗い近似解であるが 2 次のガレルキン近似解:

$$x(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_3 \cos 3t + b_3 \sin 3t \quad (6.32)$$

を求めてみよう. 式 (6.32) を式 (6.30) に代入して  $\cos t, \sin t, \cos 3t, \sin 3t$  の係数のみを両辺比較して, これらの係数を零とおくと 2 次の決定方程式を得る.

$$\begin{aligned} F_{c1}(a_1, b_1, a_3, b_3) &= -a_1 + 0.1b_1 + \frac{3}{4} [a_1(r_1^2 + 2r_3^2) + a_3(a_1^2 - b_1^2) + 2b_3a_1b_1] - 0.3 = 0 \\ F_{s1}(a_1, b_1, a_3, b_3) &= -b_1 - 0.1a_1 + \frac{3}{4} [b_1(r_1^2 + 2r_3^2) + b_3(a_1^2 - b_1^2) - 2a_3a_1b_1] = 0 \\ F_{c3}(a_1, b_1, a_3, b_3) &= -9a_3 + 0.3b_3 + \frac{1}{4} [a_1(a_1^2 - 3b_1^2) + 3a_3(2r_1^2 + r_3^2)] = 0 \\ F_{s3}(a_1, b_1, a_3, b_3) &= -9b_3 - 0.3a_3 + \frac{1}{4} [b_1(3a_1^2 - b_1^2) + 3b_3(2r_1^2 + r_3^2)] = 0 \end{aligned} \quad (6.33)$$

ここに,

$$r_1^2 = a_1^2 + b_1^2, \quad r_3^2 = a_3^2 + b_3^2$$

とおいた. 式 (6.31) をニュートン法で解くと次の 3 個の解を得る.

$$\text{解 1: } (a_1, b_1, a_3, b_3) = (-0.9023, 0.3047, -0.0149, 0.0240)$$

$$\text{解 2: } (a_1, b_1, a_3, b_3) = (-0.3219, 0.0349, -0.0009, 0.0003)$$

$$\text{解 3: } (a_1, b_1, a_3, b_3) = (1.1198, 0.5246, 0.0209, 0.0673)$$

これらの周期解を例 4.7 (計算法については例 6.6 参照) と比較するとかなりよい近似解が得られていることが分かる. 実際の占部・ガレルキン法ではすべての手順が数値計算で処理できるので決定方程式やそのヤコビ行列を陽に導出する必要はない. したがって適当な  $m$  次の近似解を求めて, 次に次数  $m$  を大きくしていった最高次数の係数が十分に小さくなった時点で近似の次数を定めるとよいであろう.

■

## 6.2.2 調和平衡法と形式的平均化法

占部・ガレルキン近似解を最初の基本周波数のみ, あるいは顕著な周波数の成分のみの近似解で打ち切った場合は, すべてが簡単となる. 決定方程式も直接導出できることが多い. これを調和平衡法 (harmonic balance method) あるいは等価線形化法 (equivalent linearization) という. このことを具体例でみてみよう.

**【例 6.3】調和平衡法によるダフィング方程式の周期解**

ダフィング方程式

$$\ddot{x} + k\dot{x} + c_1x + c_3x^3 = B \cos t \quad (6.34)$$

を考えよう。いまこの方程式の周期解として

$$x(t) = u \cos t + v \sin t \quad (6.35)$$

を仮定する。これを式 (6.34) に代入して  $\cos t$  と  $\sin t$  の係数をそれぞれ零とおくと次式を得る。

$$\begin{aligned} F_c(u, v) &= \left(-1 + c_1 + \frac{3}{4}c_3r^2\right)u - kv - B = 0 \\ F_s(u, v) &= ku + \left(-1 + c_1 + \frac{3}{4}c_3r^2\right)v = 0 \end{aligned} \quad (6.36)$$

ここに、

$$r^2 = u^2 + v^2$$

とおいた。これは摂動法で得た振幅特性 (5.59) と類似の式となっている。したがって解析は、例 6.1 と同様に行えばよい。 ■

**【例 6.4】形式的な平均化法**

式 (6.34) について、求めた周期解 (6.35) の近傍で解の様子をみるため、今度は

$$x(t) = u(t) \cos t + v(t) \sin t \quad (6.37)$$

と考えると、係数が変化するとしよう。式 (6.37) の時間微分を

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{u}(t) \cos t + \dot{v}(t) \sin t - u(t) \sin t + v(t) \cos t \\ \ddot{x} &= -2\dot{u}(t) \cos t + 2\dot{v}(t) \sin t - u(t) \cos t - v(t) \sin t \end{aligned}$$

と考え、これを式 (6.34) に代入する。ここで  $u(t), v(t)$  はゆっくり変化すると考えたので、

$$\ddot{u}, \ddot{v}, k\dot{u}, k\dot{v}, \sin 3t, \cos 3t$$

などに関係した項はすべて無視した。そこで  $\cos t$  と  $\sin t$  の係数を比較して

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{2} \left\{ -ku - \left(1 - c_1 - \frac{3}{4}c_3r^2\right)v \right\} \\ \dot{v} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - c_1 - \frac{3}{4}c_3r^2\right)u - kv + B \right\} \end{aligned} \quad (6.38)$$

を得る。ただし

$$r^2 = u^2 + v^2$$



とおいた。ここでも平均化法と同じ結果の得られることに注意しよう。ただ、このような導出過程には数学的根拠がはっきりしていないため、ここでは「形式的」平均化法と呼ぶことにした。■

調和平衡法や形式的な平均化法は、非線形系に調和振動に近い、すなわちあまり高調波を含んでいない振動が見られる場合、簡便で実用的な解析方法として用いられている。数学的に周期解の存在や近似の正当性を証明できないが、適切な仮定の下で、実際の系の挙動を十分に近似する場合がある。どのような振動の成分を仮定し、解析を進めるかは目の現象をみて適切に定めなければならない。

### 6.3 各種の変分方程式：運動の微分

この節では、微分方程式の解を初期値やパラメータで微分した関数に変分方程式の解として求められることを示す。これらの変分方程式は、次節のポアンカレ写像の固定点を求めるニュートン法の計算や次章の分岐問題の計算に利用する。

この節では、状態空間  $M \subset R^n$  で定義された非自律系：

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda) \quad (6.39)$$

を考える。これまでのように  $t$  は時刻を表す実数であり、 $x$  は状態、 $\lambda$  はパラメータを表す：

$$t \in R, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \in R^m$$

また、右辺を定義している写像：

$$f : R \times M \times R^m \rightarrow R^n; \quad (t, x, \lambda) \mapsto f(t, x, \lambda)$$

は各引数について連続でかつ必要な回数だけ微分可能な性質を持つと仮定する。式 (6.39) を各成分で書くと

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.40)$$

となる。さて、パラメータを  $\lambda = \lambda_0$  と固定し、時刻  $t = t_0$  で  $x(t_0) = x_0$  を満たす式 (6.39) の解を

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0) \quad (6.41)$$

あるいは、成分で

$$x_i(t) = \varphi(t, t_0, x_{01}, \dots, x_{0n}, \lambda_{01}, \dots, \lambda_{0m}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.42)$$

と表すことにしよう。解 (6.41) は、時刻  $t$ 、初期時刻  $t_0$ 、初期値  $x_0$ 、およびパラメータ  $\lambda_0$  の関数となっている。  $f$  の可微分性によって、解はこれらの引数に関して可微分となる。次にこれらの引数に関する解の微分が従う微分方程式を導こう。

式 (??) に解 (6.41) を代入して、次の恒等式が成り立っていることに注意しておく。

$$\dot{\varphi}(t, t_0, x_0, \lambda_0) = \frac{\partial \varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0)}{\partial t} = f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0), \lambda_0) \quad (6.43)$$

および

$$\varphi(t_0, t_0, x_0, \lambda_0) = x_0 \quad (6.44)$$

### 6.3.1 初期値に関する変分方程式

初期値に関する解の 1 階および 2 階微分を考えよう。まず、式 (6.43) の両辺を  $x_0$  で偏微分して、微分の順序を入れ替えると、線形同次行列微分方程式：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0)}{\partial x_0} = \frac{\partial f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0), \lambda_0)}{\partial x} \frac{\partial \varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0)}{\partial x_0} \quad (6.45)$$

を得る。また、式 (6.44) も同様に微分すると次式となる。

$$\frac{\partial \varphi(t_0, t_0, x_0, \lambda_0)}{\partial x_0} = I_n \quad (6.46)$$

したがって、解の初期値に関する 1 階微分は第 1 変分方程式 (6.45) を初期値 (6.46) と定めて解けばよい。なお、式 (6.45), (6.46) を成分で書くと次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{0j}} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{0j}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial \varphi_i(t_0, t_0, x_0, \lambda_0)}{\partial x_{0j}} &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (6.47)$$

ここに  $\delta_{ij}$  はクロネッカの  $\delta$  すなわち、

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

を表す。次に、2 階微分を考えよう。式 (6.45), (6.46) をもう一度  $x_0$  で偏微分して、次の初期値に関する第 2 変分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} &= \frac{\partial f(t, \varphi, \lambda_0)}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 f(t, \varphi, \lambda_0)}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \\ \frac{\partial^2 \varphi(t_0, t_0, x_0, \lambda_0)}{\partial x_0^2} &= 0 \end{aligned} \quad (6.48)$$

成分で書くと、式 (6.47) を参照して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_{0j} \partial x_{0\ell}} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_{0j} \partial x_{0\ell}} + \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_p} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{0j}} \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_{0\ell}}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_i(t_0, t_0, x_0, \lambda_0)}{\partial x_{0j} \partial x_{0\ell}} &= 0, \quad i, j, \ell = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (6.49)$$

### 6.3.2 パラメータに関する変分方程式

次に、パラメータに関する解の1階、および初期値とパラメータに関する2階微分を考えよう。まず、式(6.43)の両辺を $\lambda$ で偏微分して、微分の順序を入れ替えると、線形非同次行列微分方程式：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \frac{\partial f(t, \varphi, \lambda_0)}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \quad (6.50)$$

を得る。また、式(6.44)も同様に微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial \varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} = 0 \quad (6.51)$$

したがって、解のパラメータに関する1階微分は、パラメータに関する第1変分方程式(6.50)を初期値(6.51)と定めて解けばよい。なお、式(6.50), (6.51)を成分で書くと次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda_q} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda_q} + \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_q}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad q = 1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial \varphi_i(t_0, t_0, x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda_q} &= 0 \end{aligned} \quad (6.52)$$

次に、初期値に関する微分をパラメータでもう一度微分してみよう。式(6.45), (6.46)をパラメータで微分して次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0 \partial \lambda} &= \frac{\partial f(t, \varphi, \lambda_0)}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0 \partial \lambda} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \\ \frac{\partial^2 \varphi(t_0, t_0, x_0, \lambda_0)}{\partial x_0 \partial \lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (6.53)$$

念のため成分でも書いておくと、次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_{0j} \partial \lambda_q} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_{0j} \partial \lambda_q} + \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_p} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{0j}} \frac{\partial \varphi_p}{\partial \lambda_q} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial \lambda_q} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{0j}}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_i(t_0, t_0, x_0, \lambda_0)}{\partial x_{0j} \partial \lambda_q} &= 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad q = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (6.54)$$

このようにして、解の引数に関する任意の微分が、同じ階数だけ変分方程式を微分した方程式の解となることが分かる。

#### 【例 6.5】2次元系の変分方程式

具体的に2次元系について、解の微分が従う方程式を公式として列挙しておこう。方程式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, y, \lambda) \\ \dot{y} &= g(t, x, y, \lambda) \end{aligned} \quad (6.55)$$

を考える。解を

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t, t_0, x_0, y_0, \lambda_0) \\ y(t) &= \psi(t, t_0, x_0, y_0, \lambda_0) \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \phi(t_0, t_0, x_0, y_0, \lambda_0) = x_0 \\ y(t_0) &= \psi(t_0, t_0, x_0, y_0, \lambda_0) = y_0 \end{aligned} \quad (6.57)$$

とする。各微分が満たす微分方程式は次式となる。ここで記法を簡単にするため、まず最初に次の行列を定義しておく。いずれも値は解 (6.56) を代入したものとする。

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \\ B &= \frac{\partial A}{\partial x_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x_0} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x_0} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \end{bmatrix} \\ C &= \frac{\partial A}{\partial y_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y_0} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y_0} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.58)$$

• 初期値に関する第 1 変分方程式：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_0} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_0} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_0} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \end{bmatrix}_{t=t_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \end{bmatrix}_{t=t_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.59)$$

• パラメータに関する第 1 変分方程式：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial g}{\partial \lambda} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \end{bmatrix}_{t=t_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

• 初期値に関する第 2 変分方程式：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_0^2} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_0^2} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_0} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_0^2} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} \end{bmatrix}_{t=t_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_0 \partial y_0} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial y_0} \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_0 \partial y_0} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial y_0} \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_0} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_0 \partial y_0} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial y_0} \end{bmatrix}_{t=t_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_0^2} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_0^2} \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_0^2} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_0^2} \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_0^2} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_0^2} \end{bmatrix}_{t=t_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.61)$$

・初期値とパラメータに対する 2 階微分に関する変分方程式：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_0 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial \lambda} \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_0 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial \lambda} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda} \frac{\partial \phi}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \lambda} \frac{\partial \phi}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_0 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0 \partial \lambda} \end{bmatrix}_{t=t_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_0 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_0 \partial \lambda} \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_0 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_0 \partial \lambda} \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda} \frac{\partial \phi}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \lambda} \frac{\partial \phi}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_0 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_0 \partial \lambda} \end{bmatrix}_{t=t_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.62)$$

■

## 6.4 ポアンカレ写像の固定点の計算

### 6.4.1 周期的非自律系の固定点の計算

第 4 章 4.1.3 でみた時間に関して周期的な非自律系の周期解を数値計算しよう。状態空間を  $R^n$  とし、次の非自律系を考える。

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (6.63)$$

ここに、速度ベクトル  $f$  は時間に関して周期  $L$  の周期関数とする：

$$f(t+L, x) = f(t, x) \quad (6.64)$$

初期値  $u \in R^n$  を出発する式 (6.63) の解を

$$x(t) = \varphi(t, u), \quad x(0) = \varphi(0, u) = u \quad (6.65)$$

と書くことにする。周期  $L$  を持つ式 (6.63) の周期解とは

$$\varphi(t+L, u) = \varphi(t, u), \quad t \in R \quad (6.66)$$

の性質を持つ解のことである。また、写像ストロボ写像  $T$  を

$$t: R^n \rightarrow R^n; u \mapsto u_1 = \varphi(L, u) \quad (6.67)$$

で定義すれば、写像  $T$  の固定点が式 (6.63) の基本調波周期解に対応する。そこでこの写像の固定点をニュートン法を用いて求めることにする。固定点方程式は次式となる。

$$F(u) = T(u) - u = \varphi(L, u) - u = 0 \quad (6.68)$$

この方程式に含まれる  $\varphi(L, u)$  は方程式 (6.63) を初期値  $u$  から時間  $[0, L]$  だけ数値積分すれば求めることができる。そこで式 (6.68) を解くことを考える。ヤコビ行列は

$$DF(u) = DT(u) - I_n = \frac{\partial \varphi(L, u)}{\partial u} - I_n \quad (6.69)$$

となる。ここで写像  $T$  の初期値に関する微分  $DT(u)$  は、式 (6.45) を初期時刻を  $t_0 = 0$  として数値積分し、 $t = L$  の値を使えばよい。ニュートン法の繰返し公式は次式となる。

$$\begin{aligned} u(k+1) &= u(k) + h(k) \\ DF(u(k))h(k) &= -F(u(k)) \end{aligned} \quad (6.70)$$

なお、繰返しの初期近似値は問題に応じて適切に選ぶ必要がある。たとえば調和平衡法など簡便な近似解析の結果を使うのも 1 つの方法である。

#### 【例 6.6】例 6.2 のダフィング方程式の周期解

式 (6.30) を書き直すと次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -0.1y - x^3 + 0.3 \cos t \end{aligned} \quad (6.71)$$

いま、 $t = 0$  で初期値  $(x_0, y_0)$  を持つ解を、式 (6.56) に習って

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t, x_0, y_0) \\ y(t) &= \psi(t, x_0, y_0) \end{aligned} \quad (6.72)$$

とすると、固定点方程式 (6.68) は次式となる。

$$\begin{aligned} F_1(x_0, y_0) &= x(2\pi) - x_0 = \phi(2\pi, x_0, y_0) - x_0 \\ F_2(x_0, y_0) &= y(2\pi) - y_0 = \psi(2\pi, x_0, y_0) - y_0 \end{aligned} \quad (6.73)$$

ヤコビ行列は

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_0} & \frac{\partial F_1}{\partial y_0} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_0} & \frac{\partial F_2}{\partial y_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi(2\pi, x_0, y_0)}{\partial x_0} - 1 & \frac{\partial \phi(2\pi, x_0, y_0)}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \psi(2\pi, x_0, y_0)}{\partial x_0} & \frac{\partial \psi(2\pi, x_0, y_0)}{\partial y_0} - 1 \end{bmatrix}$$

となる。この行列の各要素は、初期値に関する第1変分方程式(6.49)を数値積分すると求めることができる。実際の計算では、式(6.71)と式(6.49)を連立させた6元連立方程式を数値計算するとよい。計算した結果の固定点の座標、安定性とこの点を初期値とする周期解のフーリエ級数表示は例4.7の表4.1に示した。■

### 6.4.2 自律系の周期解の計算

$n$ 次元自律系

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n \quad (6.74)$$

がリミット・サイクルを持つとして、その軌道および周期を数値計算しよう。第4章4.1.2で定義したポアンカレ写像の固定点を求める問題と考え、ニュートン法を用いて計算することにする。これまでのように  $t=0$  で初期値  $x(0) = x_0$  を出る式(6.74)の解を  $x(t) = \varphi(t, x_0)$  と書く。

いま、 $x(t) = \varphi(t, x_0)$  が式(6.74)のリミット・サイクルであるとし、この解に対して適当な局所断面  $\Pi$  を取る。  $\Pi$  は具体的に関数：

$$q: R^n \rightarrow R; \quad x \mapsto q(x) \quad (6.75)$$

を用いて

$$\Pi = \{x \in R^n \mid q(x) = 0\} \quad (6.76)$$

と選んでいるものとしよう。ポアンカレ写像  $T$  を写像(4.31)と同様に次式で定義しよう。

$$T: \Pi \rightarrow \Pi; \quad x \mapsto \varphi(\tau, x) \quad (6.77)$$

ここで  $\tau$  は帰還時間を表す。周期解であるためには

$$T(x_0) - x_0 = \varphi(\tau(x_0), x_0) - x_0 = 0 \quad (6.78)$$

でなければならない。またこのとき、 $x_0 \in \Pi$  であるから

$$q(\varphi(\tau(x_0), x_0)) = 0 \quad (6.79)$$

となっている。したがって、これらの関係を使うと初期値  $x_0$  と周期となる帰還時間  $\tau$  を求めることができる。以下、このことを具体的に書き下してみよう。

いま、 $\Pi$  の局所座標  $p$  を次のような射影となっているとし、

$$\begin{aligned} p: \Pi \rightarrow \Sigma; \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto u = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) = p(x) \\ u_1 = p_1(x) = x_1, \dots, u_{n-1} = p_{n-1}(x) = x_{n-1} \end{aligned} \quad (6.80)$$

$\Pi$  のパラメータ付けとしては、関数  $q$  が  $x_n$  について解けて

$$\begin{aligned} h: \Sigma \rightarrow \Pi; \quad u \mapsto x = h(u) \\ x_1 = h_1(u) = u_1, \dots, x_{n-1} = h_{n-1}(u) = u_{n-1}, x_n = h_n(u) \end{aligned} \quad (6.81)$$

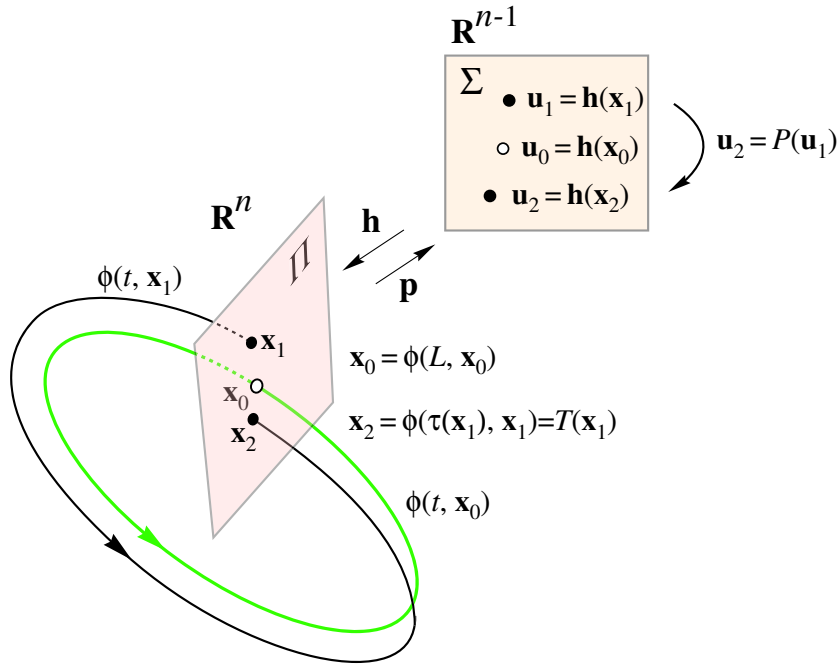


図 6.5 周期解のポアンカレ写像と局所座標.

となっているものとしてよい。図 6.5 参照。これは座標の成分の番号を適当に付け替えれば、一般性を失うことなくこのようにできる。このとき、局所座標上でのポアンカレ写像  $P$  が次の合成写像で  $T$  から誘導される。

$$P : \Sigma \rightarrow \Sigma; u \mapsto u_1 = P(u) = p \circ T \circ h(u) \tag{6.82}$$

そこで式 (6.78), (6.79) は次式となる。

$$\begin{aligned} F_1(u, \tau) &= P(u) - u = p(\varphi(\tau, h(u))) - u = 0 \\ F_2(u, \tau) &= q(\varphi(\tau, h(u))) = 0 \end{aligned} \tag{6.83}$$

これを未知変数  $(u, \tau)$  について解けばよい。この定式化では、 $u$  と  $\tau$  は独立した変数と考え、式 (6.83) 第 2 式を通して関数関係にあると見なしている。このことによってヤコビ行列の計算が幾分簡単になる。

ニュートン法で解く場合のヤコビ行列は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial \tau} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial \tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} - I_{n-1} & \frac{\partial P}{\partial \tau} \\ \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial \tau} \end{bmatrix} \tag{6.84}$$



ここで、行列の各要素は次のように計算できる.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P}{\partial u} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial u} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial \varphi(\tau, h(u))}{\partial x} \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ \frac{\partial h_n}{\partial u} \end{bmatrix}, \\
 \frac{\partial P}{\partial \tau} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \end{bmatrix} f(\varphi(\tau, h(u))) \\
 \frac{\partial q}{\partial u} &= \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \varphi(\tau, h(u))}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \varphi(\tau, h(u))}{\partial x} \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ \frac{\partial h_n}{\partial u} \end{bmatrix}, \\
 \frac{\partial q}{\partial \tau} &= \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial q}{\partial x} f(\varphi(\tau, h(u)))
 \end{aligned} \tag{6.85}$$

### 【例 6.7】3次元自律系の周期解の計算

3次元自律系：

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f_1(x, y, z) \\
 \dot{y} &= f_2(x, y, z) \\
 \dot{z} &= f_3(x, y, z)
 \end{aligned} \tag{6.86}$$

の周期解が局所断面：

$$\Pi = \{(x, y, z) \in R^3 \mid q(x, y, z) = z - a = 0\} \tag{6.87}$$

を持つものとして、この周期解を計算するための固定点方程式とそのヤコビ行列を考えよう。ここに  $a$  はあらかじめ定めた定数とする。  $xy$ -平面を局所座標に選ぶ.

$$\Sigma = \{(u, v) \in R^2 \mid u = x, v = y\} \tag{6.88}$$

式 (6.80), (6.81) は

$$\begin{aligned}
 p: \Pi &\rightarrow \Sigma; & x = (x, y, z) &\mapsto u = (u, v) = (x, y) \\
 h: \Sigma &\rightarrow \Pi; & u = (u, v) &\mapsto x = (x, y, a)
 \end{aligned} \tag{6.89}$$

となる。いま、初期値  $(x_0, y_0, z_0)$  を持つ式 (6.86) の解を

$$x(t) = \phi_1(t, x_0, y_0, z_0), \quad y(t) = \phi_2(t, x_0, y_0, z_0), \quad z(t) = \phi_3(t, x_0, y_0, z_0) \tag{6.90}$$

とする。そうすると、式 (6.83) は簡単に次式となる.

$$\begin{aligned}
 F_1(u, v, \tau) &= \phi_1(\tau, u, v, a) - u = 0 \\
 F_2(u, v, \tau) &= \phi_2(\tau, u, v, a) - v = 0 \\
 F_3(u, v, \tau) &= \phi_3(\tau, u, v, a) - a = 0
 \end{aligned} \tag{6.91}$$

表 6.2 式 (4.110) の固定点・2周期点.  $a = 0.6, b = 0.5, c = 1.6$ .

固定点 2周期点	座標 $y_0 = 0.0$ $(x_0, z_0)$	特性乗数 $\mu_1 = 1$ $(\mu_2, \mu_3)$	周期	周期解のタイプ
$I$	(1.4357, 1.7619)	(-1.4046, -0.0119)	5.6522	逆不安定 ( $_1I$ )
$S_1^2$	(1.1331, 2.6350)	(-0.3162, -0.0017)	10.9141	完全安定 ( $_0D^2$ )
$S_2^2$	(1.3620, 1.1574)			

そこでヤコビ行列 (6.84) は次式となる.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial \tau} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial \tau} \\ \frac{\partial F_3}{\partial u} & \frac{\partial F_3}{\partial v} & \frac{\partial F_3}{\partial \tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - 1 & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & f_1 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - 1 & f_2 \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial x} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y} & f_3 \end{bmatrix} \quad (6.92)$$

■

### 【例 6.8】レスラー方程式の周期解の計算

例 4.8 で示しておいた周期解を上例 6.7 に従って求めてみよう.  $y = 0.0$  を局所断面と選び, 式 (6.91) を解けばよい. 式 (4.110) の変分方程式は

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\eta - \zeta \\ \dot{\eta} &= \xi + 0.6\eta \\ \dot{\zeta} &= (0.5 + z_0)\xi - (1.6 - x_0)\zeta \end{aligned} \quad (6.93)$$

であるから, 式 (6.90) の第 1, 3 列の計算には式 (6.93) の初期値をそれぞれ  $[1, 0, 0]^T$  と  $[0, 0, 1]^T$  とし  
て数値積分するとよい. 結果を表 6.2 に示した. 図 4.8 も参照のこと.

■

## 6.5 本章のまとめと文献

### 6.5.1 本章のまとめ

1. 双曲型平衡点や固定点の数値計算にはニュートン法が有効に使用できる.
2. 占部・ガレルキン法は強非線形系の周期解を求める数値解析法である.

3. 調和平衡法は占部・ガレルキン法の粗い近似解を与える方法と見なすことができ、簡便な周期解の計算法である。
4. 形式的な平均化法は強非線形系の周期解に平均化法を適用した方法である。数学的には検証はないが実用的であり、周期解の近似が妥当であると定性的にもよい結果を得る。
5. 周期解に対するポアンカレ写像の微分を数値的に求めるには変分方程式の解を用いるとよい。
6. 周期解に対する固定点の計算は、元の系と合わせてこれらの変分方程式を連立して求積すれば、ヤコビ行列が正則となるのでニュートン法によって計算が可能となる。

### 6.5.2 本章の文献

数値計算法とあわせてガレルキン法については篠原 [C6] に詳しい。ここでは占部によるニュートン法が解の誤差評価の方法と共に詳しく紹介されている。ガレルキン法を含めた強非線形系の関数解析的手法は Rouché・Mawhin [O12] にも紹介されている。また、近年計算機を用いた精度保証付き数値解析が興味ある問題として取りあげられるようになってきた。この方面については大石 [P6] を参照するとよいであろう。

調和平衡法や形式的平均化法については、工学の諸分野での振動の教科書に詳しい。たとえば林 [N8]、佐藤 [N14]、木碁木 [N15]、志村 [N17]、Schmidt・Tondl [N16]、Ueda [N23] などを参照するとよい。

## 6.6 練習問題 6

6.1 ダフィング方程式 (5.94) :

$$\ddot{x} + x = \epsilon(b \cos t + ax - 0.1\dot{x} - cx^3) \quad (6.94)$$

の周波数特性 (図 5.6 参照) を例 6.1 に習って計算せよ。

6.2 エノン写像 (1.51) :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= 1 + y(k) - ax^2(k) \\ y(k+1) &= bx(k) \end{aligned} \quad (6.95)$$

のパラメータ  $(a, b)$  に関する変分方程式を計算せよ。

6.3 ファン・デア・ポール方程式

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (6.96)$$

の周期解を  $x = 0$  を局所断面にとって数値計算せよ。ただし  $\epsilon = 1.0$  とする。

6.4 例 6.3 を参考にして、ダフィング・レーリィー方程式 :

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - \dot{x}^2)\dot{x} + x^3 = B \cos \nu t \quad (6.97)$$

の周期解を

$$x(t) = u(t) \cos \nu t + v(t) \sin \mu t \quad (6.98)$$

と仮定し、形式的な平均化法により平均化方程式を求めよ。

6.5 非線形復元項のあるマシュー方程式：

$$\ddot{x} + k\dot{x} + (a + b \cos 2\nu t)x + x^3 = 0 \quad (6.99)$$

の周期解を式 (6.98) と仮定し，前問と同様に平均化方程式を求めよ。

### プログラミング演習問題

- 6.1 式 (6.12) をニュートン法で解くプログラムをつくれ。
- 6.2 式 (6.33) をニュートン法で解くプログラムをつくれ。
- 6.3 式 (6.73) をニュートン法で解くプログラムをつくれ。
- 6.4 **例題 6.8** をニュートン法で検証するプログラムをつくれ。

## 第7章

# 局所的な分岐

この章では、平衡点と固定点の分岐について考える。それに先だって、力学系の運動の有界性に関する2, 3の考え方をまとめておいた。すなわち、7.1 ではリヤプーノフ関数を用いて有界性の証明できる例を説明した。また、散逸的性質を持つ系の定義と例をあげた。7.2 では、余次元1の分岐として知られる平衡点と固定点の分岐のタイプについて述べた。ここでの分岐現象とは系のパラメータが変化することによって、その系が持つ平衡点や固定点の位相幾何学的性質が変わってしまう現象のことである。一般に位相幾何学的性質が変化する、すなわち平衡点や固定点の双曲的性質が変化するを、定性的あるいは質的変化が起こるといふ。これらの質的変化は力学系の状態空間での運動全体にも影響を与えることがあり、非線形現象を理解する上で基本的かつ重要な事柄である。

平衡点や固定点の分岐は、状態空間の1点でおこる現象なので局所的な分岐現象と呼ばれている。7.3 ではこれら分岐の生じるパラメータを追跡するための具体的な計算法について説明した。

### 7.1 運動の有界性とリヤプーノフ関数

平衡点の分岐問題に入る前に、これまで問題にしなかった運動の有界性について少しだけふれておこう。我々が取りあげる力学系は、実際の動的システムの数学モデルであるから元のシステムの特徴を反映したモデルになっている。特に、摩擦や抵抗のあるいわゆる散逸系では、運動の過程を通じてエネルギーの損失が見られる。

このような系では、初期状態がどんなに大きくとも、時間の経過とともに状態は相空間の有界な領域に漸近して行くであろう。この極端な例が勾配系である。勾配系の状態は等ポテンシャル面の法線方向にポテンシャルが絶えず減少する方向に運動する。その結果、振動もせずに最終的には平衡点のひとつに落ちつくこととなる。また、抵抗が適当に配置された電気回路においても、回路の状態はインダクタに蓄えられた磁気的エネルギーとキャパシタに蓄えられた電気的エネルギーが減少する方向に変化し、最終的に状態空間の有界領域にはいり回路が持つ定常状態の一つに落ちつくこととなる。

このような性質をうまく利用して、運動方程式の解が最終的には状態空間の有界領域にとどまることが証明できる力学系の例を考えよう。

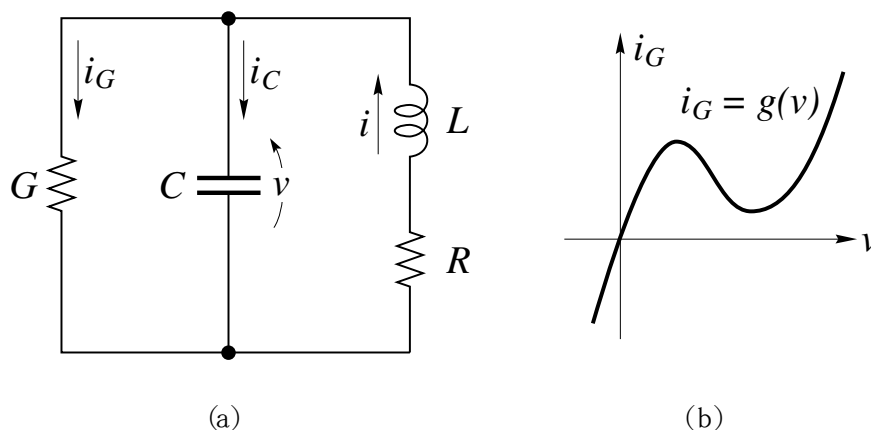


図 7.1 LCRG 回路 (a) と非線形コンダクタの特性 (b).

### 7.1.1 リヤプーノフ関数

状態空間  $M \subset R^n$  を原点を含む開集合とし、自律系

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda), \quad x \in R^n, \lambda \in R^m \tag{7.1}$$

を考える。いま、可微分関数：

$$V : M \rightarrow R; \quad x \mapsto V(x) \tag{7.2}$$

が  $M$  のすべての点  $x$  で  $V(x) \geq 0$  の性質を持つとき、 $V$  は**半正定値** (positive semi definite) であるという。また、 $V(0) = 0$  かつ原点以外で  $V(x) > 0$  のとき、**正定値** (positive definite) であるという。同様に**半負定値** (negative semi definite)、**負定値** (negative definite) であることは、条件をそれぞれ  $V(x) \leq 0$  と  $V(x) < 0$  に置き換えて定義する。例えば、正の固有値のみを持つ対称行列から作られる 2 次形式は正定値である。

さて、 $M$  上で定義された正定値関数  $V$  が、 $M$  の任意の点  $x$  で

$$\dot{V} = \frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, \lambda) \leq 0 \tag{7.3}$$

を満たすとき、 $V$  は系 (7.1) の**リヤプーノフ関数**であるという。

#### 【例 7.1】簡単な線形 LCRG 回路の例

図 7.1(a) の回路を考えよう。素子はすべて線形特性としよう。図に示した変数を用いて、回路方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= -Gv + i \\ L \frac{di}{dt} &= -v - Ri \end{aligned} \tag{7.4}$$

インダクタとキャパシタに蓄えられるエネルギーを  $W$  とすると,

$$W(v, i) = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cv^2 \quad (7.5)$$

である.

$$\frac{dW}{dt} = Li\frac{di}{dt} + Cv\frac{dv}{dt} = -Ri^2 - Gv^2 \leq 0 \quad (7.6)$$

であるから,  $W$  はリヤプーノフ関数となっている. 勿論このことから直ちに原点は漸近安定な平衡点となっていることが分かる. ■

### 【例 7.2】非線形コンダクタとした場合

図 7.1 の回路でキャパシタに並列につながれたコンダクタの特性を非線形と考えてみよう. すなわち, このコンダクタの特性を次式と仮定する, 図 7.1(b) 参照.

$$i_G = g(v_G), \quad v_G g(v_G) \geq 0 \quad (7.7)$$

この場合の回路方程式は

$$\begin{aligned} C\frac{dv}{dt} &= -g(v) + i \\ L\frac{di}{dt} &= -v - Ri \end{aligned} \quad (7.8)$$

となるので, エネルギー関数 (7.5) の微分は

$$\frac{dW}{dt} = Li\frac{di}{dt} + Cv\frac{dv}{dt} = -Ri^2 - vg(v) \leq 0 \quad (7.9)$$

となり, ただ 1 つの平衡点 (原点) が漸近安定となることが分かる. この例ではコンダクタの特性 (7.7) のグラフが第 1 および 3 象限にあるという仮定だけで結果を得ていることに注意しよう. この仮定のもとに, 回路の状態  $v, i$  はどのような初期状態から出発しても, 適当な時間の後, 原点を囲む等エネルギー楕円の中に入ってくることも分かる. すなわち, 方程式 (7.8) の解の有界性を証明できたこととなる. ■

上で述べた例のように, 運動方程式を解くことなく解の定性的性質をリヤプーノフ関数から導く方法を **リヤプーノフの直接法** という. 平衡点の安定性や解の有界性を証明するのに有効な手法である. 問題点はいかにしてリヤプーノフ関数を見いだすかという点である. 上述の例のように系の物理的性質よりエネルギー関数のようなスカラー関数を定義できる場合は良いが, 単に運動方程式が与えられてリヤプーノフ関数を見いだすことは一般に難しいことである.

## 7.1.2 散逸系 (dissipative system in the large)

非自律系については, 解の有界性を証明することが極端に難しくなる. 過去半世紀間に様々な研究がなされてきた. ここでは,  $D$ -システムの定義とその例を挙げるにとどめる. 状態空間  $R^n$  で定義されたなめらかで周期的な非自律系:

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda) \quad (7.10)$$

を考えよう. ここに  $\lambda \in R^m$  はこの系のパラメータを表す. 今のところパラメータは関係しないが, この章ではパラメータ依存性を扱う問題を考えるので付けておいた. また, 式 (7.10) の右辺は  $t$  に関して周期  $L$  の周期関数:

$$f(t+L, x, \lambda) = f(t, x, \lambda) \quad (7.11)$$

としておく. 初期値を与える時刻を  $t=0$  と考えて,  $t=0$  で  $x(0) = x_0$  を初期値とする式 (7.10) の解を

$$x(t) = \varphi(t, x_0), \quad x(0) = \varphi(0, x_0) = x_0 \quad (7.12)$$

とする.

方程式 (7.10) の解が次の性質を持つとき, 系 (7.10) は **D-システム**あるいは**散逸系**という.

**【D-システムの性質】**

- (1) 適当な正数  $R$  がとれて, 任意の初期値から出発する解 (7.12) は, 十分大きい時刻  $t$  において,  $\|x(t)\| \leq R$  となる.
- (2) ある正整数  $N$  が取れて, 初期値が  $\|x_0\| \leq R$  を満たす解 (7.12) は  $t > LN$  では  $\|x(t)\| \leq R$  となる.

D-システムでは十分に時間がたてば, 解は有界領域  $\|x\| \leq R$  にはいるので, この領域内での現象をみればよい. 具体的に系 (7.10) が与えられたとき, うまく有界領域を構成できるかどうかは, 個々の系について検討しなければならない. この点が数学的に難しい問題となる.

**【例 7.3】 D-システムの例**

次の 2 階の非線形系はレビンソン (Levinson) によって研究された方程式で, D-システムである.

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = e(t) \quad (7.13)$$

ここに,  $f$  と  $g$  はなめらかな関数とし, 次の条件を満たしているものとする.

- (1)  $e(t)$  は周期関数.
- (2) 大きな  $x$  について  $xg(x) > 0$  かつ  $|g(x)|$  は単調に増加する. また

$$G(x) = \int_0^x g(x) dx$$

とおくと  $g(x)/G(x)$  は  $x \rightarrow \infty$  とするとき  $1/|x|$  程度で漸近的評価ができる.

- (3) ある正数  $a$  があって

$$\begin{aligned} |x| \geq a \text{ で } f(x, y) &\geq M > 0 \\ |x| \leq a \text{ で } f(x, y) &\geq -m, \quad m > 0 \end{aligned}$$

具体的にはダフィング方程式

$$\ddot{x} + k\dot{x} + c_1x + c_3x^3 = B_0 + B \cos t \quad (7.14)$$



や強制外力のあるファン・デア・ポールの方程式

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = B \cos \nu t \quad (7.15)$$

あるいはこれらを合わせた特性を持つダフィング - ファン・デア・ポール方程式

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + c_1x + c_3x^3 = B_0 + B \cos \nu t \quad (7.16)$$

はすべて  $D$ -システムである。これらの証明については文献 [O9, P3] 参照。またポアンカレ写像と固定点定理を用いると  $D$ -システムは少なくとも 1 つの周期  $L$  の周期解を持つことが証明できる。 ■

## 7.2 余次元 1 の分岐

### 7.2.1 平衡点の分岐

式 (7.1) で与えられる力学系の平衡点が、パラメータ  $\lambda$  の値の変化に対してどのような定性的変化を伴うかという問題を考えよう。平衡点の座標は

$$f(x, \lambda) = 0 \quad (7.17)$$

の根で与えられる。したがって、パラメータ変化に伴う平衡点の個数の変化は、式 (7.17) のヤコビ行列が特異となる点でおこる。言い換えるとヤコビ行列の固有値に零が含まれると平衡点は重複し、個数に変化をもたらす。もう一つの定性的変化は平衡点の安定性の変化である。これはヤコビ行列の固有値が純虚数となった場合起こる可能性がある。

これら 2 つの場合のいずれも、平衡点が双曲的性質を失った場合であることに注意しよう。すなわち、平衡点の質的变化はパラメータの変化に伴って、平衡点が双曲的性質を失うパラメータの値で生じることとなる。この現象を**平衡点の分岐** (bifurcation) という。分岐の起こるパラメータを**分岐値** (bifurcation value) という。以下、分岐に関係した固有値  $\mu$  は分岐値  $\lambda = \lambda^*$  において

$$\left. \frac{d\Re(\mu)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda^*} \neq 0 \quad (7.18)$$

を満たすと仮定する。これはパラメータが変化したときに確かに分岐が起こる条件といってよい。

さて、平衡点の分岐をもう少し詳しくみてみよう。ここでの議論はパラメータ  $\lambda$  の 1 つの成分を変えることで十分なので、以下  $\lambda$  の  $m$  個の成分のうち  $m - 1$  個を固定し、残りの 1 個を変えるものとする。したがって  $\lambda$  はスカラー  $\lambda \in R$  とする。点  $x_0 \in R^n$  を式 (7.17) の平衡点としよう。平衡点  $x_0$  における式 (7.17) のヤコビ行列を

$$Df(x_0, \lambda) = \frac{\partial f(x_0, \lambda)}{\partial x} = A(\lambda) \quad (7.19)$$

とおき、この行列の特性方程式を

$$\chi(\mu) = \det(\mu I_n - A(\lambda)) = \mu^n + a_1\mu^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mu + a_n = 0 \quad (7.20)$$

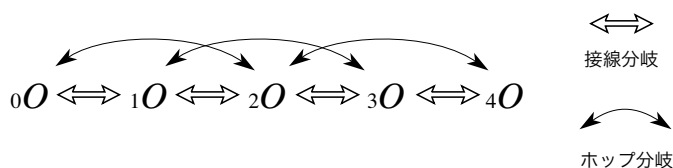


図 7.2 接線分岐とホップ分岐 (4 次元系の場合).

とする. 平衡点の座標と特性根は一般にパラメータの複雑な関数である. 双曲型平衡点では, すべての特性根について

$$\Re(\mu_i) \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{7.21}$$

となっている.

パラメータを変化させたとき, 特性根についてのこの条件が 1 つでも崩れるとそのパラメータの値で分岐がおこる. 平衡点の分岐は, 次にあげる接線分岐とホップ分岐の 2 種類が一般的である.

### 平衡点の接線分岐

特性根の 1 つ  $\mu_i = 0$  となるとき, 式 (7.17) は一般に重根を持ち, パラメータの変化によって, 平衡点対の消滅あるいは発生をみる. このとき残りの特性根の性質はあまり変化しないので, 対となって出現あるいは消滅する平衡点は不安定不変部分空間の次元が隣り合ったものとなる. すなわち分岐のタイプは次式となる.

$${}_kO + {}_{k+1}O \Leftrightarrow \emptyset \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \tag{7.22}$$

この関係式は, この本でのみ使用される馴染みの少ない式であるが, 次のように読むことにしよう.

記号  $\Leftrightarrow$  の右辺と左辺は, 分岐の生じる前後のパラメータで見られる平衡点のタイプを示している. 分岐式 (7.22) の場合について説明しよう. まず,  $\lambda = \lambda^*$  において分岐が生じたとしよう. このとき

- (1)  $\lambda < \lambda^*$  のパラメータでは, 2 つの双曲型平衡点  ${}_kO$  と  ${}_{k+1}O$  が存在していた.
- (2)  $\lambda = \lambda^*$  において分岐が起こり,  ${}_kO$  と  ${}_{k+1}O$  が 1 つに合体した非双曲型平衡点となり,
- (3)  $\lambda^* < \lambda$  においては, この非双曲型平衡点が消滅して存在しなくなった. ここでは存在しない状態を便宜上  $\emptyset$  で表した.

この変化を

$${}_kO + {}_{k+1}O \Rightarrow \emptyset \tag{7.23}$$

で表すことにする. パラメータを逆に変化させると逆の分岐がおこる.

$${}_kO + {}_{k+1}O \Leftarrow \emptyset \tag{7.24}$$

文脈から, 前者は平衡点対の消滅, 後者は発生とってよいであろう. これらの分岐プロセスをあわせて略記した分岐式が式 (7.22) である.

この平衡点対の発生・消滅の分岐は, 色々な呼び方で知られている. たとえば平衡点がサドルとノード (結節点) の癒着であることから**サドル・ノード分岐**, 状態空間内で平衡点の集合がこの分岐点で折

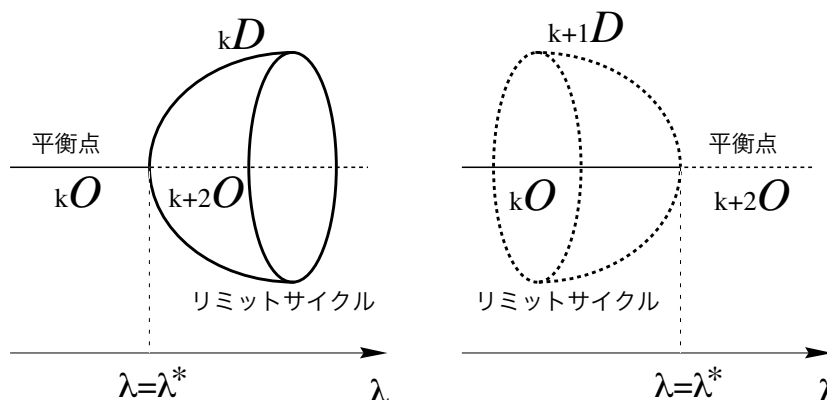


図 7.3 ホップ分岐：スーパー・クリティカル (a) とサブ・クリティカル (b) な場合.

り返されていることから**ターニング点** (turning point) などの名称もよく使われている. 本書では**接線分岐** (tangent bifurcation) と呼ぶことにした\*1. これは, 2 次方程式の根が重根となった状況をグラフで描くと丁度  $x$  軸に放物線が接した状態となっていることと同じ現象といえるからである. なお, 式 (7.22) の不安定次元  $k$  は,  $k = 0, 1, \dots, n-1$  まで変わり得る. したがって, 接線分岐には位相的にタイプの異なる  $n$  種類の分岐が考えられることとなる. 図 7.2 参照.

さて, 接線分岐の生じる条件について考えよう. 特性根の 1 つが零根となることから, 式 (7.20) より

$$\chi(0) = \det(-A(\lambda)) = a_n = 0 \tag{7.25}$$

を得る. これを幾何学的にみてみよう. いま, 平衡点の存在している空間  $R^n$  とパラメータの空間  $R$  からなる直積空間  $R^n \times R$  内で, 式 (7.17) と式 (7.25) を合わせて考えよう. 式 (7.17) は  $n$  個の式から決まる 1 つの曲線を描くであろう. 他方, 式 (7.25) は 1 個の式であるから  $n-1$  次元の超曲面となっている. 両者を満足する点は, 平衡点を表す曲線が丁度この超曲面と接している点となっている. 式 (7.25) のように, 条件式が 1 個の分岐を一般に**余次元 1 の分岐**と呼んでいる.

### 平衡点のホップ (Hopf) 分岐

もう一つの分岐, すなわち 1 組の特性根が複素平面上で虚軸を横切る場合を考えよう. 左半平面から右半平面に移動したとすると, 不安定部分空間の次元は 2 だけ大きくなる. このとき, 渦心点となった平衡点からリミット・サイクルが湧き出したり, あるいは渦心点へリミット・サイクルが吸い込まれ消滅する. この分岐を**ホップ分岐** (Hopf bifurcation) という. 分岐式で表すと

$$\begin{aligned} kO &\Leftrightarrow k_{+2}O + LC(kD), & k = 0, 1, 2, \dots, n-2 \\ kO + LC(k_{+1}D) &\Leftrightarrow k_{+2}O, & k = 0, 1, 2, \dots, n-2 \end{aligned} \tag{7.26}$$

となる. ここに  $LC(kD)$  はリミット・サイクルを表し, そのポアンカレ写像による固定点の性質が  $kD$  タイプであることを示す. 図 7.3 参照.

\*1 サドル・ノード分岐という呼び名は式 (7.22) で  $k = 0$  または  $k = n-1$  の場合に対応している. 一般の場合には, 接線分岐と呼んだ方が無難と思われる.

なお、式 (7.26) 第 1 式の場合を**スーパー・クリティカル** (super critical), 第 2 式の場合を**サブ・クリティカル** (sub-critical) なホップ分岐ということがある。ホップ分岐は 2 次元以上の自律系において起こる分岐であり、式 (7.26) の平衡点の不安定次元の  $k$  は 0 から  $n-2$  まで変わり得る。したがって  $n-1$  個の位相的に異なるホップ分岐が存在し得る、図 7.2 参照。このうち安定なリミット・サイクルの見られるのは、 $k=0$  のスーパー・クリティカルな場合である。

ホップ分岐の生じる条件は、

$$\chi(j\omega) = \det(j\omega I_n - A(\lambda)) = 0 \quad (7.27)$$

である。この式は、実部と虚部から条件が 2 つ出てくるが、 $\omega$  が未知周波数なので両式からこれを消去すると、1 つの条件となる。なお、 $\omega$  はホップ分岐により生じる（または消滅する）リミット・サイクルの角周波数を表す。

#### 【例 7.4】低い次元の場合のホップ分岐の条件

2 次元の場合 特性方程式より

$$\chi(j\omega) = (j\omega)^2 + j\omega a_1 + a_2 = 0$$

実部と虚部をそれぞれ零と置くことより、

$$-\omega^2 + a_2 = 0, \quad \omega a_1 = 0$$

したがって、

$$a_1 = 0, \quad a_2 > 0 \quad (7.28)$$

が条件となる。なお、 $\omega = \sqrt{a_2}$  により分岐直後のリミット・サイクルの角周波数を知ることができる。

3 次元の場合 同様に特性方程式より

$$\chi(j\omega) = (j\omega)^3 + a_1(j\omega)^2 + j\omega a_2 + a_3 = 0$$

実部、虚部より

$$-\omega^2 a_1 + a_3 = 0, \quad -\omega^2 + a_2 = 0$$

したがって、分岐の条件と角周波数は次式となる。

$$-a_1 a_2 + a_3 = 0, \quad \omega = \sqrt{a_2} \quad (7.29)$$

これらをまとめて表にすると、表 7.1 となる。同様な計算で 4 次元の場合の結果も示しておいた。 ■

#### ポアンカレの渦心点問題とホップ分岐

2 次元自律系の平衡点が渦心点を持つ場合、線形部のみからはこの平衡点の安定性は判定できない。したがって非線形部分を考慮し安定かどうかを判定する必要がある。この判定にはリヤプーノフ関数を

表 7.1 式 (7.20) の係数を用いたホップ分岐の条件.

状態空間の次元	ホップ分岐の条件	角周波数 $\omega$
2	$a_1 = 0$	$\omega = \sqrt{a_2}, a_2 > 0$
3	$-a_1 a_2 + a_3 = 0$	$\omega = \sqrt{a_2}, a_2 > 0$
4	$a_4^2 + a_1^2(a_4 - a_2) = 0$	$\omega = \sqrt{\frac{a_4}{a_1}}, \frac{a_4}{a_1} > 0$

うまく構成し、これを利用するとよい。このことを簡単に説明しておこう。考える方程式は、平衡点を原点に座標変換した標準形：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} (x_1 D_1 + x_2 D_2)^m f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} (x_1 D_1 + x_2 D_2)^m g(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (7.30)$$

とする。ここに、

$$a = \frac{\partial f}{\partial x_1}, b = \frac{\partial f}{\partial x_2}, c = \frac{\partial g}{\partial x_1}, d = \frac{\partial g}{\partial x_2}, D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, D_2 = \frac{\partial}{\partial x_2},$$

と書いた。また、以後

$$D_1^p D_2^q = \frac{\partial^{p+q}}{\partial x_1^p \partial x_2^q}, D_1^p D_2^q f = \frac{\partial^{p+q} f}{\partial x_1^p \partial x_2^q} = f_{pq}, D_1^p D_2^q g = \frac{\partial^{p+q} g}{\partial x_1^p \partial x_2^q} = g_{pq}$$

などの記法を用いる。いま、式 (7.30) の原点が渦心点であったとし、線形変換を行って、次の形の標準形に変換する。

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \omega y_2 + P(y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 &= -\omega y_1 + Q(y_1, y_2) \end{aligned} \quad (7.31)$$

ここに、

$$\begin{aligned} P(y_1, y_2) &= \sum_{k=2}^{\infty} P_k(y_1, y_2), \quad Q(y_1, y_2) = \sum_{k=2}^{\infty} Q_k(y_1, y_2) \\ P_k(y_1, y_2) &= \sum_{\ell=0}^k p_{k-\ell, \ell} y_1^{k-\ell} y_2^{\ell}, \quad Q_k(y_1, y_2) = \sum_{\ell=0}^k q_{k-\ell, \ell} y_1^{k-\ell} y_2^{\ell} \end{aligned}$$

とおいた。さて、関数

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + \sum_{k=3}^{\infty} V_k(y_1, y_2), \quad V_k(y_1, y_2) = \sum_{\ell=0}^k v_{k-\ell, \ell} y_1^{k-\ell} y_2^{\ell} \quad (7.32)$$

を考え、これがリヤプーノフ関数となるようにうまく  $V_k(y_1, y_2)$  の多項式の係数を決定しよう。この手順については文献 [O16, N2, D12] 参照。  $V_3(y_1, y_2)$  の係数をうまくきめると

$$\dot{V}(y_1, y_2) = D_1(y_1^4 + y_2^4) + \cdots \quad (7.33)$$

あるいは

$$\dot{V}(y_1, y_2) = D_2(y_1^2 + y_2^2)^2 + \cdots \quad (7.34)$$

とすることができる。ここに、

$$\begin{aligned} D_2 = \frac{3}{4}D_1 = \frac{1}{8}D = \frac{1}{8} & \left[ 3(p_{30} + q_{03}) + p_{12} + q_{21} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\omega} \left\{ 2(p_{20}q_{20} - p_{02}q_{02}) - p_{11}(p_{20} + p_{02}) + q_{11}(q_{20} + q_{02}) \right\} \right] \end{aligned} \quad (7.35)$$

の関係があるので式 (7.33), (7.34) どちらを使っても同じ判定を得る。すなわち、これらの式の係数 (7.35) の符号が負ならば原点は漸近安定な平衡点  ${}_0O$ 、正ならば不安定な平衡点  ${}_2O$ 、零なら判定不能で更に高次の項を用いた計算を必要とすることが分かる。  $D$  はリヤプーノフの第 1 渦状量と呼ばれている。

この判定基準と分岐式 (7.26) を合わせて考えると、次の 3 つの場合の何れかとなる。

- (1)  $D < 0$  のとき、発生するリミット・サイクルは安定。したがってスーパー・クリティカルな場合となる：

$${}_0O \Rightarrow {}_2O + LC({}_0D) \quad (7.36)$$

- (2)  $D > 0$  のとき、発生するリミット・サイクルは不安定。したがってサブ・クリティカルな場合となる：

$${}_0O + LC({}_1D) \Rightarrow {}_2O \quad (7.37)$$

- (3)  $D = 0$  のとき、判定不可能。更に高次の項を用いた第 2 渦状量で判定。

なお、  $D$  を式 (7.30) の係数で表現すると次式となる。

$$\begin{aligned} D = \frac{1}{2b} & \left\{ -a(f_{21} + g_{12}) + b(f_{30} + g_{21}) - c(f_{12} + g_{03}) \right\} \\ & + \frac{1}{2b(a^2 + bc)} \left\{ ab(-f_{20}^2 + f_{20}g_{11} + f_{11}g_{20} + g_{20}g_{02} + 2g_{11}^2) \right. \\ & + ac(f_{20}f_{02} + 2f_{11}^2 + f_{11}g_{02} + f_{02}g_{11} - g_{02}^2) - b^2(f_{20}g_{20} + g_{20}g_{11}) \\ & \left. + c^2(f_{11}f_{02} + f_{02}g_{02}) + (2a^2 - bc)(f_{20}f_{11} - g_{11}g_{02}) \right\} \end{aligned} \quad (7.38)$$

## 7.2.2 周期振動の分岐

非自律系 (7.10) の周期解の分岐について考えよう。自律系の場合は 4.1.2 で定義したポアンカレ写像を用いて同様に処理できる。いずれにしろ周期解の分岐をポアンカレ写像の固定点・周期点の分岐と考えて、分岐のタイプの可能性を調べるとよい。いま、式 (7.10) の解を

$$x(t) = \varphi(t, x, \lambda), \quad x(0) = \varphi(0, x, \lambda) = x \quad (7.39)$$

とし、ポアンカレ写像を

$$T: R^n \rightarrow R^n; x \mapsto T(x) = \varphi(L, x, \lambda) \quad (7.40)$$

で定義しよう。また、式 (7.10) が周期  $2\pi$  の周期解を持つとして、これに対応する  $T$  の固定点方程式：

$$x_0 - T(x_0) = 0 \quad (7.41)$$

を満たす固定点を  $x_0 \in R^n$ ，その特性方程式を

$$\chi(\mu) = \det(\mu I_n - A(\lambda)) = \mu^n + a_1 \mu^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \mu + a_n = 0 \quad (7.42)$$

とする。ここに、

$$DT(x_0) = \frac{\partial T(x_0)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(L, x_0, \lambda)}{\partial x} = A(\lambda) \quad (7.43)$$

とおいた。さて、固定点の双曲性が崩れるのは、式 (7.42) の特性根の 1 つが、複素平面上の単位円上に位置する場合であった。このことを考慮して余次元 1 の分岐のタイプを分けると、以下に述べる接線分岐、周期倍分岐、ネイマルク・サッカー分岐の 3 種類となる。

#### 固定点の接線分岐 (tangent bifurcation)

パラメータの変化に伴って、2 つの対になった固定点が癒着消滅、あるいは発生する分岐である。この分岐は特性根の 1 つが 1 となる場合におこる。すなわち、分岐の条件は

$$\chi(1) = \det(I_n - A(\lambda)) = 1 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n = 0 \quad (7.44)$$

となる。分岐の起こる固定点对としては

$$\begin{aligned} {}_k D + {}_{k+1} D &\Leftrightarrow \emptyset, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \\ {}_k I + {}_{k+1} I &\Leftrightarrow \emptyset, \quad k = 1, 2, \dots, n-2 \end{aligned} \quad (7.45)$$

のいずれかである。

#### 固定点の周期倍分岐 (period doubling bifurcation)

この分岐は特性根の 1 つが  $-1$  を横切る場合に生じる。分岐後、固定点は安定性が変化し、対になった 2-周期点の発生（あるいは消滅）をみる。このことから分岐の名前が付けられている。分岐の条件は

$$\chi(-1) = \det(-I_n - A(\lambda)) = (-1)^n + a_1(-1)^{n-1} + \cdots - a_{n-1} + a_n = 0 \quad (7.46)$$

となる。また、分岐式は

$$\begin{aligned} {}_k D &\Leftrightarrow {}_{k+1} I + 2 {}_k D^2, \quad k = 0, 1, \dots, n-2 \\ {}_k D &\Leftrightarrow {}_{k-1} I + 2 {}_k D^2, \quad k = 2, 3, \dots, n \\ {}_k I &\Leftrightarrow {}_{k+1} D + 2 {}_k D^2, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \\ {}_k I &\Leftrightarrow {}_{k-1} D + 2 {}_k D^2, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (7.47)$$

となる。ここに、 ${}_k D^2$  はタイプが  $D$  型の 2-周期点で、その不安定次元が  $k$  であることを表す。

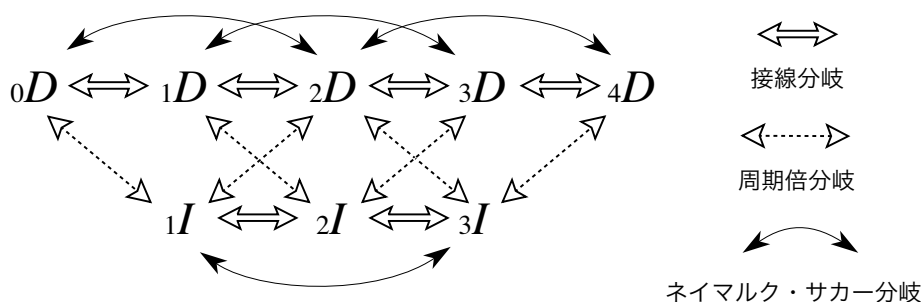


図 7.4 接線分岐, 周期倍分岐とネイマルク・サッカー分岐 (4次元の場合).

### 固定点のネイマルク・サッカーの分岐 (Neimark-Sacker bifurcation)

1 組の複素特性根が, 複素平面内の単位円を横切る分岐である. 平衡点のホップ分岐に対応する固定点の分岐といえる. 分岐の条件は

$$\chi(e^{j\theta}) = \det(e^{j\theta} I_n - A(\lambda)) = e^{jn\theta} + a_1 e^{j(n-1)\theta} + \dots + a_{n-1} e^{j\theta} + a_n = 0 \quad (7.48)$$

である. この分岐はネイマルクとサッカーによって研究されたのでこの名前がある. 平衡点との類似性から写像のホップ分岐と言ったりもする. 一般にこの分岐が起こると, 固定点の周りに写像  $T$  によって不変な閉曲線が発生または消滅する.

ただ, 写像の場合はベクトル場のホップ分岐と異なって, 特性根が単位円上の特定の角度  $\theta$  を通過して変化すると, 共振と呼ばれる現象が見られ, 発生または消滅する閉曲線上に  $\theta$  に依存した特定の周期点対が現れる. このことについてはここでは詳細を省略する.

分岐のタイプは

$$\begin{aligned} {}_k D &\Leftrightarrow {}_{k+2} D + ICC, \quad k = 0, 1, \dots, n-2 \\ {}_k D + ICC &\Leftrightarrow {}_{k+2} D, \quad k = 0, 1, \dots, n-2 \end{aligned} \quad (7.49)$$

である. ここで,  $ICC$  は**不変閉曲線** (invariant closed curve) を表す. この分岐式では, 上述の共振現象に関係した事項は省略してある. また,  $ICC$  の安定性についても表示していない. この  $ICC$  の安定性については 2 次元系の場合, 先に述べた渦心点問題と類似な考えで条件を導くことができるがかなり煩雑となるので省略する. なお,  $ICC$  はもとの非自律系 (7.10) の解では, 一般に 2 つの基本周波数を持つ **2 重周期解 (準周期解)** となっている.

以上, 3 種類の分岐の分岐式と双曲型固定点との関係を図示すると図 7.4 となる.

#### 【例 7.5】 2, 3 次元のネイマルク・サッカー分岐の条件

2 次元の場合 式 (7.48) より

$$e^{j2\theta} + a_1 e^{j\theta} + a_2 = 0$$

したがって

$$\cos 2\theta + a_1 \cos \theta + a_2 = 0, \quad \sin 2\theta + a_1 \sin \theta = 0$$



これより  $\theta$  を消去すると

$$a_2 = 1, \quad -2 < a_1 < 2 \quad (7.50)$$

を得る.

**3次元の場合** この場合も同様にして

$$a_3(a_3 - a_1) + a_2 = 1, \quad -2 < a_3 - a_1 < 2 \quad (7.51)$$

となる. ■

### 7.2.3 余次元の高い分岐

これまでの分岐は、条件式が1つの分岐、すなわち余次元1の分岐であった。一般に分岐の条件が重複すると、平衡点や固定点の退化の度合いが大きい分岐が見られるようになる。また、力学系が特定の構造を持つと必然的に限られた特殊な分岐となる場合がある。たとえば、ハミルトン力学系や対称性のある力学系などがこの例である。自律ハミルトン系の平衡点は、系の構造から特性根は純虚根かあるいは実根しか取り得ないので、分岐問題も特殊な条件のもとに考えることとなる。

しばしば遭遇する余次元2の分岐としては、系の対称性に起因する平衡点や固定点の**枝分かれ** (branching) の分岐である。これは**熊手型分岐** (pitch fork bifurcation) などとも呼ばれている。分岐式でその過程を示しておこう。

#### 平衡点の枝分かれ

$$\begin{aligned} {}_k O &\Leftrightarrow {}_{k+1} O + 2 {}_k O, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \\ {}_k O &\Leftrightarrow {}_{k-1} O + 2 {}_k O, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (7.52)$$

#### 固定点の枝分かれ

$$\begin{aligned} {}_k D &\Leftrightarrow {}_{k+1} D + 2 {}_k D, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \\ {}_k D &\Leftrightarrow {}_{k-1} I + 2 {}_k D, \quad k = 1, 2, \dots, n \\ {}_k I &\Leftrightarrow {}_{k+1} I + 2 {}_k I, \quad k = 1, 2, \dots, n-2 \\ {}_k I &\Leftrightarrow {}_{k-1} I + 2 {}_k I, \quad k = 2, 3, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (7.53)$$

パラメータ平面内で2つの接線分岐の分岐集合が接してできるカस्प点において接した方向にパラメータを変化させると、平衡点や固定点の枝分かれを観察することができる。たとえば、図6.4でカस्प点Cの例をみた。これらの分岐の条件式については、少し煩雑になるので省略する。

#### 【例7.6】例2.8のRC回路の平衡点の分岐

式(2.78)のパラメータ  $\alpha$ , を変化させて平衡点の分岐の様子をみてみよう。  $\delta = 1$  と固定しておこう。平衡点の方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} \alpha x - x^3 - (x - y) &= 0 \\ \alpha y - y^3 - (y - x) &= 0 \end{aligned} \quad (7.54)$$

この方程式は変数変換  $(x, y) \mapsto (y, x)$ ,  $(x, y) \mapsto (-x, -y)$  および  $(x, y) \mapsto (-y, -x)$  に対して不変である。このことを用いると平衡点の座標の計算が楽にできる。パラメータの値と双曲型平衡点の個数およびタイプは表 7.2 となる。したがって次に挙げる平衡点の枝分かれがみられる。相平面図 2.9 参照。

- (1)  $\alpha = 0$  において原点が不安定となり,  $y = x$  方向に安定な平衡点が枝分かれする。すなわち,

$${}_0O \Rightarrow {}_1O + 2{}_0O$$

の分岐がおこる。

- (2)  $\alpha = 2$  で原点が更に枝分かれし,  $y = -x$  方向にタイプ  ${}_1O$  の平衡点が現れる。すなわち,

$${}_1O \Rightarrow {}_2O + 2{}_1O$$

の分岐がおこる。この結果原点は源点となる。

- (3)  $\alpha = 3$  で  $y = -x$  上の 2 個のタイプ  ${}_1O$  の平衡点が同時に枝分かれする。すなわち,

$${}_1O \Rightarrow {}_0O + 2{}_1O$$

の分岐がおこり,  $y = -x$  上の 2 個の平衡点はタイプ  ${}_0O$  となる。 ■

## 7.3 分岐集合の計算

これまでの説明で余次元 1 の分岐のタイプとその条件が分かったので, この節では簡単に分岐集合の計算式と実際に計算した例を示しておこう。

### 7.3.1 平衡点の分岐計算

#### 接線分岐の計算

平衡点の式 (7.17) と分岐の条件式 (7.25) を連立させて解く :

$$\begin{aligned} F(x, \lambda_1) &= f(x, \lambda) = 0 \\ G(x, \lambda_1) &= \chi(0) = \det(-A(\lambda)) = a_n = 0 \end{aligned} \tag{7.55}$$

ここに, 未知変数は  $(x, \lambda_1) \in R^n \times R$  とする。  $\lambda_1$  は  $m$  次元パラメータ  $\lambda \in R^m$  の成分を 1 つ選んで未知変数に繰り入れ, 他は固定して考える。

#### ホップ分岐の計算

平衡点の式 (7.17) と分岐の条件式 (7.27) を連立させて解く :

$$\begin{aligned} F(x, \lambda_1, \omega) &= f(x, \lambda) = 0 \\ G_1(x, \lambda_1, \omega) &= \Re \left[ \det(j\omega I_n - A(\lambda)) \right] = 0 \\ G_2(x, \lambda_1, \omega) &= \Im \left[ \det(j\omega I_n - A(\lambda)) \right] = 0 \end{aligned} \tag{7.56}$$

表 7.2 式 (7.54) の平衡点とそのタイプ.

パラメータ $\alpha$ の値	平衡点の個数	平衡点のタイプと座標
$\alpha < 0$	1	${}_0O(0, 0)$
$0 < \alpha < 2$	3	${}_1O(0, 0), {}_0O(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}), {}_0O(-\sqrt{\alpha}, -\sqrt{\alpha})$
$2 < \alpha < 3$	5	${}_2O(0, 0), {}_0O(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}), {}_0O(-\sqrt{\alpha}, -\sqrt{\alpha})$ ${}_1O(\sqrt{\alpha-2}, -\sqrt{\alpha-2}), {}_1O(-\sqrt{\alpha-2}, \sqrt{\alpha-2})$
$3 < \alpha$	9	${}_2O(0, 0), {}_0O(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}), {}_0O(-\sqrt{\alpha}, -\sqrt{\alpha})$ ${}_0O(\sqrt{\alpha-2}, -\sqrt{\alpha-2}), {}_0O(-\sqrt{\alpha-2}, \sqrt{\alpha-2})$ ${}_1O\left(\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha-3} + \sqrt{\alpha+1}), \frac{1}{2}(\sqrt{\alpha-3} - \sqrt{\alpha+1})\right),$ ${}_1O\left(\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha-3} + \sqrt{\alpha+1}), -\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha-3} - \sqrt{\alpha+1})\right),$ ${}_1O\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha-3} + \sqrt{\alpha+1}), \frac{1}{2}(\sqrt{\alpha-3} - \sqrt{\alpha+1})\right),$ ${}_1O\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha-3} + \sqrt{\alpha+1}), -\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha-3} - \sqrt{\alpha+1})\right)$

ここに,  $\Re(\cdot)$ ,  $\Im(\cdot)$  は実数部と虚数部を表す. 未知数は  $(x, \lambda_1, \omega) \in R^n \times R \times R$  とする. 次元が低い場合は表 7.1 に示したように,  $\omega$  を消去して式 (7.56) の最後の 2 つの条件式を 1 つにまとめ, 未知数  $(x, \lambda_1) \in R^n \times R$  についての問題を解くとよい.

### 7.3.2 周期解すなわち固定点の分岐計算

#### A. 非自律系の場合

##### 接線分岐の計算

固定点の式 (7.41) と分岐の条件式 (7.44) を連立させて解く :

$$\begin{aligned} F(x, \lambda_1) &= x - T(x) = 0 \\ G(x, \lambda_1) &= \det(I_n - A(\lambda)) = 1 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n = 0 \end{aligned} \tag{7.57}$$

ここに, 未知変数は  $(x, \lambda_1) \in R^n \times R$  とする.

**周期倍分岐の計算**

固定点の式 (7.41) と分岐の条件式 (7.46) を連立させて解く：

$$\begin{aligned} F(x, \lambda_1) &= x - T(x) = 0 \\ G(x, \lambda_1) &= \det(-I_n - A(\lambda)) = (-1)^n + a_1(-1)^{n-1} + \cdots - a_{n-1} + a_n = 0 \end{aligned} \quad (7.58)$$

ここに、未知変数は  $(x, \lambda_1) \in R^n \times R$  とする。

**ネイマルク. サッカー分岐の計算**

固定点の式 (7.41) と分岐の条件式 (7.48) を連立させて解く：

$$\begin{aligned} F(x, \lambda_1, \omega) &= x - T(x) = 0 \\ G_1(x, \lambda_1, \theta) &= \Re \left[ \det(e^{j\theta} I_n - A(\lambda)) \right] = 0 \\ G_2(x, \lambda_1, \theta) &= \Im \left[ \det(e^{j\theta} I_n - A(\lambda)) \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.59)$$

ここに、未知変数は  $(x, \lambda_1, \theta) \in R^n \times R \times R$  とする。低い次元の場合は式 (7.59) の最後の 2 つの分岐の条件式から、 $\theta$  を消去して 1 つの式にまとめ  $(x, \lambda_1) \in R^n \times R$  について解けばよい。

**B. 自律系の場合**

自律系の周期解の計算は、前章 6.4.2 で局所断面の座標と周期解の周期を未知数として解く問題として取り扱った。ここでもその延長として問題を定式化してみよう。分岐の条件だけが問題となる。6.4.2 の記法をそのまま使用してポアンカレ写像  $T$  は式 (6.77) で定義しよう。また  $x_0 \in R^n$  が  $T$  の固定点とし、固定点方程式 (6.78) が成り立っているとしよう。するとこの周期解に対する特性方程式は

$$\chi(\mu) = \det(\mu I_n - A(\lambda)) = \mu^n + a_1 \mu^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \mu + a_n = 0 \quad (7.60)$$

と書ける。ここに、

$$DT(x_0) = \frac{\partial T(x_0)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(L, x_0, \lambda)}{\partial x} = A(\lambda) \quad (7.61)$$

である。なお、方程式がパラメータに依存することを表すために  $\lambda$  を引数に入れておいた。さて、自律系の周期解は常に少なくとも 1 つの特性乗数が 1 であることを思い出そう。すなわち、

$$\chi(1) = \det(I_n - A(\lambda)) = 1 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n = 0 \quad (7.62)$$

は恒等的に成り立っている。したがって式 (7.60) は次式のように因数分解できる。

$$\begin{aligned} \chi(\mu) &= \mu^n + a_1 \mu^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \mu + a_n \\ &= (\mu - 1)(\mu^{n-1} + b_a \mu^{n-2} + \cdots + b_{n-2} \mu + b_{n-1}) = 0 \end{aligned} \quad (7.63)$$

ここに

$$b_k = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 1 + \sum_{\ell=1}^k a_\ell \quad (7.64)$$

そこで

$$\chi_A(\mu) = \mu^{n-1} + b_1\mu^{n-2} + \cdots + b_{n-2}\mu + b_{n-1} = 0 \quad (7.65)$$

を定義すると、特性乗数に関する分岐の条件はこの式を使って得ることができる。

### 接線分岐の条件

式 (7.65) より

$$\chi_A(1) = 1 + b_1 + \cdots + b_{n-2} + b_{n-1} = 0 \quad (7.66)$$

あるいは式 (7.60) を  $\mu$  で微分して  $\mu = 1$  と置くと式 (7.66) と等価な次式を得る。

$$\frac{d\chi}{d\mu}(1) = n + (n-1)a_1 + \cdots + a_{n-1} = 0 \quad (7.67)$$

### 周期倍分岐の条件

式 (7.65) より

$$\chi_A(-1) = (-1)^{n-1} + b_1(-1)^{n-2} + \cdots - b_{n-2} + b_{n-1} = 0 \quad (7.68)$$

あるいは、この分岐に対しては  $\mu = 1$  は関係しないので元の特性方程式を使って

$$\chi(-1) = (-1)^n + a_1(-1)^{n-1} + \cdots - a_{n-1} + a_n = 0 \quad (7.69)$$

を用いてもよい。

### ネイマルク・サッカー分岐の条件

式 (7.65) より

$$\chi_A(e^{j\theta}) = (e^{j\theta})^{n-1} + b_1(e^{j\theta})^{n-2} + \cdots + b_{n-2}e^{j\theta} + b_{n-1} = 0 \quad (7.70)$$

あるいは、この分岐に対しても  $\mu = 1$  は関係しないので元の特性方程式を使って

$$\chi(e^{j\theta}) = (e^{j\theta})^n + a_1(e^{j\theta})^{n-1} + \cdots + a_{n-1}e^{j\theta} + a_n = 0 \quad (7.71)$$

を用いることもできる。

これらの条件と式 (6.83) を組み合わせて、固定点の座標、帰還時間、分岐値を求めるとよい。

#### 【例 7.7】 2次元と3次元自律系の分岐の条件

**2次元自律系のリミットサイクルの接線分岐の条件** 2次元自律系では接線分岐しか存在しない。接線分岐の条件は式 (7.67) より

$$\chi_A(1) = b_1 + 1 = a_1 + 2 = 0 \quad (7.72)$$

となる。

**3次元自律系のリミットサイクルの分岐の条件**

**接線分岐の条件：** 式 (7.67) より次式となる.

$$\chi_A(1) = a_2 + 2a_1 + 3 = 0 \quad (7.73)$$

**周期倍分岐の条件：** 式 (7.68) より次式となる.

$$\chi_A(-1) = a_2 + 1 = 0 \quad (7.74)$$

**ネイマルク・サッカ一分岐の条件：** 式 (7.70) より実部と虚部をとると

$$\begin{aligned} \cos 2\theta + (a_1 + 1) \cos \theta + a_2 + a_1 + 1 &= 0 \\ \sin 2\theta + (a_1 + 1) \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (7.75)$$

となる. 両式から  $\theta$  を消去すると, 次式の条件を得る.

$$a_1 + a_2 = 0, \quad -3 < a_1 < 1 \quad (7.76)$$

■

### 7.3.3 計算例：自励系の強制振動（同期化現象）

ここでは, 計算例として, 古くから知られている発振器の同期化現象を解析してみよう.

#### 【例 7.8】強制レーリィー方程式の基本調波同期

安定なりミットサイクルを持つ自律系は自励振動系とも呼ばれている. 発振器, 振動子なども同義語といってよい. この系に外部から周期的な外力を加えるとどの様な応答がみられるであろうか. 自励振動系の発振周波数 (安定なりミットサイクルの周波数) と外力の周波数が簡単な有理数比に近い場合には, 系の応答が外力の整数倍に引き込まれた周期振動となることがある. これが**同期現象** (synchronization) である.

以下, 最も簡単なモデルである第 1 章例 1.2 で導いておいた式 (1.22) を例にし, 基本調波同期化現象と分岐の関係をみることにしよう.

#### (1) 定式化

式 (1.22) を添字をとって書き直すと

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} &= v \\ C \frac{dv}{dt} &= -i - g(v) + j(t) \end{aligned} \quad (7.77)$$

となる. いま, 非線形抵抗の特性を次式で仮定しよう.

$$i_G = g(v_G) = -g_1 v_G + g_3 v_G^3 \quad (7.78)$$

また, 電流源は

$$j(t) = J \cos \omega t \quad (7.79)$$

で表される正弦波的な強制項とする.

式 (7.77) を標準形に変換しよう. まず,

$$x = \sqrt{L}i, \quad y = \sqrt{C}v \quad (7.80)$$

と変換する. 式 (7.77) は次式となる.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{LC}}y \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{LC}}x + \frac{g_1}{C} \left(1 - \frac{g_3}{g_1 C}y^2\right)y + \frac{J}{\sqrt{C}} \cos \omega t \end{aligned} \quad (7.81)$$

そこで, 時間軸を

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{LC}}t = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7.82)$$

と変換すると, 式 (7.81) は次式となる.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= y \\ \frac{dy}{d\tau} &= -x + \frac{g_1}{\omega_0 C} \left(1 - \frac{g_3}{g_1 C}y^2\right)y + \frac{J}{\omega_0 \sqrt{C}} \cos \frac{\omega}{\omega_0} \tau \end{aligned} \quad (7.83)$$

いま, 諸パラメータを次式で定義しよう.

$$\epsilon = \frac{g_1}{\omega_0 C} = g_1 \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \gamma = \frac{g_3}{g_1 C}, \quad B = \frac{J\sqrt{C}}{g_1}, \quad \nu = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (7.84)$$

式 (7.83) は次の標準形となる. ただし, 時刻  $\tau$  は改めて  $t$  と書き直しておいた.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x + \epsilon(1 - \gamma y^2)y + \epsilon B \cos \nu t \end{aligned} \quad (7.85)$$

## (2) 基本調波周期解に対する平均化方程式

式 (7.85) の解を

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) \cos \nu t + v(t) \sin \nu t \\ y(t) &= -u(t) \sin \nu t + v(t) \cos \nu t \end{aligned} \quad (7.86)$$

において, 平均化方程式を求めると次式を得る.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\epsilon}{2} \left[ \left(1 - \frac{3}{4}\gamma r^2\right)u - \sigma v \right] \\ \dot{v} &= \frac{\epsilon}{2} \left[ \sigma u + \left(1 - \frac{3}{4}\gamma r^2\right)v + B \right] \end{aligned} \quad (7.87)$$

ここに

$$r^2 = u^2 + v^2, \quad \sigma = \frac{2(\nu - 1)}{\epsilon} \quad (7.88)$$

とおいた。式 (7.88) は両式に  $\epsilon/2$  が掛けられているので、例 6.1 と同様に時間軸をスケール変換して次式を考えることにしよう。

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \left(1 - \frac{3}{4}\gamma r^2\right)u - \sigma v = f(u, v) \\ \dot{v} &= \sigma u + \left(1 - \frac{3}{4}\gamma r^2\right)v + B = g(u, v)\end{aligned}\tag{7.89}$$

### (3) 式 (7.89) の平衡点とその安定性

式 (7.89) の右辺を零とおいて、

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{3}{4}\gamma r^2\right)u - \sigma v &= 0 \\ \sigma u + \left(1 - \frac{3}{4}\gamma r^2\right)v &= -B\end{aligned}\tag{7.90}$$

両辺を 2 乗して加えると

$$\left[\left(1 - \frac{3}{4}\gamma r^2\right)^2 + \sigma^2\right]r^2 = B^2\tag{7.91}$$

を得る。この振幅が満たす式は式 (6.13) と同じである。平衡点でのヤコビ行列は

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{4}\gamma(3u^2 + v^2) & -\frac{3}{2}\gamma uv - \sigma \\ -\frac{3}{2}\gamma uv + \sigma & 1 - \frac{3}{4}\gamma(u^2 + 3v^2) \end{bmatrix}\tag{7.92}$$

ただし、 $(u, v)$  は平衡点の座標とする。したがって、この平衡点の特性方程式は次式となる。

$$\chi(\mu) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \mu^2 + a_1\mu + a_2 = 0\tag{7.93}$$

ここに

$$\begin{aligned}a_1 &= 3\gamma r^2 - 2 \\ a_2 &= \sigma^2 + 1 - 3\gamma r^2 + \frac{27}{16}\gamma^2 r^4 = \sigma^2 + \left(1 - \frac{3}{4}\gamma r^2\right)\left(1 - \frac{9}{4}\gamma r^2\right)\end{aligned}\tag{7.94}$$

とおいた。したがって、第 2 章 2.3.2 の表 2.1 より平衡点のタイプを決定できる。

### (4) 特性の概要

図 7.5 は式 (7.91) の関係を  $(\sigma, B, r)$  空間の曲面として描いた図である。なお、 $\gamma$  は簡単のため  $\gamma = 4/3$  と選んだ。  $B$  を固定し、 $(\sigma, r)$  平面に射影すると、振幅の周波数特性が得られる。また、 $a_2 = 0$  で決まる接線分岐曲線と  $a_1 = 0$  で決まるホップ分岐曲線を  $(\sigma, B)$  平面に射影すると分岐図が得られる。



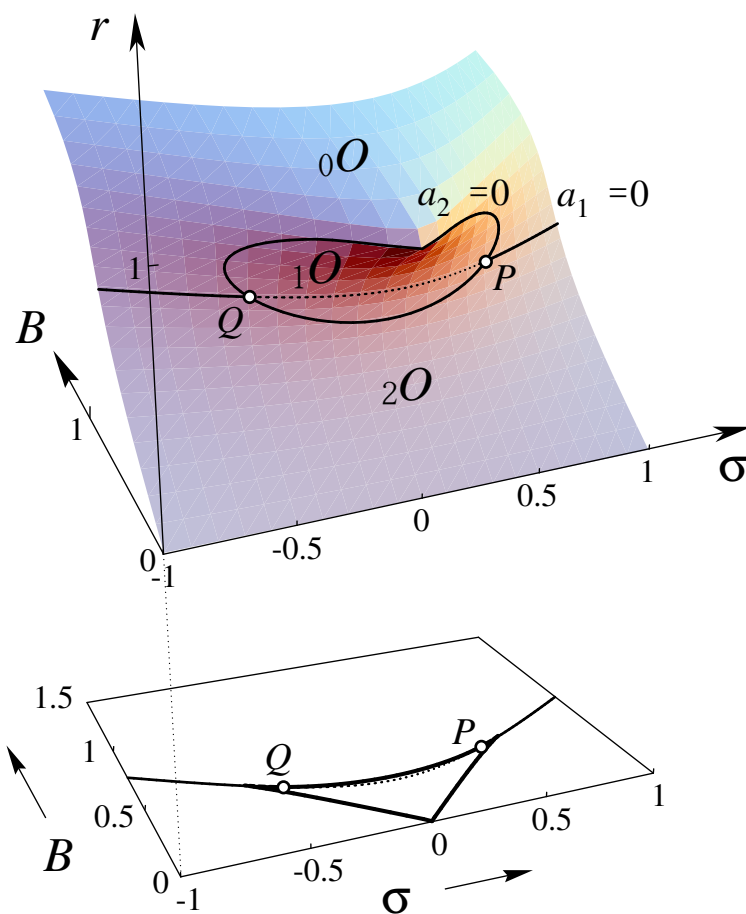


図 7.5 式 (7.91) の振幅を表す曲面とその射影の分岐図.

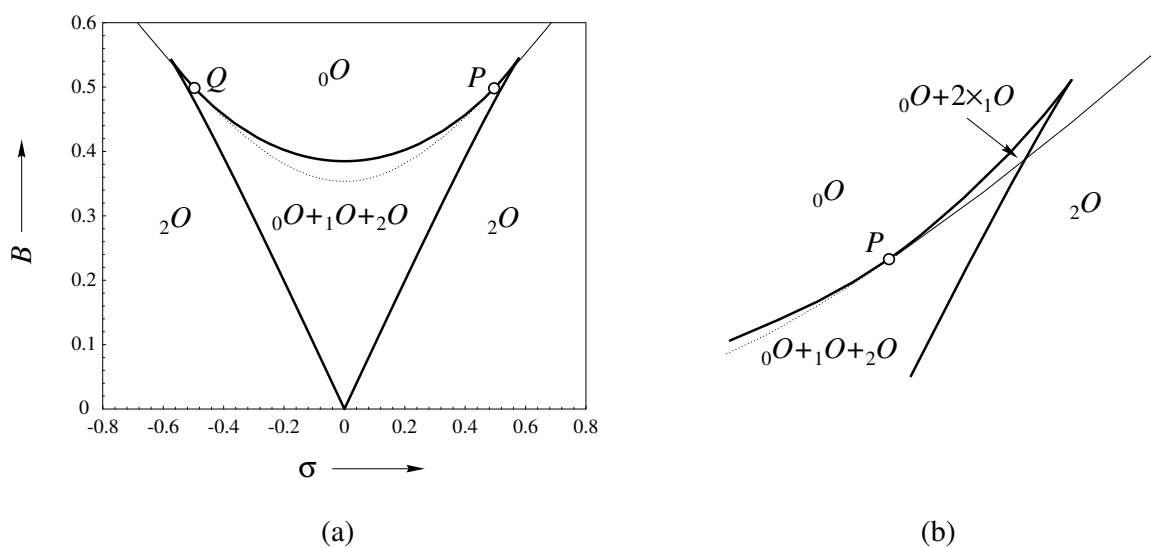


図 7.6 平衡点の分岐図 (a) と点  $P$  の近傍の拡大図 (b).

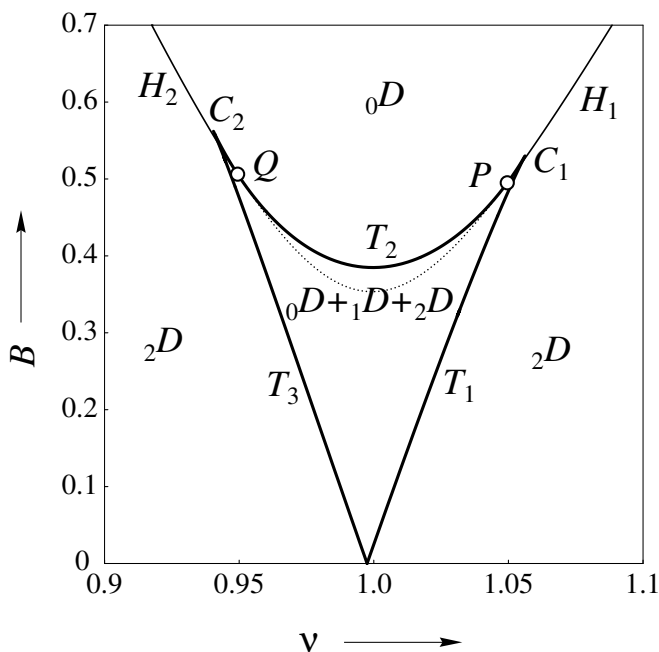


図 7.7 式 (7.85) の固定点の分岐図  $\epsilon = 0.2$ .

(5) 平衡点の分岐図

図 7.6 は平衡点の分岐図である。図 7.5 の平衡点の曲面と見比べることにより、各分岐曲線を横切ってパラメータを変化させるとどのような平衡点の分岐が起こるかが理解できよう。太い実線は、 $a_2 = 0$  で定まる接線分岐曲線を表し、図では  $t_1, t_2, t_3$  で示してある。点  $c_1, c_2$  はカusp点となっている。細かい実線は  $a_1 = 0, a_2 > 0$  の条件を満たすホップ分岐の曲線を表し  $h_1, h_2$  で示した。この分岐は

$${}_0O \Rightarrow {}_2O + LC({}_0D)$$

となるスーパー・クリティカルな分岐となっている。細かい点線は条件  $a_1 = 0, a_2 < 0$  を満たすので平衡点の分岐には関係しない。 $a_1 = 0$  を満たす曲線を追跡するとどうなるかを見るために示しておいた。ホップ分岐曲線より下の領域では、この分岐によって生じたりミットサイクルが存在する。点  $P$  と  $Q$  は、接線分岐とホップ分岐の 2 つの条件を満たす点であり、余次元 2 の分岐となっている。これらの点の近傍では、リミットサイクルと平衡点の分岐が関係した大域的な分岐が生じる。このことについては次の章で取りあげる。また、 $B = 0, \sigma = 0$  は接線分岐曲線が  $\sigma$  軸と 1 点で交差しており、 $1 - 3\gamma r^2/4 = 0$  を満たす円上の点はすべて平衡点となっている。

(6) 同期化現象

点  $P$  と  $Q$  の近傍を除いて、大ざっぱにみると接線分岐曲線で囲まれた  $\nabla$  領域とその上部の領域で安定な平衡点が存在する。この平衡点が外力の周波数  $\nu$  に引き込まれた、すなわち同期した周期状態に対応する。 $\nabla$  領域の両側面の外では安定なりミットサイクルがあり、これは式 (7.85) の同期していない解に対応する。この場合、式 (7.86) の係数はリミットサイクルの周波数で周期的に変化する。この

周波数は一般に外力の周波数  $\nu$  とは無関係なので，式 (7.86) は 2 つの基本周波数を持つ非周期振動となる．このような振動は準周期振動と呼ばれている．パラメータが  $\nabla$  領域の両側面を横切って外に出ると同期が外れることとなる．逆に中に入ると同期する．したがって両側面上で起こる接線分岐：

$${}_0O + {}_1O \Leftrightarrow \emptyset$$

はリミットサイクル上で起っている．なお， $\nabla$  領域の上部  $PQ$  間では

$${}_2O + {}_1O \Leftrightarrow \emptyset$$

の接線分岐となっている．

### (7) 式 (7.85) の周期解の分岐曲線

7.3.2(A) で述べた数値的方法で，式 (7.85) の周期解の分岐曲線を直接追跡してみよう．図 7.7 は計算した結果の例である．太い実線は，固定点の接線分岐曲線を表し，図では  $T_1, T_2, T_3$  で示してある．点  $C_1, C_2$  はカusp点となっている．細い実線はネイマルク・サッカー分岐の曲線を表し  $H_1, H_2$  で示した．この曲線を上の領域から下の領域へと横切ってパラメータを変化させると

$${}_0D \Rightarrow {}_2D + ICC$$

の分岐がみられる．図 7.6 と比較して，平衡点を固定点，リミットサイクルを不変閉曲線 ( $ICC$ ) を置き換えれば，両者に相似な分岐現象がみられることが分かる．

## 7.4 本章のまとめと文献

### 7.4.1 本章のまとめ

1. リアプーノフの直接法は，リアプーノフ関数を用いて解の有界性や平衡点の安定性を証明する方法である．微分方程式の解を求めることなく使用できるのが特徴であるが，リアプーノフ関数を構成する一般的方法は知られていない．
2.  $D$ -システムとは，解の有界性が保証された非自律系のことである．
3. 平衡点や固定点の分岐は，パラメータの変化に伴ってそれらの点の位相的性質が変化する場合に起こる．すなわち，双曲性が失われる点で分岐する．余次元 1 の分岐とは，分岐の条件式が 1 つの分岐をいう．
4. 平衡点に関する余次元 1 の分岐は，接線分岐とホップ分岐の 2 種類である．
5. 固定点，すなわち周期解，に関する余次元 1 の分岐は，接線分岐，周期倍分岐およびネイマルク・サッカー分岐の 3 種類である．
6. 分岐図とはパラメータ空間に分岐の条件を満たす集合を示した図のことである．
7. 分岐のパラメータ (分岐集合) を数値計算するには，平衡点や固定点の方程式と分岐の条件式を状態とパラメータを変数と考えて解けばよい．

### 7.4.2 本章の文献

リアプーノフの直接法については、ラサール・レフシェッツ [O8], Hale [O5], Rouche et al. [O13], 吉沢 [O17] に詳しい。D-システムについては Lefschetz [O9], Cartwright [P3], 古屋・南雲 [N7] に紹介されている。平衡点や固定点の分岐に関しては、数多くの教科書や論文がある。Guckenheimer・Holmes [D8], Hale・Koak [D10], Marsden・McCracken [D14], Andronov et al. [N1, D2, 3], Neimark [D18] などが標準的であろう。

分岐集合の数値計算法については、筆者らは 1980 年ごろからここで述べた方法を使ってきた、川上 [P5], 山本 [P15] は変分方程式の解も同時に計算する等価な方法を提案している。Kubicek and Marek [C3], Parker and Chua [C5] には具体的な手順が示されている。また、Kuznetsov [D12] は応用の立場から分岐現象をまとめて紹介しており、本書で解説できていない部分を補うには最適の教科書ではないかと思う。

## 7.5 練習問題 7

7.1 例 1.1 で取りあげた摩擦のある単純な振り子の式 (1.9) の解の有界性を証明せよ。

7.2 例 6.1 で扱った平均化方程式 (6.9) :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\zeta u - \left(a - \frac{3}{4}cr^2\right)v \\ \dot{v} &= \left(a - \frac{3}{4}cr^2\right)u - \zeta v + b \end{aligned} \quad (7.95)$$

の解の有界性を証明せよ。リアプーノフ関数として

$$V(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (7.96)$$

を用いると、十分大きい円周上で  $\dot{V} < 0$  となることを言えばよい。

7.3 平衡点の接線分岐とホップ分岐について、分岐の前後の相平面図の変化をスケッチせよ。分岐平衡点の近傍の様子を簡単に示すだけでよい。

7.4 固定点の周期倍分岐について、7.3 と同様にスケッチせよ。

7.5 例 7.8 の平均化方程式 (7.89) について、周波数特性、すなわち固定した外力の振幅  $B$  に対して  $(\sigma, r)$  平面での式 (7.91) の曲線、を描け。また、平衡点の安定性についても検討せよ。

7.6 BVP(Bönhffer van der Pol) 方程式 :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= c \left( x - \frac{1}{3}x^3 + y \right) \\ \dot{y} &= -\frac{1}{c}(x + by - a) \end{aligned} \quad (7.97)$$

の平衡点の分岐について考察せよ。ただし、 $c > 0$ ,  $b > 0$  と仮定する。

## 第 8 章

# 大域的性質とカオス

これまでの話は、いずれも平衡点やポアンカレ写像の固定点についての性質を述べたものであり、数学的には線形近似を活用することによってそれらの性質を調べた。しかしながら非線形モデルを採用した目的の 1 つは、これらの線形近似では説明できない、非線形特有の現象をモデル方程式の解の性質から説明することにある。すなわち、状態空間の広い領域にわたって解の運動が展開されるような現象の解析こそが非線形系のおもしろさといえる。この章では運動の大域的性質に関連した 2, 3 の問題を取りあげる。

まず 8.1 で 2 次元自律系にみられる大域的な性質を述べる。そのあと、8.2 において周期的 2 次元非自律系の大域的性質の 1 つのである二重漸近運動、特にホモクリニック運動について初歩的な解説を試みる。ここで述べる馬蹄形写像とその不変集合の性質を知ることが、カオス状態とはどのような状態かを理解する上で基本的役割を果たす。最後に 8.3 でカオス振動とそれに関連した大域的性質を概説する。

### 8.1 2 次元自律系の大域的性質

2 次元自律系は相平面図を描くことによって、幾何学的に解の挙動の全容をみることができ、数学的には平面の位相幾何学的性質を用いて多くの大域的性質が証明されている。以下、証明なしでこれらの性質の幾つかを紹介する。

応用面でも、平均化法を用いて非自律系の解の振る舞いを自律系に翻訳して解析する場合の例のように、大域的現象を把握する上で 2 次元自律系の性質を知っておくことは大切である。

さて、この節を通じて 2 次元自律系：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, \lambda) \\ \dot{y} &= g(x, y, \lambda) \end{aligned} \tag{8.1}$$

を考える。ここに  $(x, y) \in R^2$  は系の状態を、 $\lambda \in R^m$  はパラメータを表す。パラメータは 1 個または 2 個考えれば十分であるが以下の話では特にことわずらなく使う。解の存在と一意性やなめらかさなどについては議論に必要なだけ式 (8.1) の右辺のベクトル場がなめらかであると仮定する。

また、適当な有界閉集合  $M$  があって、 $M$  より外に初期値を持つ解は有限時間で  $M$  に流れ込んで

くるものと仮定する。議論に必要な平衡点や周期解その他の不変集合は  $M$  に含まれているものとしよう。したがって、実際は平面上の力学系というより縁から解が流れ込んでくる円盤内の力学系を考えることになる。

ここで、解の極限集合と不変集合を紹介しておく。これまでのように式 (8.1) の解をまとめて書くときはベクトル記法で簡単に

$$x(t) = \varphi(t, x_0), \quad x(0) = \varphi(0, x_0) = x_0 \quad (8.2)$$

と書き、各成分で書く必要がある場合にはベクトル

$$x(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad \varphi(t, x_0) = \begin{bmatrix} \phi(t, x_0, y_0) \\ \psi(t, x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

の成分で表示することにしよう。解 (8.2) の軌道、正の半軌道や負の半軌道については、4.1.1 で定義した。すなわち、それらはそれぞれ次の集合である。

$$\begin{aligned} \gamma(x_0) &= \{x \in R^2 \mid x(t) = \varphi(t, x_0), t \in R\} \\ \gamma^+(x_0) &= \{x \in R^2 \mid x(t) = \varphi(t, x_0), t \in [0, \infty)\} \\ \gamma^-(x_0) &= \{x \in R^2 \mid x(t) = \varphi(t, x_0), t \in (-\infty, 0]\} \end{aligned} \quad (8.3)$$

そこでまず、解 (8.2) の未来や過去において漸近する集合に名前を付けておこう。時間軸の過去と未来をギリシャ文字アルファベットの最初と最後に対応させ、過去への極限に  $\alpha$  極限、未来への極限に  $\omega$  極限という用語を使う。そこで

$$\omega(x_0) = \omega(\gamma(x_0)) = \omega\text{limit}(x_0) = \omega\text{limit}(\gamma(x_0)) = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} \varphi(t, x_0)} \quad (8.4)$$

を初期値  $x_0$  あるいは、この初期値によって決まる軌道  $\gamma(x_0)$  の  $\omega$  極限集合 ( $\omega$ -limit set) という。時間を逆に辿って、

$$\alpha(x_0) = \alpha(\gamma(x_0)) = \alpha\text{limit}(x_0) = \alpha\text{limit}(\gamma(x_0)) = \bigcap_{\tau \leq 0} \overline{\bigcup_{t \leq \tau} \varphi(t, x_0)} \quad (8.5)$$

を  $\alpha$  極限集合 ( $\alpha$ -limit set) という。われわれの考える力学系 (8.1) では  $\alpha$  極限集合は有界集合  $M$  から飛び出してしまうかも知れない。そのような極限は以下の話では必要ない。他方、解は  $M$  から抜け出せないと仮定しているから  $\omega$  極限集合は必ず存在する。これらはシステムの定常状態と考えて良いであろう。

次に、集合  $N \subset M \subset R^2$  は、任意の初期値  $x_0 \in N$  に対して、すべての時刻で  $\varphi(t, x_0) \in N$  のとき、**不変集合** (invariant set) という。時間軸の正 ( $\omega$ )、負 ( $\alpha$ ) 不変集合も同じように考えるとよい。

### 【例 8.1】相平面図と極限集合

図 8.1 は適当に描いた相平面図である。5つの平衡点、2つのリミット・サイクル、サドルに出入りする軌道等は不変集合である。点  $A$  の  $\alpha$  極限集合はサドル  ${}_1O_1$ 、 $\omega$  極限集合はリミット・サイクル  $LC_1$  となっている。■

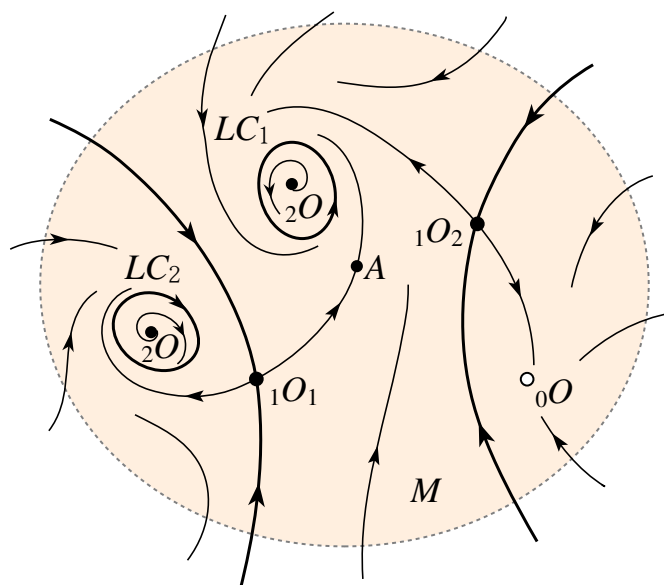


図 8.1 相平面図の例.

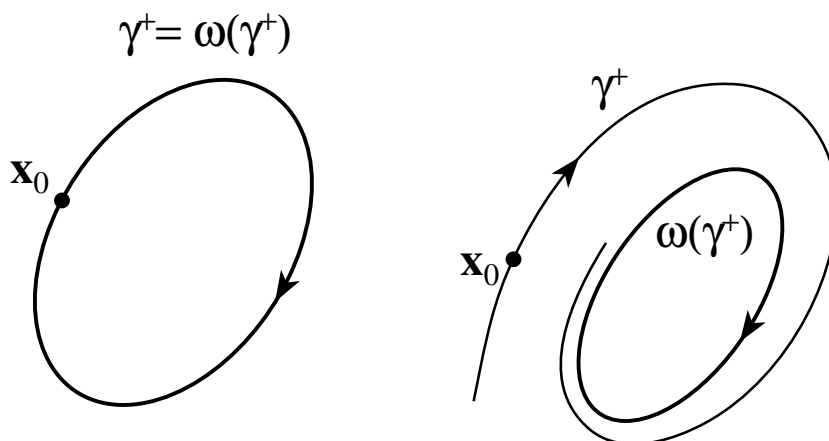


図 8.2 極限集合がリミット・サイクルの例.

### 8.1.1 ポアンカレ・ベンディクソンの定理

状態が 2 次元であることから、解の性質がかなり制限されたものとなる。実際基本的な解は、平衡点、周期解および時間の過去あるいは未来への進展でこれらに漸近する解の 3 種類しかない。

**【ポアンカレ・ベンディクソンの定理】**

$\gamma^+(x_0) \subset M$  とし、この半軌道の  $\omega$  極限集合  $\omega(\gamma^+(x_0))$  は平衡点を持たないとする。このとき、 $\omega(\gamma^+(x_0))$  は周期軌道となる。実際、 $\gamma^+(x_0)$  は  $\omega(\gamma^+(x_0))$  と一致しているか、 $\omega(\gamma^+(x_0))$  に巻き付く軌道となっている。図 8.2 参照。

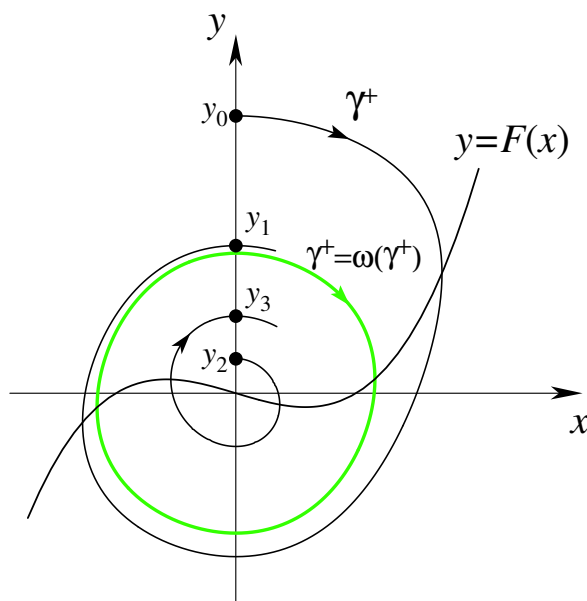


図 8.3 リエナール方程式のリミット・サイクル.

**【例 8.2】リエナール型方程式のリミット・サイクル**

ファン・デア・ポール方程式やレーリィー方程式を一般化した次の方程式：

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \tag{8.6}$$

はリエナール (Linarad) の方程式と呼ばれている。ここに  $f(x)$  は偶関数で  $f(0) < 0$ ,  $g(x)$  は奇関数で  $x \neq 0$  で  $xg(x) > 0$  とする。さらに

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx, \quad G(x) = \int_0^x g(x)dx \tag{8.7}$$

を定義し、 $x \rightarrow \pm\infty$  のとき  $F(x) \rightarrow \pm\infty$  としよう。  $F$  は散逸関数に、また  $G$  は復元力のポテンシャルエネルギーに対応していることに注意しよう。式 (8.6) は次の連立方程式に書き直せる。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -g(x) \end{aligned} \tag{8.8}$$

式 (8.8) は  $y$  軸を局所断面と考えると、図 8.3 に示すような軌道がある。平衡点である原点は  $f(0) < 0$  より 2 次元的に不安定である。したがってポアンカレ・ベンディクソンの定理より、式 (8.8) は少なくとも 1 つのリミット・サイクルを持つ。実際、 $y$  軸を局所断面にとってもっと詳細に考えると式 (8.8) は軌道漸近安定なリミット・サイクルを唯一つもつことが証明される。 ■

**【例 8.3】リミット・サイクルの消滅**

例 5.5 で考えた硬い特性のファン・デア・ポール方程式 (5.96) をとりあげよう。リミット・サイクルがある場合は、図 8.4(a) の図のように原点近傍の解の  $\alpha$  極限集合が不安定リミット・サイクル ( ${}_1D$ ),



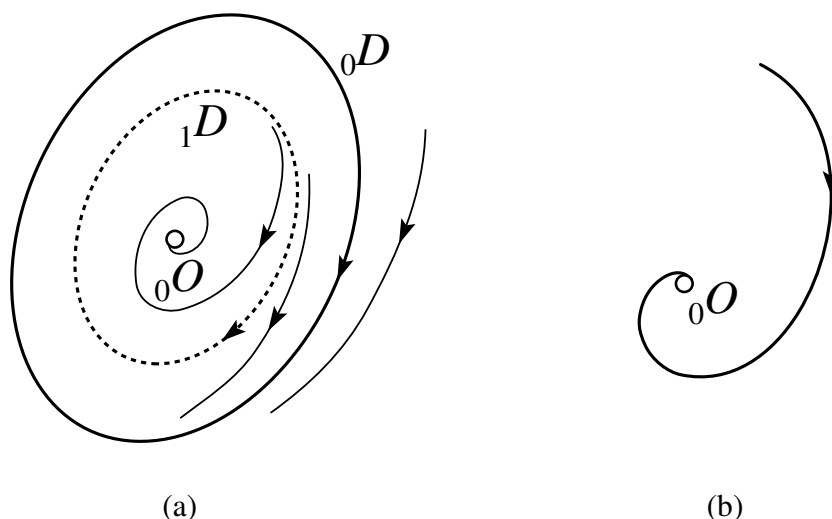


図 8.4 リミット・サイクル対の消滅.

外からの軌道の  $\omega$  極限集合が安定なリミット・サイクル ( ${}_0D$ ) となっている. 系のパラメータ  $\beta$  を変化させてこれらのリミット・サイクルが癒着し消滅すると, 原点近傍の解の  $\alpha$  極限集合は図の範囲では存在しなくなる. 勿論, リミット・サイクルの癒着にはポアンカレ写像の固定点の接線分岐が対応している. ■

### 8.1.2 セパトトリクスの変化

サドルの安定および不安定多様体は, 相平面の大域的性質を決める要素として重要である. いま, 図 8.5(a) に示すようにサドルに出入りする軌道をそれぞれ  $\alpha$  枝および  $\omega$  枝と呼ぶことにしよう. これらは合わせてサドルの**セパトトリクス** (separatrix) ともいう. さて図 8.5(b) のように, 1つのサドルの  $\alpha$  枝が他のサドルの  $\omega$  枝となっているとき, **サドル・コネクション** (saddle connection) があるという. また図 8.5(c) のように, 自分の  $\alpha$  枝が自身の自身  $\omega$  枝となっているとき**セパトトリクス・ループ** (separatrix loop) という. サドル・コネクションやセパトトリクス・ループはパラメータの変動やベクトル場の摂動に対して極めて壊れやすい性質を持っている.

### 8.1.3 構造安定性と大域的な分岐

#### 構造安定性

アンドロノフ (Andronov) とポントリャーギン (Pontriagin) は, サドル・コネクションやセパトトリクス・ループがパラメータの変動やベクトル場の摂動に対して壊れやすい性質を持っていることに着目し, 逆にベクトル場を適当に摂動しても相平面図の位相的性質が変化しない力学系を定式化した. ベクトル場の摂動を数学的に説明するのは難しいが, 概略を説明しよう. いま式 (8.1) の摂動系として

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) + \xi(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) + \eta(x, y) \end{aligned} \quad (8.9)$$

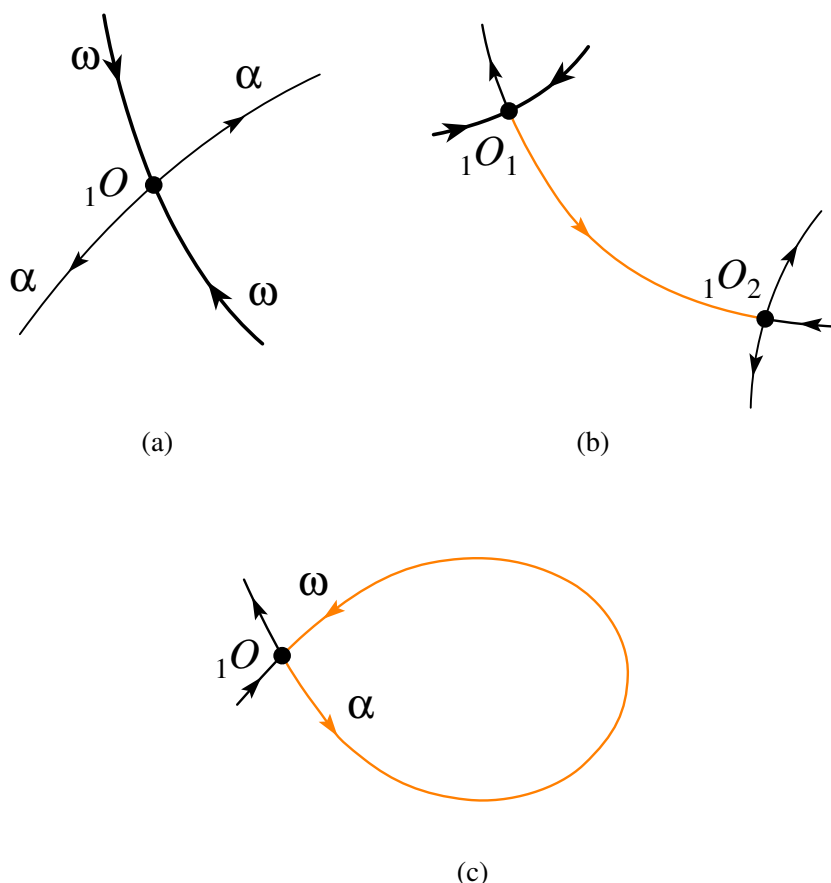


図 8.5 サドル・コネクション (b) とセパトトリクス・ループ (c).

を考える。ここでパラメータ  $\lambda$  は問題としないので固定して考えるものとし、式 (8.9) では書かないでおいた。そこで式 (8.1) と式 (8.9) の  $M$  内での相平面図を比較し位相的に同じ構造であれば、式 (8.1) の相平面図はこの摂動に対して壊れなかった、すなわち安定であると考え。アンドロノフとポントリャーギンは、 $\xi, \eta$  とこれらの 1 階微分が十分に小さい摂動に対して安定な相平面図を持つ系を粗い系 (coarsed system) と定義した。この概念はレフシェッツ (Lefschetz) によって後に構造安定性 (structural stability) として数学的に厳密化され、その後の力学系の発展に大きく寄与した。式 (8.1) が、粗いあるいは構造安定な系となるためには、相平面図が次の 3 つの条件を満たす必要がある。

- (1) 平衡点は双曲型である。
- (2) リミット・サイクルも双曲型である。
- (3) サドル・コネクションやセパトトリクス・ループは存在しない。

また、この 3 つの条件で十分であることが、古くはドゥバギー (De Baggis) によって示された。

**【例 8.4】 勾配系の相平面図**

勾配系では、上に挙げた (2) の軌道やセパトトリクス・ループは存在しない。したがってサドル・コネクションがなく、平衡点が双曲的であると構造安定といえる。 ■

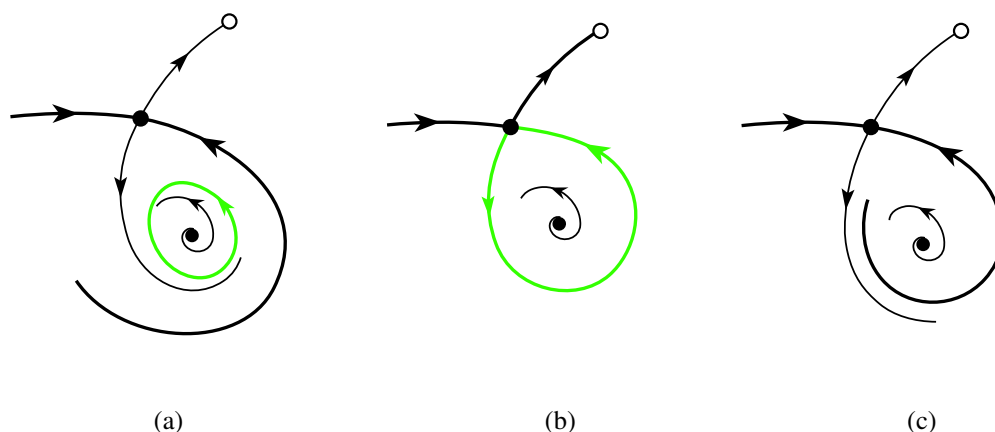


図 8.6 セパトトリクス・ループによるリミット・サイクルの消滅.

**【例 8.5】 図 8.1 の相平面図**

図 8.1 の相平面図は上の 3 つの条件を満たすので構造安定である. ■

**セパトトリクス・ループ**

上の結果は逆に考えると、構造安定性の崩れる系において大域的な相平面図の変化がみられることを示唆している。特に条件 (3) のセパトトリクス・ループの生じる前後の分岐は興味がある。これを取りあげよう。一般にセパトトリクス・ループが生じる場合、軌道漸近安定または不安定なりミット・サイクルがこのループに接近して癒着する。その後、リミット・サイクルは消滅する。図 8.6 参照。どちらのリミット・サイクルが癒着するかはサドルの性質から簡単に判定できる。

いま、式 (8.1) がサドル  ${}_1O(x_0)$  を持ち、この点のヤコビ行列を

$$Df(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0)}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad a_2 = \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0)}{\partial y} \end{bmatrix} \right| < 0 \quad (8.10)$$

とする。また、

$$a_1 = -\text{trace}(Df(x_0)) = -\left( \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} + \frac{\partial g(x_0)}{\partial y} \right) \quad (8.11)$$

とおこう。サドル  ${}_1O(x_0)$  が図 8.6 (b) のようにセパトトリクス・ループを持つとしよう。このセパトトリクス・ループは  $a_1 > 0$  のとき安定、 $a_1 < 0$  のとき不安定と呼ぶ。直感的にはループ内側近傍の解軌道がループに巻き付いてゆくかあるいは巻き出すかでループの安定性を定義し、サドル近傍の縮小・拡大の様子を決める量に関係した式 (8.11) からこの安定性が決まると考えるとよい。そこで軌道安定なりミット・サイクルが癒着すれば安定なループが、また不安定なりミット・サイクルが付くと不安定なループができる。 $a_1 = 0$  の場合は更に詳しく調べる必要がある。通常は安定なりミット・サイクルと不安定なりミット・サイクルが同時に癒着する。次にこれらの分岐の一例を示すことにしよう。

## 【例 8.6】余次元 2 の分岐とセパトリス・ループ

前章の例 7.8 で検討を保留した平衡点の余次元 2 の分岐点  $P$  の近傍の概略を調べてみよう。現象を見やすくするため次の方程式を考える。

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x + \epsilon \left[ (1 - \gamma y^2)y - cx^3 + B \cos \nu t \right]\end{aligned}\tag{8.12}$$

この方程式は式 (7.85) と比較すると、非線形復元項が付け加わっている。このためダフィング・レーリィー方程式と呼ばれている。回路モデルについては、練習問題 1.4(b) 参照。さて、基本調波同期化現象をみるため式 (7.86) を仮定し平均化方程式を求めると次式を得る。

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{\epsilon}{2} \left[ \left(1 - \frac{3}{4}\gamma r^2\right)u - \left(\sigma - \frac{3}{4}cr^2\right)v \right] \\ \dot{v} &= \frac{\epsilon}{2} \left[ \left(\sigma - \frac{3}{4}cr^2\right)u + \left(1 - \frac{3}{4}\gamma r^2\right)v + B \right]\end{aligned}\tag{8.13}$$

ここに

$$r^2 = u^2 + v^2, \quad \sigma = \frac{2(\nu - 1)}{\epsilon}\tag{8.14}$$

とおいた。式 (8.13) の平衡点は次式を満足する。

$$\left[ \left(1 - \frac{3}{4}\gamma r^2\right)^2 + \left(\sigma - \frac{3}{4}cr^2\right)^2 \right] r^2 = B^2\tag{8.15}$$

また、平衡点の特性方程式は次式で与えられる。

$$\chi(\mu) = \mu^2 + a_1\mu + a_2 = 0\tag{8.16}$$

ここに

$$a_1 = 3\gamma r^2 - 2, \quad a_2 = \sigma^2 + 1 - 3(\gamma + c\sigma)r^2 + \frac{27}{16}(\gamma^2 + c^2)r^4$$

さて、例 7.8 と同様にして分岐曲線を追跡しよう。簡単のため

$$\gamma = c = \frac{4}{3}$$

の場合を考える。計算結果を図 8.7 に示す。これらを図 7.5, 7.6 と比較すると、平衡点の接線分岐の  $\nabla$  状曲線が右上がりとなっている。このため点  $P$  の近傍が見やすくなる。勿論、点  $P$  では

$$a_1 = a_2 = 0\tag{8.17}$$

となっていて、余次元 2 の分岐点である。すなわち線形化した平衡点の特性根は 2 つとも零となっている。点  $P$  近傍での式 (8.13) の位相的性質は次の方程式と等価であることが知られている。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \lambda_1 + \lambda_2 x + x^2 - xy\end{aligned}\tag{8.18}$$

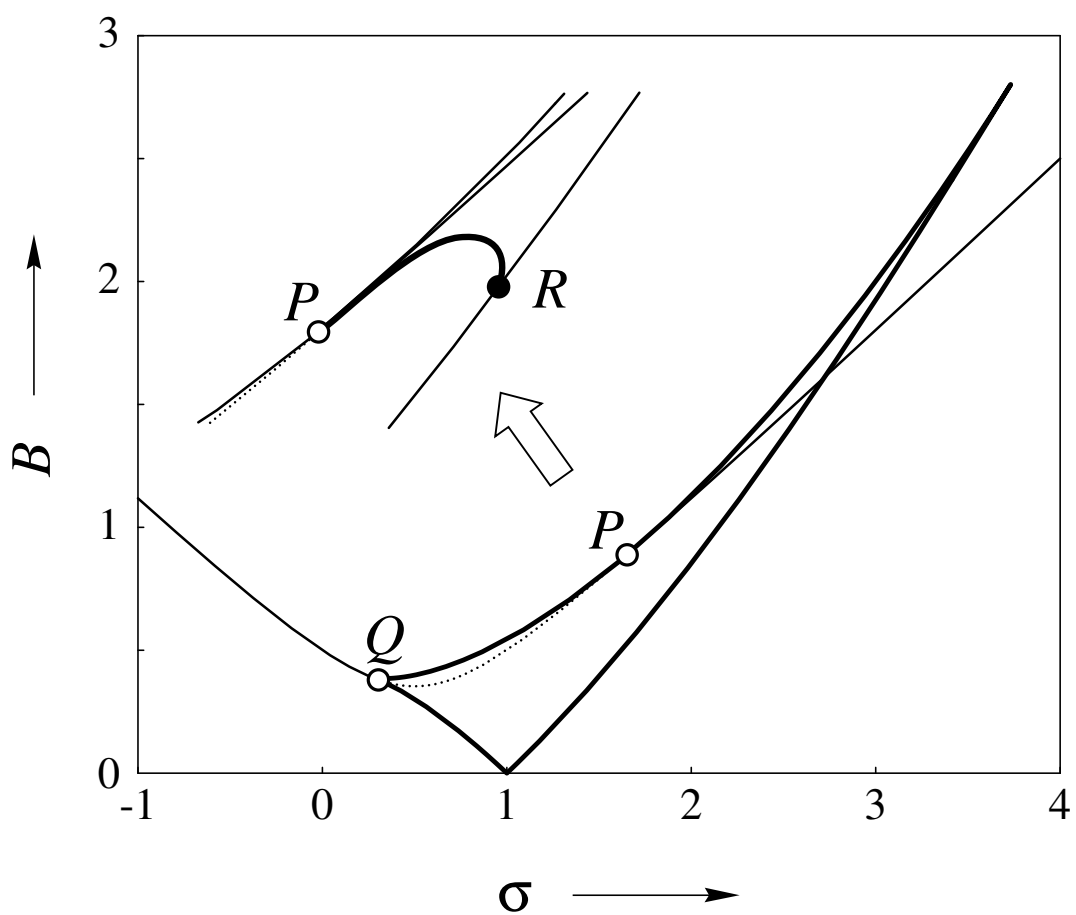


図 8.7 式 (8.13) の分岐図.

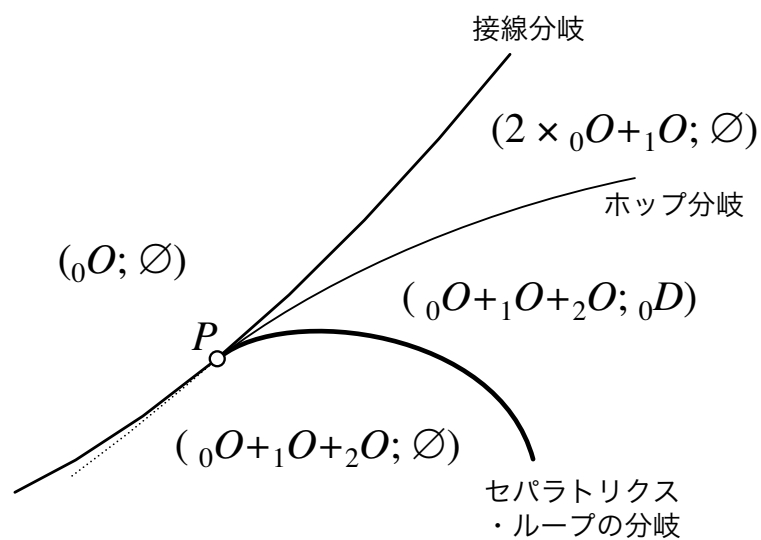


図 8.8 分岐点  $P$  近傍での平衡点とリミット・サイクルの個数とタイプ.

ここで、式 (8.13) の平衡点は式 (8.18) の原点に、またパラメータは点  $P$  が  $(\lambda_1, \lambda_2)$  の原点にそれぞれ対応している。式 (8.18) は、特性根が 2 つとも零となる平衡点の分岐の 1 つの最も簡単な式を与えており標準形と呼ばれている。またこの分岐はボグダーノフ (Bogdanov) とターケンス (Takens) によって独立に研究されたことから**ボグダーノフ・ターケンスの分岐**という。同期化現象と関連して現象はファン・デア・ポールのころから知られていた。

図 8.7 に示した曲線  $PR$  は、この上で丁度図 8.6 のようなセパトリス・ループが生じるパラメータの値を結んだものである。点  $P$  の近傍での分岐図の 4 つの領域を図 8.8 に拡大して示しておいた。また各領域に存在する平衡点とリミット・サイクルの個数とタイプを (平衡点; リミット・サイクル) として書き込んである。なお、図 8.7 の点  $Q$  においても余次元 2 の同様な分岐がみられる。この例では接線分岐のカस्प点が接近しているため現象を数値的にみることが難しい。これらの解析について興味があるときは文献 [P1, P6] を参照してほしい。

## 8.2 二重漸近運動

これまでは 2 次元自律系の相平面図の構造をみてきた。この節では周期的な 2 次元非自律系のポアンカレ写像 (ストロボ写像) による相平面図の様子を概観しよう。ポアンカレ写像は向きを保つ微分同相写像となる。この写像の固定点は元の方程式の周期解が対応している。写像の相平面図においてもサドルに出入りする不変曲線の的大域的性質が重要な役割を演じる。

写像の相平面図が自律系のそれと比較して大きく違っている点は、サドルに出入りする曲線の間で交差が許されることである。この点に注目して相平面図の生態学ともいえる大域的構造の分かっている部分をかいつまんで述べよう。

4.1.3 の繰り返しになるが、ここで簡単にこれから考える系とポアンカレ写像の定義を復習しておこう。平面上の周期的 (その周期を  $2\pi$  としておく) な非自律系

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, y, \lambda) \\ \dot{y} &= g(t, x, y, \lambda)\end{aligned}\tag{8.19}$$

を考える。ここに

$$\begin{aligned}f(t + 2\pi, x, y, \lambda) &= f(t, x, y, \lambda) \\ g(t + 2\pi, x, y, \lambda) &= g(t, x, y, \lambda)\end{aligned}\tag{8.20}$$

とする。式 (8.19) は 7.1 で定義した  $D$ -システムであるとしよう。時間  $2\pi$  毎の解軌道のサンプリングによって決まる写像:

$$T: R^2 \rightarrow R^2; x_0 = (x_0, y_0) \mapsto x_1 = (x_1, y_1) = (\phi(2\pi, x_0, y_0), \psi(2\pi, x_0, y_0))\tag{8.21}$$

をポアンカレ写像と呼んだ。ここに解を

$$x(t) = \varphi(t, x_0) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(t, x_0, y_0) \\ \psi(t, x_0, y_0) \end{bmatrix}, \quad x(0) = \varphi(0, x_0) = x_0\tag{8.22}$$

と表した。したがって写像  $T$  の固定点,  $\ell$ -周期点はそれぞれ, 式 (8.19) の周期  $2\pi$  および  $2\ell\pi$  の周期解に対する初期値を与えている。双曲型固定点や周期点は完全安定 ( ${}_0D$ ), 正不安定 ( ${}_1D$ ), 逆不安定 ( ${}_1I$ ), および完全不安定 ( ${}_2D$ ) の 4 種類であった。サドルの性質を持つ固定点は  ${}_1D$  と  ${}_1I$  の 2 種類である。逆不安定固定点は 2 回の合成写像  $T^2$  を考えると正不安定固定点として振る舞うことに注意しよう。以下では, 主として正不安定固定点を例に現象を説明する。同様のことが逆不安定固定点でも議論できる。

第 3 章 3.3 でみたように双曲型固定点には安定・不安定多様体がある。2 次元の場合, 正不安定および逆不安定固定点ではこれらはいずれも曲線となる。そこで自律系と同様に, 写像  $T$  に関する軌道や極限集合を定義しよう。ここでは  $D$ -システムを考えるので平面内の有界な閉集合  $M$  があって,  $M$  内の相平面図のみに注目する。初期値  $x_0$  についての軌道, 正の半軌道, 負の半軌道をそれぞれ次のように定義しよう。

$$\begin{aligned} \gamma(x_0) &= \{x \in R^2 \mid x(k) = T^k(x_0), k \in Z\} \\ \gamma^+(x_0) &= \{x \in R^2 \mid x(k) = T^k(x_0), k = 1, 2, \dots\} \\ \gamma^-(x_0) &= \{x \in R^2 \mid x(k) = T^{-k}(x_0), k = 1, 2, \dots\} \end{aligned} \tag{8.23}$$

$T$  が逆写像を持つことから, 負の半軌道も一意的に決められる。また, 軌道が  $M$  から飛び出す場合はそれ以降の軌道は考えないことにする。極限集合も次のように定義しておこう。

$$\begin{aligned} \omega(x_0) &= \omega(\gamma(x_0)) = \omega\text{limit}(x_0) = \bigcap_{k \in Z^+} \overline{\bigcup_{\ell \geq k} T^\ell(x_0)} \\ \alpha(x_0) &= \alpha(\gamma(x_0)) = \alpha\text{limit}(x_0) = \bigcap_{k \in Z^+} \overline{\bigcup_{\ell \geq k} T^{-\ell}(x_0)} \end{aligned} \tag{8.24}$$

また,  $M$  内の集合  $N$  で  $T(N) = N$  となる集合を  $T$  の**不変集合** (invariant set) という。固定点や周期点の集合はそれ自身で不変集合となっている。正不安定固定点に出入りする安定および不安定不変曲線を

$$\begin{aligned} \omega({}_1D) &= W^s({}_1D) = \left\{x \in R^2 \mid \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} T^k(x) = {}_1D\right\} \\ \alpha({}_1D) &= W^u({}_1D) = \left\{x \in R^2 \mid \lim_{k \rightarrow -\infty} x(k) = \lim_{k \rightarrow -\infty} T^{-k}(x) = {}_1D\right\} \end{aligned} \tag{8.25}$$

と書き, 以後  $\omega$  枝 ( $\omega$ -branch) および  $\alpha$  枝 ( $\alpha$ -branch) と呼ぶことにする。逆不安定固定点についても同じように  $\omega$  枝と  $\alpha$  枝を定義する。各  $\omega$  枝は, 他の固定点や周期点の  $\omega$  枝と交差することはない。もちろん自分自身の自己交差もない。これはもし交差すれば, 交点の軌道に一意性がなくなり, このことは元の微分方程式の解の一意性に矛盾するからである。 $\alpha$  枝についても同様に他の  $\alpha$  枝と交わることはない。他方,  $\omega$  枝と  $\alpha$  枝は交差してもなんら不都合は生じない。

相平面内の点  $x \in M \subset R^2$  の  $\alpha$  および  $\omega$  極限集合が正あるいは逆不安定固定点となり,  $x$  自身は固定点でない場合, すなわちサドル  $P, Q$  があって,

$$\alpha(x) = P, \quad \omega(x) = Q \tag{8.26}$$

となっているとき, 点  $x$  を**二重漸近点** (doubly asymptotic point) という。これは時間が未来へと進めば固定点  $Q$  に, 過去に進めば  $P$  に漸近する点と言う意味で二重に漸近することとなっているから

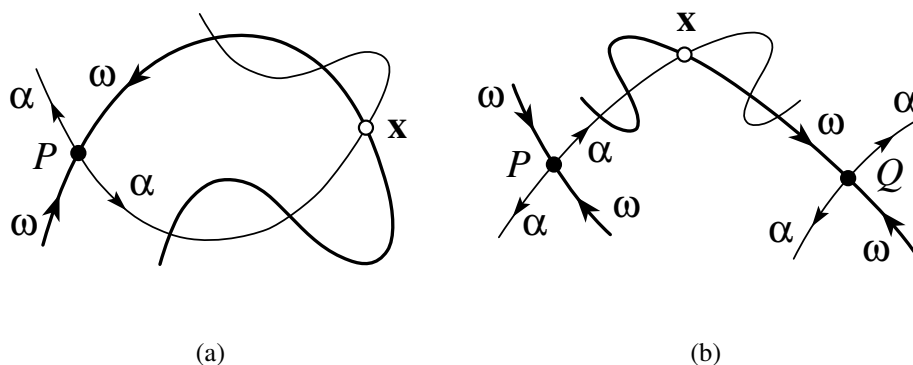


図 8.9 ホモクリニック点とヘテロクリニック点.

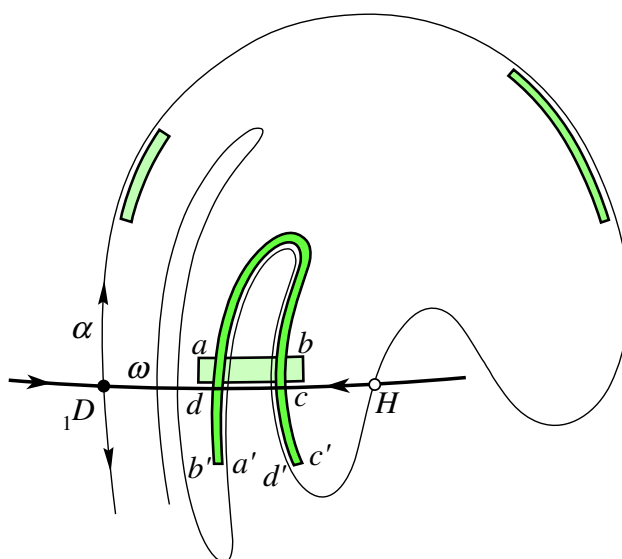


図 8.10 ホモクリニック点近傍に取った長方形領域の動き.

である. 図 8.9 参照. 二重漸近点のうち,  $P = Q$  となっている場合を**ホモクリニック点** (homoclinic point), そうでない  $P \neq Q$  の場合を**ヘテロクリニック点** (heteroclinic point) という. ホモクリニック点の近傍には極めて興味のある軌道が存在する.

### 8.2.1 ホモクリニック点近傍の性質

いま図 8.10 に示したように, 正不安定固定点  ${}_1D$  の  $\alpha$  枝と  $\omega$  枝が交差してホモクリニック点  $H$  を生じているとしよう. 点  $H$  で両枝が横断的に交差するとき,  $H$  を**横断的なホモクリニック点**という. 横断的なホモクリニック点は微分方程式 (8.19) で定義される時間に関して周期的なベクトル場の摂動に対して横断的な性質を保つことが期待できる. 点  $H$  は写像  $T$  および  $T^{-1}$  によって再び両枝の交点に写像され, 無限に多くのホモクリニック点をつくる. 図 8.10 では簡単のためその内の 1 点しか示していない. 軌道  $\gamma(H)$  以外にも  $\alpha$  枝と  $\omega$  枝の交点はすべてホモクリニック点である. さて, 点  $H$  は写



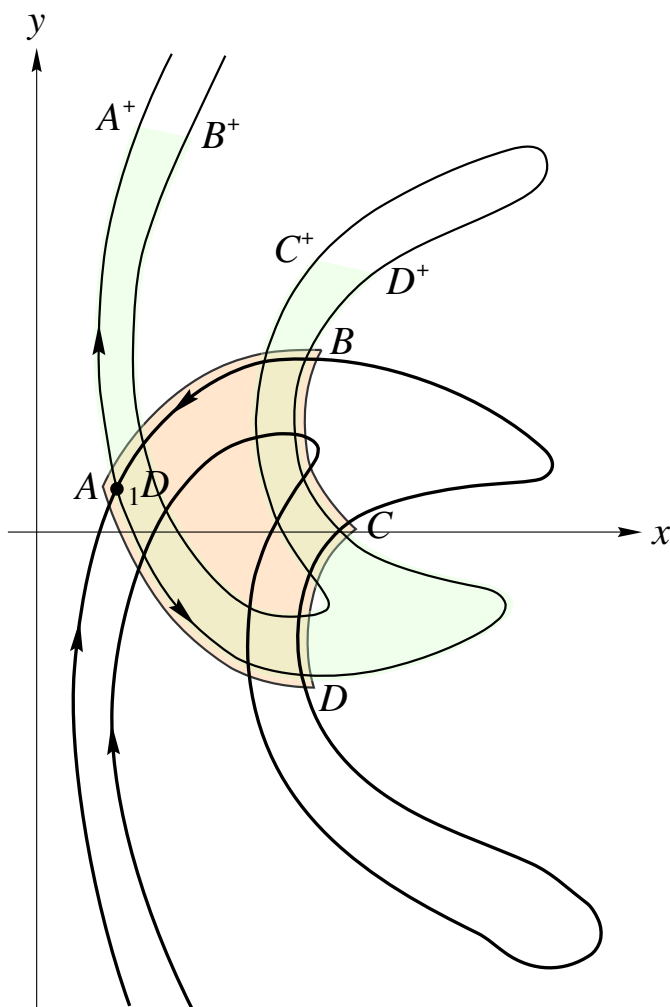


図 8.11 式 (8.28) の不変曲線, 曲四辺形  $ABCD$  とその像  $A^+B^+C^+D^+$  (馬蹄形に曲げられる).

像  $T$  および  $T^{-1}$  の繰り返しによって固定点  ${}_1D$  に近づく. そこで  $\omega$  枝に沿って薄い長形状の領域  $R(abcd)$  を取り, この領域が写像によってどのように写されるかをみてみよう. 長方形は  $\omega$  枝に沿って固定点に接近し横幅は縮み厚さは膨らんで厚くなりながら, 固定点近傍を通過する. その後  $\alpha$  枝に沿って横幅の縮みと厚みの膨らみを増しながら写されてゆく. その結果, 最初の長方形の取り方に依存した正の整数  $L$  があって,  $T$  の  $L$  回の繰り返しによって長方形  $R(abcd)$  の像が図に示した  $R'(a'b'c'd')$  になる. すなわち,

$$T^L(R(abcd)) = R'(a'b'c'd') \tag{8.27}$$

このことから, 横断的ホモクリニック点の近傍の点は, 写像  $T$  の適当な繰り返しによって再び自分の近傍に還ってくる可能性のあることがわかる. 領域の引き延ばされ方, および折れ曲がり方に注意してほしい. このような性質を持つ写像を**馬蹄形写像** (horse shoe map) という. 実際この交わりの領域  $R(abcd) \cap R'(a'b'c'd')$  には  $T^L$  の固定点や周期点, それらに漸近するホモクリニック点など複雑な軌道が存在する. 次にこの概略をみることにしよう. 話を簡単にするため 1 回の写像  $T$  によって上の

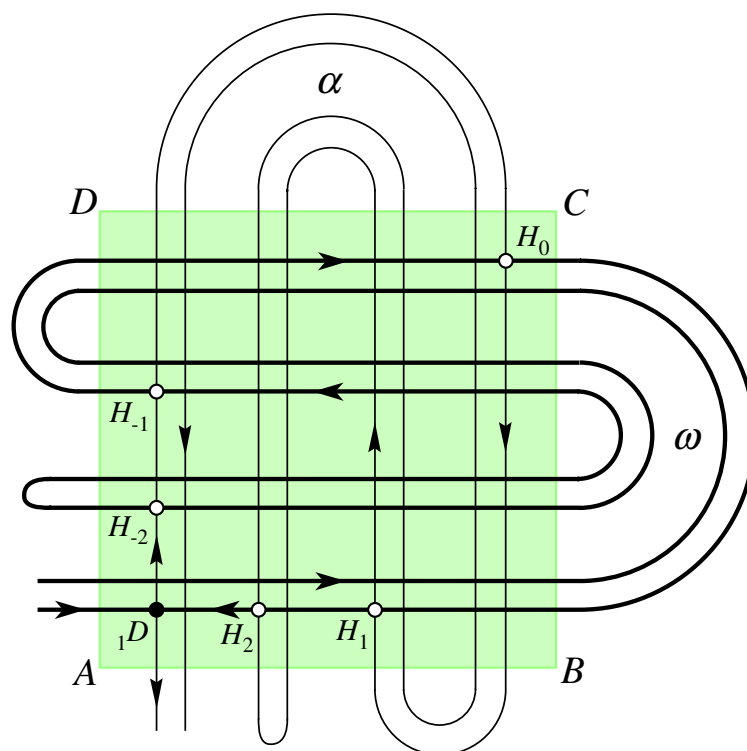


図 8.12 馬蹄形写像と固定点  ${}_1D$  の不変曲線.

$T^L$  と同様な性質を示す写像で考えることにする.

**【例 8.7】ダフィング方程式の馬蹄形写像**

ダフィング方程式

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -0.02y - x^3 + 0.3 \cos t - 0.08 \tag{8.28}$$

の写像  $T$  を数値的に解いて得た, 相平面図を図 8.11 に示す. 固定点の座標は  $(x, y) = (-1.0278, 0.08358)$  その特性乗数は  $(\mu_1, \mu_2) = (0.1862, 4.7362)$  となる. 点  ${}_1D$  の  $\alpha$  枝と  $\omega$  枝は, 図のように互いに交差している. いま, 図に示した曲四辺形  $ABCD$  を写像  $T$  で写すと  $A^+B^+C^+D^+$  となる. この例は数値的ではあるが  $T$  が馬蹄形写像となっていることを示している. ■

**8.2.2 馬蹄形写像**

馬蹄形写像はカオス (chaos) と呼ばれる複雑な運動を内包している. このことを技術的な証明をぬきにして, 順を追って考えてみよう. 図 8.12 は相平面図 8.11 の四辺形部分を見やすく描き直した図である. 正不安定固定点  ${}_1D$  に入出入りしている  $\alpha$  枝と  $\omega$  枝の交差の様子は位相的に同じである. 四辺形  $R(ABCD)$  内で  $\omega$  枝は, 水平方向に自分自身に漸近しながら何重にも走っている. 垂直方向には  $\alpha$  枝が同様な構造で位置している. 両曲線の交点であるホモクリニック点の集合はこの無限の編み目の交点の集合である. たとえば, 点  $H_0$  の軌道の一部が白丸で示されている:

$$H_{-2} = T^{-2}(H_0), H_{-1} = T^{-1}(H_0), H_0, H_1 = T(H_0), H_2 = T^2(H_0)$$

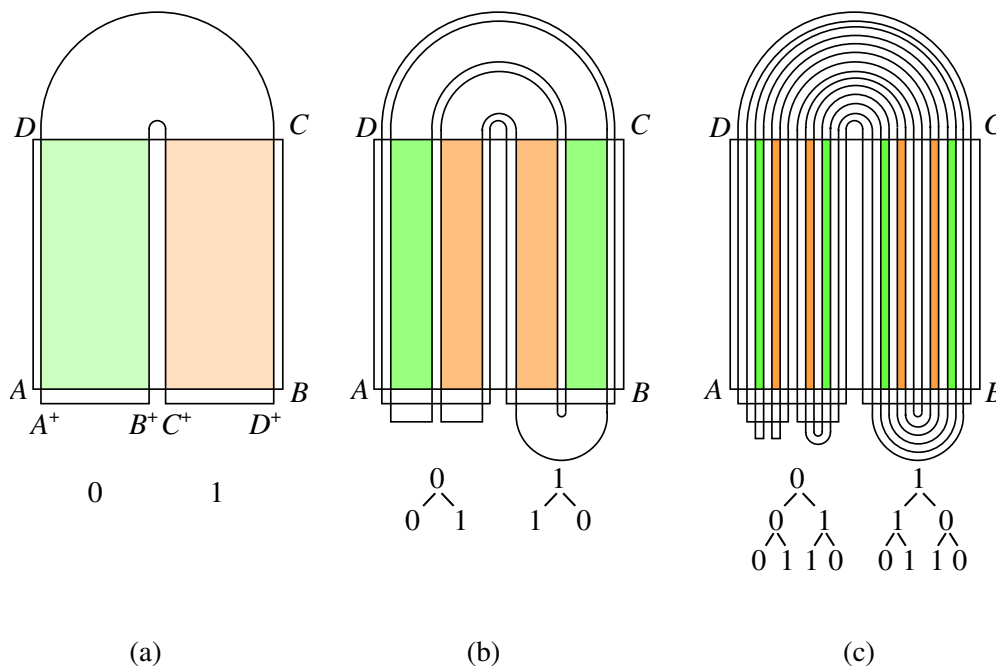


図 8.13 馬蹄形領域の写像  $T$  による像とそのコード.

### 不変集合の 2 進コード化

さて、このような構造を持った領域  $R(ABCD)$  内の  $T$  不変集合はどのような集合なのだろうか. 実際に写像  $T$  と  $T^{-1}$  を何度かこの集合に作用させてその様子をコード化してみよう. 図 8.13(a), (b), (c) はそれぞれ, 長方形  $R(ABCD)$  に  $T$  を 1 度, 2 度, 3 度作用させてできる像と  $R(ABCD)$  の交わりの領域 (ドットで塗りつぶした領域) を描いてある. 注目しておきたい事項は次の 2 点である.

- (1) 交わりの集合は垂直方向に平行して位置し, その個数は

$$\#\{R(ABCD) \cap T^k(R(ABCD))\} = 2^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.29)$$

となっている.

- (2) 交わりの集合の各連結成分には, 写像  $T$  と  $T^{-1}$  を作用させることに対応させて「0」と「1」からなるコードを付けることができる.

最初の交わりの集合

$$\{R(ABCD) \cap T(R(ABCD))\}$$

の 2 つの領域に, 図 8.13(a) に示したように, 左から「0」と「1」の名前を付けよう. このようにコード化して領域を区別すると, 2 回目の写像による 4 つの領域にもうまくコード化が可能となる. すなわち, 図 8.13(b) の 4 つの領域に左から次のような 2 ケタのコードを付ける.

- $\{R(ABCD) \cap T(R(ABCD))\}$  のコード「0」の領域が,  $T$  によってふたたび自分の引き延ばされた像と交わった領域: これをコード「00」と呼ぶ.

- $\{R(ABCD) \cap T(R(ABCD))\}$  のコード「0」の領域が、 $T(R(ABCD))$  でコード「1」の領域の  $T$  による像と交わった領域：これをコード「01」と呼ぶ。
- $\{R(ABCD) \cap T(R(ABCD))\}$  のコード「1」の領域が、 $T$  によってふたたび自分の引き延ばされた像と交わった領域：これをコード「11」と呼ぶ。
- $\{R(ABCD) \cap T(R(ABCD))\}$  のコード「1」の領域が、 $T(R(ABCD))$  で「0」の集合の  $T$  による像と交わった領域：これをコード「10」と呼ぶ。

図 8.13(b) の下に示した木状のコードはこの状況を表している。図 8.13(c) で再度試みてほしい。このようにして、集合

$$R^k = R(ABCD) \cap T^k(R(ABCD))$$

は  $2^k$  個の垂直に細長い集合であり、それらの各成分は  $k$  個 (ビット) の「0」と「1」の列として表わすことができることとなった。いま、この  $k$  ビットの 0 と 1 の列からなるコードの集合を

$$S^k = \left\{ \uparrow \overbrace{s_1 s_2 \cdots s_k}^k \mid s_i = 0 \text{ または } 1; i = 1, 2, \dots, k \right\} \quad (8.30)$$

で表すことにする。この集合の成分 (要素) を表すコードの最初の記号  $\uparrow$  はビットの始まりを示す記号のつもりである、ここではカーソル記号とも呼んでおく。カーソルから写像を繰り返す順序に右にむかってビットが増加してゆく。なお、 $k$  ビットの各コードが、元の集合のどの位置にある成分に対応するかは、図 8.13(c) に示したビットの木を辿ればよい。

さて、 $T$  の時間正の方向への不変集合は

$$R^\infty = R(ABCD) \bigcap_{k=1}^{\infty} T^k(R(ABCD)) \quad (8.31)$$

であり、これに対応して右に開いた無限ビット列からなる集合

$$S^\infty = \left\{ \uparrow \overbrace{s_1 s_2 \cdots}^{\infty} \mid s_i = 0 \text{ または } 1; i = 1, 2, \dots \right\} \quad (8.32)$$

を作ることができる。すなわち、不変集合  $R^\infty$  と右に延びた無限ビット列の集合  $S^\infty$  の間に 1 対 1 の対応関係を作ることができた。

次に、時間の負の方向に向かって不変集合を作ろう。図 8.14 がこの状況を示している。もはや作り方は明らかであろう。今度は水平方向にスライスされた集合ができる。集合

$$R_{-k} = R(ABCD) \cap T^{-k}(R(ABCD))$$

に、左へ順次延びる  $k$  ビットのコードからなる集合を対応させよう。

$$S_{-k} = \left\{ \overbrace{s_{-k} \cdots s_{-2} s_{-1}}^k \uparrow \mid s_i = 0 \text{ または } 1; i = 1, 2, \dots, k \right\} \quad (8.33)$$

これには、カーソルから左に向かって  $T^{-1}$  の繰り返しの履歴が記録されている。負の時間に対する不変集合は、したがって

$$R_{-\infty} = R(ABCD) \bigcap_{k=1}^{\infty} T^{-k}(R(ABCD)) \quad (8.34)$$

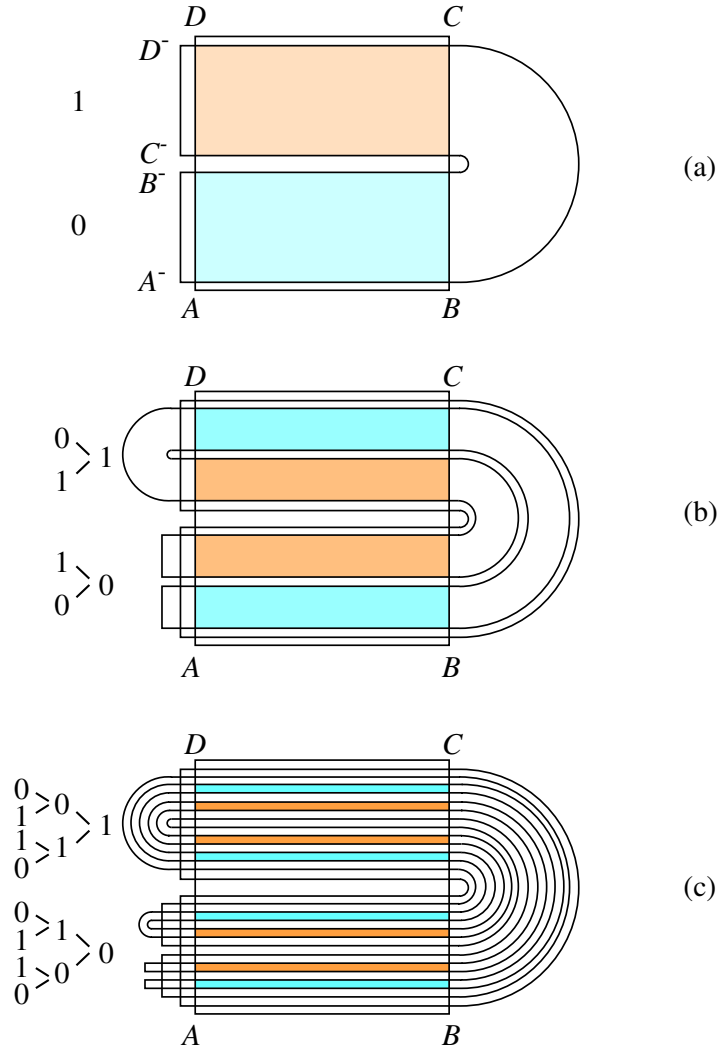


図 8.14 馬蹄形領域の写像  $T^{-1}$  による像とそのコード.

であり,

$$S_{-\infty} = \left\{ \overbrace{\cdots s_{-2}s_{-1}}^{\infty} \Downarrow \mid s_i = 0 \text{ または } 1; i = -1, -2, \dots \right\} \quad (8.35)$$

とコード化される.

以上のことから, 領域  $R(ABCD)$  内の  $T$  不変集合は

$$R_{-\infty}^{\infty} = R(ABCD) \bigcap_{k=1}^{\infty} T^k(R(ABCD)) \bigcap_{k=1}^{\infty} T^{-k}(R(ABCD)) \quad (8.36)$$

であり, この集合は左右に無限に延びる 2 進コード集合

$$S_{-\infty}^{\infty} = \left\{ \overbrace{\cdots s_{-2}s_{-1}}^{\infty} \Downarrow \overbrace{s_1s_2\cdots}^{\infty} \mid s_i = 0 \text{ または } 1; i = \pm 1, \pm 2, \dots \right\} \quad (8.37)$$

と 1 対 1 に対応することが分かった.

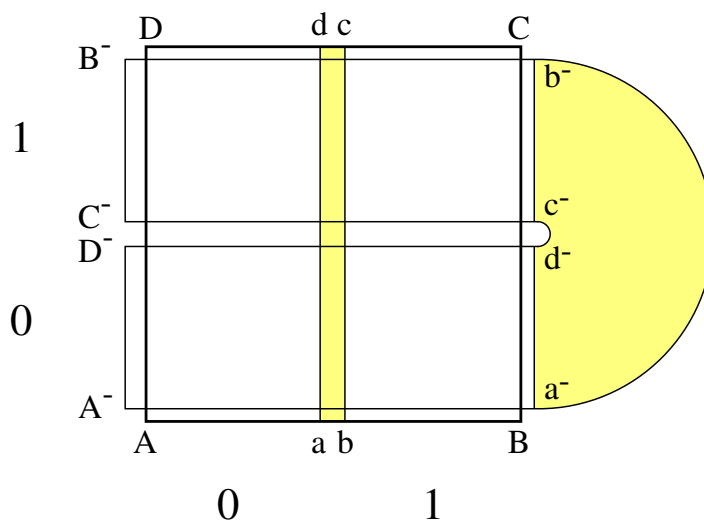


図 8.15 写像  $T$  による馬蹄形領域内の点の動き.

**コード上の力学系**

最後に見ておかなければならないことは、不変集合 (8.36) 上の  $T$  による点の運動が、コード集合 (8.37) 上にどのような運動を引き起こすかという対応関係である。図 8.15 を参考にこれを考えよう。図には  $R(ABCD)$  と  $T^{-1}(R(ABCD))$  を描いてある。 $T^{-1}(R(ABCD))$  の下半分  $A^-a^-d^-D^-$  は写像  $T$  によって丁度  $AadD$  に写され、 $T^{-1}(R(ABCD))$  の上半分  $C^-c^-b^-B^-$  は  $CcbB$  に写されることがわかる。これは  $T^{-1}(R(ABCD))$  の、 $R(ABCD)$  からはみ出している部分  $a^-b^-c^-d^-$  をうまく選べば、 $abcd$  に不変集合が含まれないように実現できる。このことをコードの動きでみると次のように言える。

- (1) 領域  $A^-a^-d^-D^-$  に含まれる不変集合は、コード

$$\cdots s_{-2}0 \updownarrow s_1 \cdots$$

で表され、写像  $T$  を 1 度作用させることにより、コード

$$\cdots s_{-2} \updownarrow 0s_1 \cdots$$

となる。

- (2) 同様に、領域  $C^-c^-b^-B^-$  に含まれる不変集合は、コード

$$\cdots s_{-2}1 \updownarrow s_1 \cdots$$

で表され、写像  $T$  を 1 度作用させることにより、コード

$$\cdots s_{-2} \updownarrow 1s_1 \cdots$$

となる。

したがって、いずれの場合もコードの集合での運動は、カーソル  $\uparrow$  を左に 1 ビット移動させる作用の像として表される。あるいは、カーソルが止まっていると考えたとビット列が右に 1 ケタだけシフトすると言ってもよい。このカーソルを移動させる写像を**ずらし (shift) の写像  $\sigma$**  と呼ぶことにする。すなわち

$$\sigma: S_{-\infty}^{\infty} \rightarrow S_{-\infty}^{\infty}; \quad s = \cdots s_{-2}s_{-1} \uparrow s_1s_2 \cdots \mapsto \sigma(s) = \cdots s_{-2} \uparrow s_{-1}s_1s_2 \cdots \quad (8.38)$$

を定義する。すると元の力学系  $(T, R_{-\infty}^{\infty})$ 、すなわち  $R_{-\infty}^{\infty}$  上の  $T$  による運動は、コード集合の力学系  $(\sigma, S_{-\infty}^{\infty})$ 、すなわち  $S_{-\infty}^{\infty}$  上の  $\sigma$  による運動を用いて調べることができることになる。後者は**記号力学系 (symbolic dynamics)** と呼ばれる力学系の簡単な例となっていて、多くの結果が知られている。次の小節でそのうちの幾つかの性質を紹介する。その前にカントル集合 (Cantor set) とそのフラクタル的性質を概観しておこう。

### カントル集合とそのフラクタル構造

図 8.13 や 8.14 で構成した集合は、位相的にみるといずれもカントル集合と区間の積集合と同じ構造を持っている。したがって式 (8.36) の積集合はカントル集合の直積と位相的に同じであると言える。

**カントル集合 (Cantor set)  $C$**  とは閉区間  $I = [0, 1]$  から次の操作で作られる集合である。まず、真ん中の 3 分の 1 の开区間  $(1/3, 2/3)$  を取り除く。残った 2 つの区間  $\{[0, 1/3], [2/3, 1]\}$  に同様な操作を施し、4 つの閉区間  $\{[0, 1/9], [2/9, 1/3], [2/3, 7/9], [8/9, 1]\}$  を残す。これを無限回繰り返して、残った集合がカントル集合  $C$  である。

この作り方から、式 (8.31) や式 (8.34) で作った集合は、カントル集合  $\times$  区間と同位相となっていることが容易に分かる。

さて、カントル集合はおもしろい性質を持っている。開集合の和集合を取り除いたので、 $C$  は閉集合であり、 $C$  のすべての点はその集積点となっている。すなわち**自己稠密 (dense in itself)** な集合である。閉集合であり自己稠密な集合は**完全集合**とも呼ばれている。ところが区間  $[0, 1]$  の点集合としてみると、至るところ稠密でない。 $C$  には区間は含まれず、いわば境界集合ばかりを寄せ集めた隙間だらけの集合と言える。

先に考えた無限ビット列からなる集合 (8.32), (8.35) や (8.37) は、カントル集合やその積集合と位相的に同じコードの集合を構成したのであった。ただ、ポアンカレ写像  $T$  で写される像の位置の関係から、構成したコードはカーソル以下の数字を 2 進数と読んだ場合、順序が大小関係とは一致しない対応づけとなっている。

3 進数

$$t = \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \cdots + \frac{t_i}{3^i} + \cdots, \quad \text{ただし } t \text{ は } 0 \text{ または } 2 \text{ とする} \quad (8.39)$$

を用いてコードの集合：

$$S = \{\uparrow t_1t_2 \cdots \mid t_i = 0 \text{ または } 2; i = 1, 2, \dots\} \quad (8.40)$$

を構成し、カントル集合  $C$  と対応づけると分かりやすい。このコード集合を用いると積集合  $C \times C$  と  $C$  が位相的に等価であることや  $C$  から区間  $[0, 1]$  への連続関数を簡単につくることができる。これは、

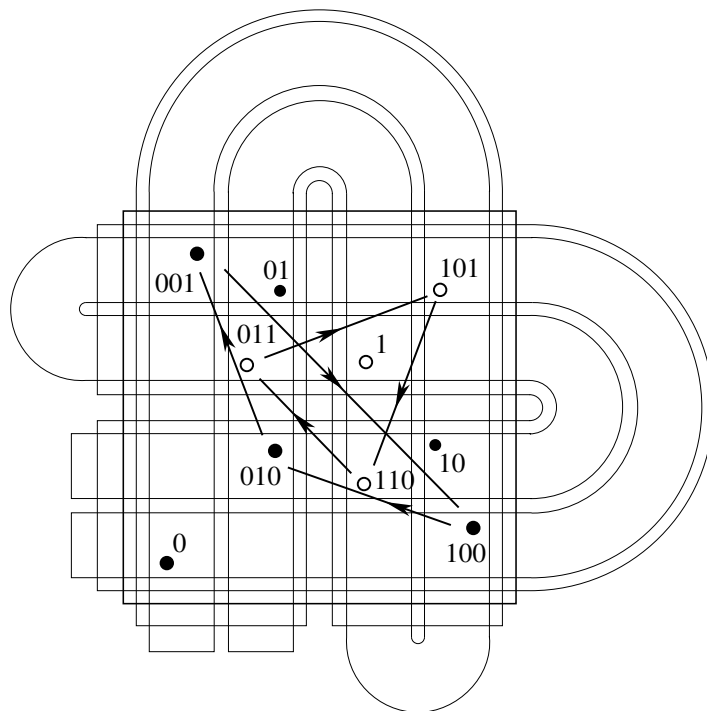


図 8.16 固定点, 2, 3 周期点とそれらのコード.

写像

$$f : S \times S \rightarrow S; (\uparrow s_1 s_2 \dots, \uparrow t_1 t_2 \dots) \mapsto \uparrow s_1 t_1 s_2 t_2 \quad (8.41)$$

$$g : S \rightarrow [0, 1]; t = \uparrow t_1 t_2 \dots \mapsto g(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \dots \right) \quad (2 \text{ 進数}) \quad (8.42)$$

から分かるであろう.

最後に, カントル集合  $C$  は空でない閉部分集合と 1:1 に対応づけできる. これはコード集合で考えれば, 最初の  $n$  ビットを省略したコード集合が最初のコード集合と同じ構造を持っていることから理解できる. 各部分が全体と同じ構造を持つ図形や集合は**入れ子** (nest) になった, あるいは**自己相似** (self similar) な図形や集合と呼ばれている. 入れ子構造の図形は**フラクタル** (fractal) 図形とも呼ばれている. カントル集合はフラクタル集合の例である.

### 8.2.3 記号力学系 $(\sigma, S_{-\infty}^{\infty})$ とカオスの運動

以下, 直感的に分かりやすくするため, すこし記述が曖昧になるかも知れないが, 2 進コードからなる  $S_{-\infty}^{\infty}$  の運動と,  $R_{-\infty}^{\infty}$  の運動を適宜対応させ, 混同して使用する. これによって, 元の力学系における固定点, 周期点, ホモクリニック点などは, そっくり  $S_{-\infty}^{\infty}$  上の  $\sigma$  の固定点, 周期点, ホモクリニック点などに対応するからである.  $\sigma$  に対する, 固定点, 軌道, 極限集合, 不変集合などは, 以前に定義したやり方と同様であるから繰り返す必要はないであろう.  $S_{-\infty}^{\infty}$  には  $\sigma$  の固定点が 2 つある. それらは

$$\{\dots 000 \uparrow 000 \dots, \dots 111 \uparrow 111 \dots\} \subset S_{-\infty}^{\infty} \quad (8.43)$$



である。ここに、 $\dots$  はこの場合は同じ 0 または 1 が無限に並んでいることを示している。明らかに、カーソルに位置が移動しても固定点となっている。

$$\begin{aligned}\sigma(\dots 000 \updownarrow 000 \dots) &= \dots 00 \updownarrow 0000 \dots \\ \sigma(\dots 111 \updownarrow 111 \dots) &= \dots 11 \updownarrow 1111 \dots\end{aligned}\tag{8.44}$$

これらの点は、図 8.16 の点 0 と点 1 で示した  $T$  の固定点に対応する。更に固定点 0 は、図 8.12 の正不安定固定点  ${}_1D$  であることも分かる。また、点 1 の固定点は  $\dots 111 \updownarrow 111 \dots$  が対応する逆不安定固定点  ${}_1I$  である。2-周期点は、2 個あり、

$$\{\dots 0101 \updownarrow 0101 \dots, \dots 1010 \updownarrow 1010 \dots\} \subset S_{-\infty}^{\infty}\tag{8.45}$$

である。つまり、2 ビット列「01」の繰り返しからなるコードであるが、カーソルの位置がどこにあるかで区別されている。

$$\begin{aligned}\sigma(\dots 0101 \updownarrow 0101 \dots) &= \dots 1010 \updownarrow 1010 \dots \\ \sigma(\dots 1010 \updownarrow 1010 \dots) &= \dots 0101 \updownarrow 0101 \dots\end{aligned}\tag{8.46}$$

となって、確かに 2 周期点となることが分かる。一般に、最小周期が  $k$  の  $k$  周期点は  $k$  ビット列の無限繰り返しコードで表され、その  $k$  ビット列の中に  $k$  より小さい周期がないコードといえる。

固定点 (8.44) に対するホモクリニック点やヘテロクリニック点は

$$\begin{aligned}\dots 0000 \updownarrow 1000 \dots, &= \dots 0001 \updownarrow 1000 \dots \\ \dots 0000 \updownarrow 1111 \dots, &= \dots 1111 \updownarrow 0000 \dots\end{aligned}\tag{8.47}$$

など、両側が最終的に固定点と同じ数字になっているコードである。この場合、カーソルの移動によって最終的に固定点コードとなってしまう。 $\sigma$  の逆写像はカーソルを右に移動させる操作であることに注意しよう。

いま、2 つのコード列：

$$\begin{aligned}s &= \dots s_{-n} \dots s_{-1} \updownarrow s_1 \dots s_n \dots \\ t &= \dots t_{-n} \dots t_{-1} \updownarrow t_1 \dots t_n \dots\end{aligned}\tag{8.48}$$

に対して関数

$$d(s, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_k}{2^{|k|}}\tag{8.49}$$

を考える。ここに  $\delta_k$  は  $s_k = t_k$  ならば 1,  $s_k \neq t_k$  ならば 0 を表す。 $d(s, t)$  は  $S_{-\infty}^{\infty}$  の距離となっている。そこでこの距離で 2 つのコード列の近さを考えることができる。さて、 $S_{-\infty}^{\infty}$  上の写像  $\sigma$  は次のような軌道を持っていることが知られている。

- (1) 可算無限個の周期点,
- (2) 非可算無限個の非周期点,
- (3) 稠密な軌道.

これは、カントル集合で説明したことから直感的にはほぼ理解できるであろう。また、両側に延びたコード列を式 (8.41) に習ってカーソルを基点にして折り返し、重なった数字を互いに間に挟み込んで、これを 2 進小数表現とみると区間  $[0, 1]$  の実数と対応がつくことから上述の 3 つの性質があることが分かる。

各軌道に作用する  $\sigma$  の効果は次の性質を持っている。2 つのコード列 (8.48) が式 (8.49) の意味で近い列であったとしよう。すなわち、カーソルの前後の数字が  $k$  個一致していたとする。このとき 2 つの列は  $k$  回の繰り返し写像の後には近さをまったく失ってしまうかも知れない。 $k$  ビット以外の数字がどうなっているかは最初の近さには無関係だからである。この性質は元の写像  $T$  でみると、十分大きな正整数  $k$  に対して 2 つのコード列に対応する初期値は十分近くにあり、この近さは  $T$  を  $k$  回繰り返した後ではまったく失われてしまうことを意味している。これを**初期値に敏感な性質** (sensitive dependence on initial conditions) という。

以上のように、不変集合が (1), (2), (3) から構成されていて、その上の運動が初期値に敏感な性質をもっているとき、系は**カオス状態** (chaotic state) を持つ、あるいは単に**カオス**を持つという。この意味では、対象とする系が横断的なホモクリニック点を持てばカオスが存在することとなる。カオスは自己相似なフラクタル集合である。

馬蹄形写像の不変集合がカオスとなることを安定性の側面からみると、この不変集合は不安定であるといえる。これまで述べた例では、不変集合はすべての点で横方向に縮み、縦方向に伸びるサドル的性質を持っているからである。ところで、実際に数値実験などで観察されるカオスは、不変集合が安定に**アトラクタ** (attractor) として観察される場合がある。ここでアトラクタとはその近傍の初期値からでる軌道をすべて漸近させる不変集合のことをいう。すなわち、近傍の  $\omega$  極限集合が不変集合そのものとなる集合のことをいう。

カオスがどのようなメカニズムでアトラクタとして観察させるかという問題は、非線形系の大域的性質と関係していて、数学的にはまだ十分には明らかにされていない。そこで、次節において数値実験や実際の力学系の状態の観察から得られた幾つかの経験則を物語風に述べることにしよう。

### 【例 8.8】散逸系から保存系へ：ダフィング方程式の例

ダフィング方程式

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -ky - x^3 + 0.3 \cos t \quad (8.50)$$

において、減衰定数  $k$  の値を変化させて正不安定固定点の  $\alpha$  枝と  $\omega$  枝の大域的変化を数値実験で観察した相平面図の一部を図 8.17 に示す。減衰定数が小さくなって散逸的性質が弱くなるにつれて、横断的ホモクリニック点が現れカオスの出現をみる事が分かる。 $k = 0$  の保存系で外側の曲線は  $\alpha$  枝が  $\omega$  枝と一致してしまうように描かれているが、実際は固定点近傍でたがいに横断的に交差しあっているものと考えられる。数値実験ではこのような大域的性質は確認が困難である。■

## 8.3 カオス振動

先にも述べたように、カオス状態がアトラクタとして観察される場合と、そうでない場合の例を幾つかあげて、非線形系の大域的性質をみることにしよう。

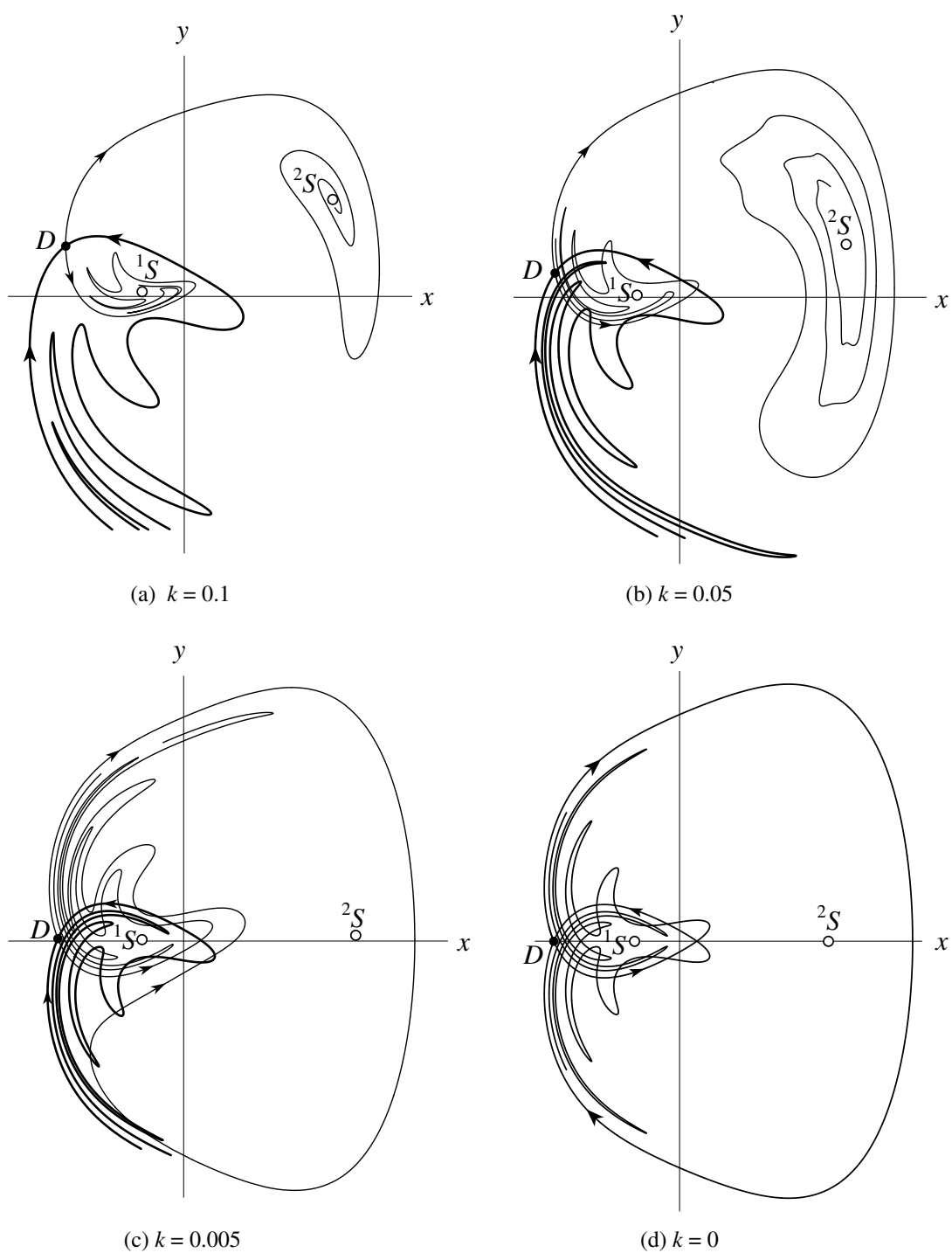


図 8.17 式 (8.50) のポアンカレ写像による相平面図. 固定点と不変曲線.

### 8.3.1 周期倍分岐の連鎖

周期倍分岐では、分岐前に存在した  $k$  周期点はその安定性を失って、分岐後周期が 2 倍の  $2k$  周期点の発生をみた。多くの非線形系においては、この分岐のあと更にパラメータを変化させると、分岐によって生まれた  $2k$  周期点が続いて周期倍分岐し、 $4k$  周期点の発生をみることがある。すなわち、分岐式

$${}_0D^{2^k} \Rightarrow {}_1I^{2^k} + 2 {}_0D^{2^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8.51)$$

の分岐が、パラメータの有限区間の変化の間に、 $k \rightarrow \infty$  まで進展してしまう場合がある。このように周期倍分岐が連鎖的に起こってその結果カオス的アトラクタの発生をみる過程は、カオス状態が観察される最もありふれた状況である。

実験では、分岐が  $k \rightarrow \infty$  まで進展しているかどうかを確かめるのは容易でない。実際問題としては、その場に適した「十分に長い時間」の観察で周期性が観測できないと一応カオスと判定し、すぐあとで述べるリヤプーノフ指数などを計算してカオスであることを確かめることとなる。

周期倍分岐の連鎖が起こる場合、各分岐においてパラメータの区間幅の比を求めると、大抵の非線形系では一定の定数に近づく。この系に依存しない事実は**普遍則** (universality) と呼ばれ、比の値  $\gamma$  はファイゲンバウムによって発見されたのでファイゲンバウム定数という。

$$\gamma = 4.669201608 \dots \quad (8.52)$$

となることが分かっている。 $\gamma$  は普遍定数と考えられている。

#### 【例 8.9】周期倍分岐の連鎖が起こる例

ダフィング方程式

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -0.1y - x^3 + 0.3 \cos t + B_0 \quad (8.53)$$

を考えよう。非共振状態に対応する周期解は定数項  $B_0$  を付加することで容易に周期倍分岐する。これを見てみよう。

#### (1) 分岐図

式 (8.53) の解を用いて定義されたポアンカレ写像 (8.21) の固定点、周期点を用いて説明しよう。分岐曲線は前章 7.2.2 で述べた手順で計算する。図 8.18 はその計算結果である。まず、図 8.18(a) は固定点の分岐曲線を描いてある。曲線  $T_1, T_2$  は接線分岐曲線を表している。点  $C_1, C_2$  はカusp点である。この接線分岐曲線で囲まれた領域には 3 個、その外側には 1 個の固定点が存在する。曲線  $P_1, P_2$  は周期倍分岐曲線である。これらの曲線で囲まれた着色領域では、固定点は逆不安定固定点  ${}_1I$  となる。図 8.19(b) は曲線  $P_1$  に関連した部分を拡大し、周期倍分岐列 (8.51) の分岐曲線を描いた図である。曲線  $P_1^2, P_1^4, P_1^8$  は、それぞれ 2, 4, 8 周期点の周期倍分岐曲線を表している。曲線  $P_1^8$  のすぐ内側で分岐列は無限に進展しカオスが現れる。その領域に網目を付けておいた。なお、2 周期点の接線分岐曲線  $T_1^2, T_2^2, T_3^2$  も合わせて描いておいた。これらの曲線は  $P_1$  を縁とした 2 周期点多様体が折れ曲がり重なっていることを示している。2 周期点の周期倍分岐は、曲線  $P_2^2$  上でも起こっている。

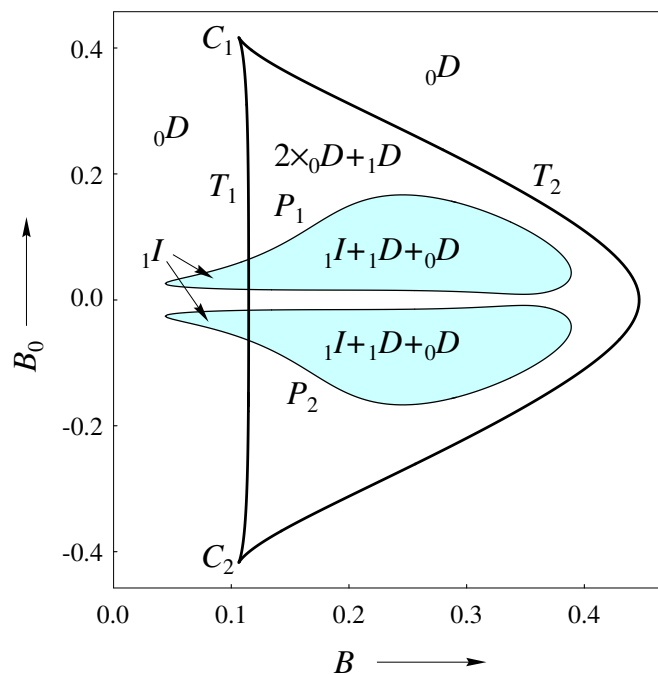


図 8.18 式 (8.53) の基本調波周期解に関する固定点の分岐図,  $k = 0.1$  の場合.

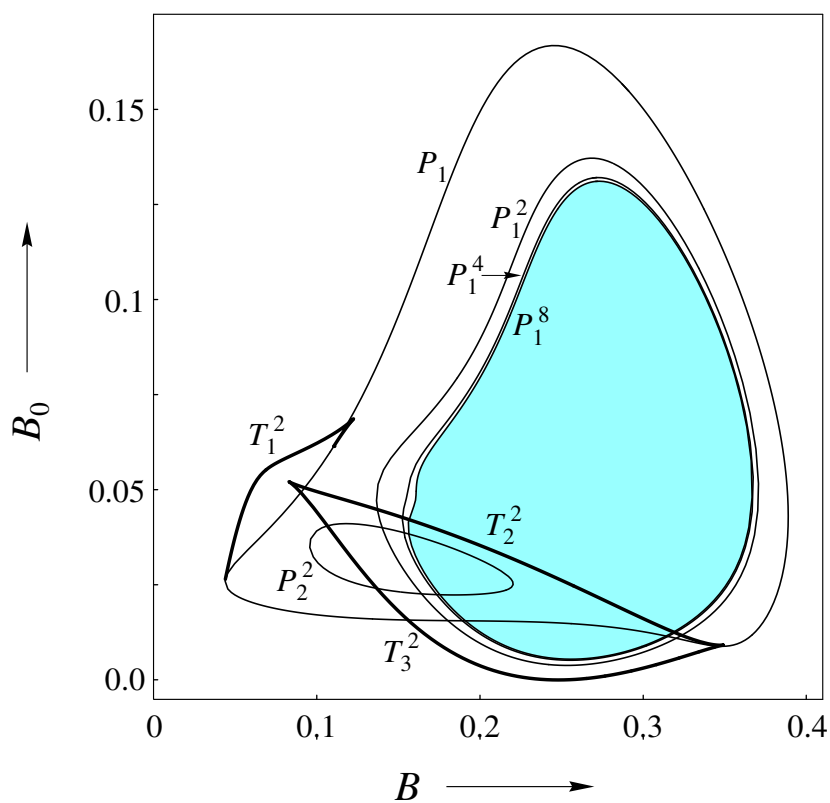


図 8.19 式 (8.53) の分岐図,  $k = 0.1$  の場合. 着色領域で分岐列は無限に進展しカオスが現れる.

(2) ポアンカレ写像の相平面図

$B_0 = -0.075$  と固定し,  $B$  を変化させて求めた相平面図を図 8.19 に示した. ここで分岐図 8.18 は  $B$  軸対称なので, 相平面図の構造が分かりやすい  $B_0 < 0$  の領域でデータを取ることにした. 図 (a) - (f) から周期倍分岐が進んで 4 周期的カオス, 2 周期的カオスを経て 1 つの大きなカオスとなってゆく様子を見ることができる. 図 (f) は, カオスアトラクタが正不安定固定点  $D$  の安定多様体  $\omega$  枝に接近し, ヘテロクリニック点が生じる直前の相平面図である. 図 (g) はカオス内にある逆不安定固定点  $I$  の  $\alpha$  枝とサドル  $D$  の  $\omega$  枝が交差し, ヘテロクリニック点が生じカオス集合がアトラクタとして観察できなくなった状況を示している.

このようにパラメータを連続的に変化させたとき, 突然カオスがアトラクタとして観察できなくなることがある. これを**カオスの死**, 爆発あるいはクライシスと言うことがある. カオス集合が無くなった訳ではなく, アトラクタの性質が失われ本来持つサドル的不安定性が回復したと考えるとよいであろう. ■

8.3.2 カオス的アトラクタとリヤプーノフ指数

さて, 実際に非周期的状態に遭遇した場合, それがカオスかどうかを判定するにはどうしたらよいのであろうか. 以下この判定によく利用されるリヤプーノフ指数について述べる. リヤプーノフ指数はカオス軌道の接空間での平均的な伸び縮みを表す量である. これは軌道に沿った変分の特異値から求められる.

簡単のためポアンカレ写像:

$$T : R^n \rightarrow R^n; \quad x_0 \mapsto x_1 = T(x_0) \tag{8.54}$$

で定義される離散力学系の場合を考える. 元の方程式は式 (8.19) のような周期  $L$  の周期的非自律系としよう. 自律系の場合は, たとえば軌道を一定時間間隔で離散化すれば同様の議論が可能となる.

いま, 任意の初期状態  $x_0 \in R^n$  を出る正の半軌道を次式としよう.

$$\gamma^+(x_0) = \{x \in R^n \mid x(k) = T^k(x_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots\} \tag{8.55}$$

時刻  $k$  における状態  $x(k)$  の初期値  $x_0$  に関する微分は

$$\frac{\partial x(k)}{\partial x_0} = DT^k(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_0} T^k(x_0) = \prod_{\ell=1}^k DT(x(\ell)) \tag{8.56}$$

となる. ここで微分記号はこれまでのように  $D$  あるいは  $\partial/\partial x$  で表しておいた. いま, 式 (8.56) の特異値を考えると:

$$\{\mu_1(k), \mu_2(k), \dots, \mu_n(k)\} = \{\mu_i(k) \in C \mid \det(\mu_i(k)I_n - DT^k(x_0))\} \tag{8.57}$$

そこで,  $t \rightarrow \infty$  としたとき次の平均値や極限值があれば, これを軌道 (8.55) のリヤプーノフ数という.

$$m_i(k) = \sqrt[k]{|\mu_i(k)|}, \quad m_i = \lim_{k \rightarrow \infty} m_i(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\mu_i(k)|}, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{8.58}$$

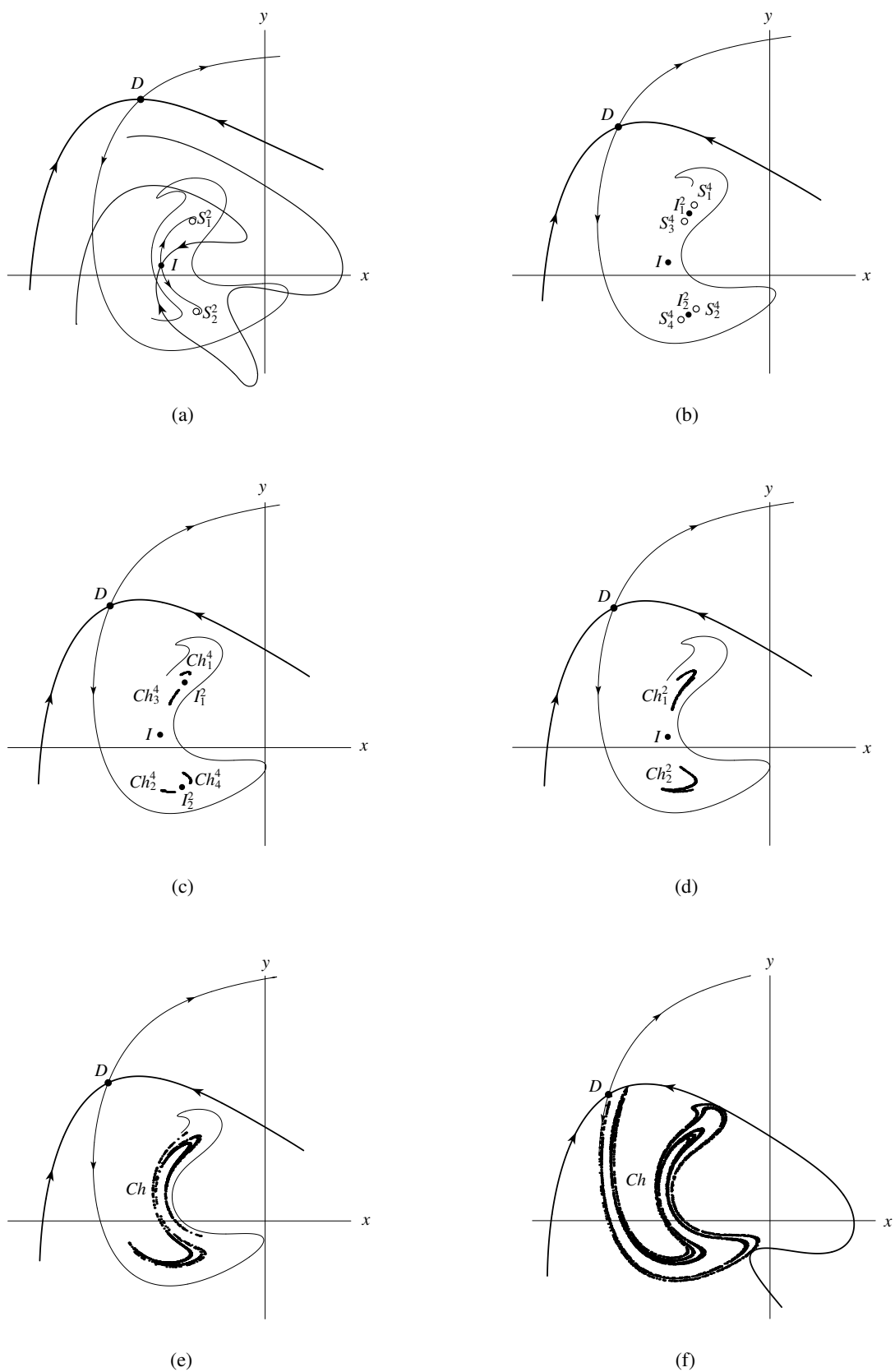


図 8.20 式 (8.53) の相平面図.  $B_0 = -0.075$  の場合. (a)  $B = 0.15$ , (b)  $B = 0.185$ , (c)  $B = 0.195$ , (d)  $B = 0.197$ , (e)  $B = 0.199$ , (f)  $B = 0.217$ .

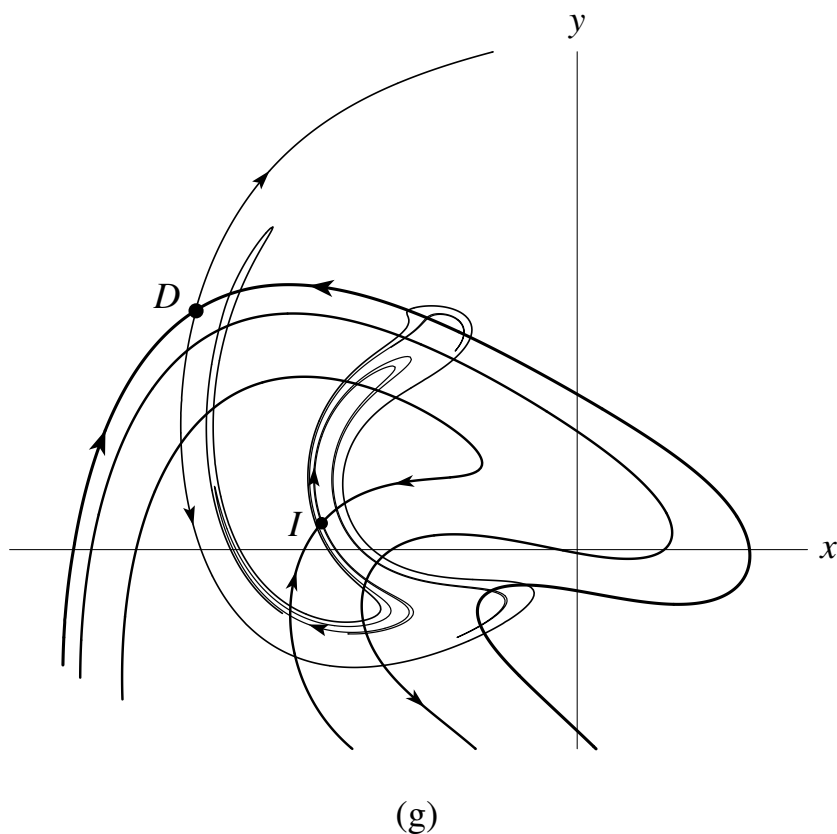


図 8.21 式 (8.53) の相平面図.  $B_0 = -0.075$  の場合. (g)  $B = 0.23$ .

また、軌道 (8.55) を元の周期  $L$  の周期的非自律系の連続な軌道に返して考えると次の平均指数が定義できる.

$$\nu_i(k) = \frac{1}{kL} \log |\mu_i(k)|, \quad \nu_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_i(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kL} \log |\mu_i(k)|, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.59)$$

これを**リアプーノフ指数** (Lyapounov exponent) という. これらの量は点  $x_0$  が  $T$  の双曲型固定点や周期点のとき, 特性乗数や特性指数に対応している. 軌道 (8.55) が不変閉曲線や周期倍分岐の結果得られた安定なカオスの場合にはリアプーノフ指数は, 接空間での解の平均的な伸び縮みを表すと考えられる. 表 8.1 参照.

いま, 式 (8.59) のリアプーノフ指数を大きい順に並べて番号を付けたとしよう:

$$\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_n \quad (8.60)$$

そこでまず, 最大リアプーノフ指数  $\nu_1$  の計算をしてみよう. 長さ 1 の勝手なベクトル  $e(0) \in R^n$  を 1 つ選んで, このベクトルに線形写像  $DT(x(\ell))$ ,  $\ell = 1, 2, \dots$  を作用させるとどのように伸びるかをみて



表 8.1 ポアンカレ写像の不変集合とリアプーノフ指数.

ポアンカレ写像 $T$ の不変集合	リアプーノフ指数	周期 $L$ の周期的非自律系
タイプ ${}_kD, {}_kI$ の固定点 または周期解	$k$ 個の正の指数 $\nu_i > 0, i = 1, \dots, k$ $\nu_i < 0, i = k + 1, \dots, n$	$k$ 次元不安定周期解
安定な不変閉曲線 (ICC)	$\nu_1 = 0,$ $\nu_i < 0, i = 2, \dots, n$	安定な準周期 (2 重周期) 解
安定なカオス	$\nu_1 > 0,$ $\nu_i < 0, i = 2, \dots, n$	1 次元的に伸び, $n - 1$ 次元的に縮む性質のカオス

みよう.

$$\begin{aligned}
 f(0) &= e(0), \quad \|e(0)\| = 1 \\
 f(1) &= DT(x_0)e(0), \quad \|e(1)\| = \frac{\|e(0)\|}{\|f(1)\|} f(1) \\
 &\dots \\
 f(k) &= DT(T^{k-1}x_0)e(k-1), \quad \|e(k)\| = \frac{\|e(0)\|}{\|f(k)\|} f(k)
 \end{aligned}
 \tag{8.61}$$

とおこう. このとき

$$\begin{aligned}
 e(1) &= \frac{\|e(0)\|}{\|f(1)\|} f(1) = \frac{\|e(0)\|}{\|f(1)\|} DT(x_0)e(0) \\
 f(2) &= DT(T(x_0))e(1) = \frac{\|e(0)\|}{\|f(1)\|} DT(T(x_0)) \circ DT(x_0)e(0) = \frac{\|e(0)\|}{\|f(1)\|} DT^2(x_0)e(0) \\
 e(2) &= \frac{\|e(0)\|}{\|f(2)\|} f(2) = \frac{\|e(0)\|^2}{\|f(1)\| \|f(2)\|} DT^2(x_0)e(0)
 \end{aligned}
 \tag{8.62}$$

となるから, 一般に次の関係を得る.

$$\begin{aligned}
 f(k) &= \frac{\|e(0)\|^{k-1}}{\prod_{i=1}^{k-1} \|f(i)\|} DT^k(x_0)e(0) \\
 e(k) &= \frac{\|e(0)\|}{\|f(k)\|} f(k) = \frac{\|e(0)\|^k}{\prod_{i=1}^k \|f(i)\|} DT^k(x_0)e(0)
 \end{aligned}
 \tag{8.63}$$

そこで

$$1 = \frac{\|e(k)\|}{\|f(k-1)\|} = \frac{\|e(0)\|}{\|f(k)\|} \frac{\|DT^k(x_0)e(0)\|}{\|DT^{k-1}(x_0)e(0)\|}$$

より

$$\frac{\|f(k)\|}{\|e(0)\|} = \frac{\|DT^k(x_0)e(0)\|}{\|DT^{k-1}(x_0)e(0)\|} \quad (8.64)$$

の関係を得る。これらの関係式より

$$\sum_{i=1}^k \log \frac{\|f(i)\|}{\|e(0)\|} = \sum_{i=1}^k \frac{\|DT^i(x_0)e(0)\|}{\|DT^{i-1}(x_0)e(0)\|} = \log \prod_{i=1}^k \frac{\|DT^i(x_0)e(0)\|}{\|DT^{i-1}(x_0)e(0)\|} = \log \frac{\|DT^k(x_0)e(0)\|}{\|e(0)\|}$$

となる。一方  $e_k$  は  $k$  が大きくなるにつれて次第に伸びが一番大きい方向に向くことから

$$\nu_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kL} \sum_{i=1}^k \log \frac{\|f(i)\|}{\|e(0)\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kL} \sum_{i=1}^k \log \frac{\|DT^k(x_0)e(0)\|}{\|e(0)\|} \quad (8.65)$$

を得る。以上のことから最大リアプノフ指数は、式 (8.61) でベクトルの長さを正規化しながら求め、式 (8.65) を用いて計算すればよいことが分かる。

次に、 $n$  個のリアプノフ指数を求めることを考えよう。このためには  $n$  個の一次独立なベクトルに線形写像  $DT(x(\ell))$ ,  $\ell = 1, 2, \dots$  を作用させ、適当に長さを正規化しながら  $n$  次元体積要素の変化を見ればよい。

そこで、まず長さが 1 の  $n$  個の独立な初期ベクトルを  $e_1(0), e_2(0), \dots, e_n(0)$  とし、これらの  $DT(x_0)$  による像を

$$f_1(1) = DT(x_0)e_1(0), \dots, f_n(1) = DT(x_0)e_n(0) \quad (8.66)$$

とする。  $f_\ell(1)$ ,  $\ell = 1, \dots, n$  が張る体積要素の体積を保ち、かつ各伸びの部分空間に次の繰り返しの初期値となるベクトル  $e_1(1), e_2(1), \dots, e_n(1)$  を取りたい。これにはグラム・シュミットの正規直交化の方法を用いるとよい。すなわちベクトル

$$\begin{aligned} g_1(1) &= f_1(1), \quad e_1(1) = \frac{g_1(1)}{\|g_1(1)\|} \\ g_2(1) &= f_2(1) - (f_2(1), e_1(1))e_1(1), \quad e_2(1) = \frac{g_2(1)}{\|g_2(1)\|} \\ &\dots \\ g_n(1) &= f_n(1) - \sum_{i=1}^{n-1} (f_n(1), e_i(1))e_i(1), \quad e_n(1) = \frac{g_n(1)}{\|g_n(1)\|} \end{aligned} \quad (8.67)$$

を構成する。そこで式 (8.66) と式 (8.67) によって

$$e_i(k), f_i(k), g_i(k); \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots$$

を作る。この作り方から

$$\begin{aligned} \left| \det[f_1(k) \ f_2(k) \ \dots \ f_n(k)] \right| &= \left| \det[g_1(k) \ g_2(k) \ \dots \ g_n(k)] \right| \\ &= \|g_1(k)\| \|g_2(k)\| \dots \|g_n(k)\| \end{aligned} \quad (8.68)$$

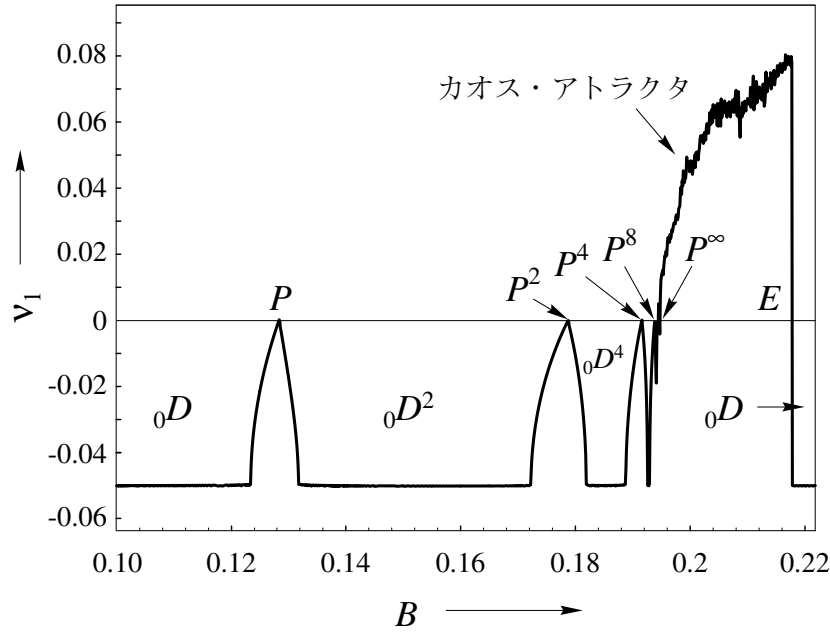


図 8.22 式 (8.53) の基本調波周期解に関する固定点の分岐図,  $k = 0.1$  の場合.

となっていることが容易にわかる. これはリアプノフ数 (8.59) の積となっている.

$$\begin{aligned}
 \left| \det[f_1(k) \ f_2(k) \ \cdots \ f_n(k)] \right| &= m_1(k) \cdot m_2(k) \cdot \cdots \cdot m_n(k) \\
 &= e^{\nu_1(k)kL} e^{\nu_2(k)kL} \cdots e^{\nu_n(k)kL} = e^{(\nu_1(k)+\nu_2(k)+\cdots+\nu_n(k))kL}
 \end{aligned}
 \tag{8.69}$$

したがって, 式 (8.68) と (8.69) の最後の項より

$$\nu_i(k) + \nu_2(k) + \cdots + \nu_n(k) = \frac{1}{kL} \sum_{i=1}^n \log \|g_i(k)\|
 \tag{8.70}$$

を得る. ところで  $k$  が十分大きくなると  $g_i(k)$  は平均的な伸びの部分空間を張っているので

$$\nu_i(k) = \frac{1}{kL} \log \|g_i(k)\|, \quad i = 1, 2, \dots, n
 \tag{8.71}$$

を得る. これは

$$\nu_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_i(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kL} \log \|g_i(k)\|, \quad i = 1, 2, \dots, n
 \tag{8.72}$$

の近似値となっている. 式 (8.71) は具体的にリアプノフ指数を計算する手順を与えている.

**【例 8.10】 最大リアプノフ数の計算例**

**例 8.9** でみた周期倍分岐からカオス状態に至るパラメータの変化に対するアトラクタの最大リアプノフ指数を計算しておこう. 図 8.20 は, 式 (8.53) において  $b_0 = -0.075$  と固定し,  $B$  を 0.1 から 0.22 付近まで変えたとき, 各  $B$  の値で得られた最大リアプノフ指数を描いたものである.

まず、 $B = P$  において安定固定点  ${}_0D$  が周期倍分岐により逆不安定固定点に変化し、 $P < B < P^2$  において安定 2 周期点  ${}_0D^2$  が存在する。 $B = P^2$  でこの安定な 2 周期点が周期倍分岐する。同様な周期倍分岐列が続き、 $B > P^\infty$  で最大リアプーノフ数が正となるアトラクタすなわちカオス状態が観察されることとなる。 $B = E$  ではカオス集合がサドルの  $\omega$  枝に接触し、アトラクタの性格を失う。その結果、系の状態は過渡状態を経て共振状態に対応する安定固定点に落ち着く。

なお、図中安定状態の区間において最大リアプーノフ指数が一定となっている区間がみられる。この区間では固定点、周期点の特性乗数が複素数となっている。この定数値は、リュービルの公式から

$$\mu_1\mu_2 = |\mu|^2 e^{-2\pi k} = (e^{2\pi\nu})^2$$

したがって

$$\nu_1 = \nu_2 = \frac{-2\pi k}{4\pi} = -\frac{k}{2} = -0.05$$

となっている。 ■

### 8.3.3 アトラクタの引力圏と大域的な分岐

前節の終わりで述べたように力学系の漸近安定な不変集合はアトラクタと呼ばれている。すなわち、平衡点や固定点の漸近安定性の定義の 2 番目の条件を満たす不変集合がアトラクタの一般的な定義である。

さて、ある力学系が複数個のアトラクタを持っている場合、状態空間を初期状態の集合と考えると各初期状態の  $\omega$  極限集合はいずれかのアトラクタまたはサドルとなっている。したがって大抵の場合サドルの安定多様体、すなわち  $\omega$  枝、は状態空間  $R^n$  をアトラクタに収束する初期値領域に分割する余次元 1 の境界超曲面を与える。1 つのアトラクタ  $A$  に収束する初期値の集合を、この**アトラクタの引力圏** (domain of attraction)  $DA(A)$  という。

$$DA(A) = \left\{ x \in R^n \mid \lim_{k \rightarrow \infty} T^k(x) = A \right\} \tag{8.73}$$

引力圏の形状は境界曲面であるサドルの  $\omega$  枝によって決まるので、これは系の大域的性質を反映したものとなる。2 次元自律系の場合は、比較的簡単な形状をしているが、ポアンカレ写像による相平面図などではホモクリニック点があるとフラクタル構造を持つ極めて複雑な形状となる。 $\omega$  枝の形状の位相的变化は相平面図の大域的な分岐現象と考えられるが、一般に解析は困難である。

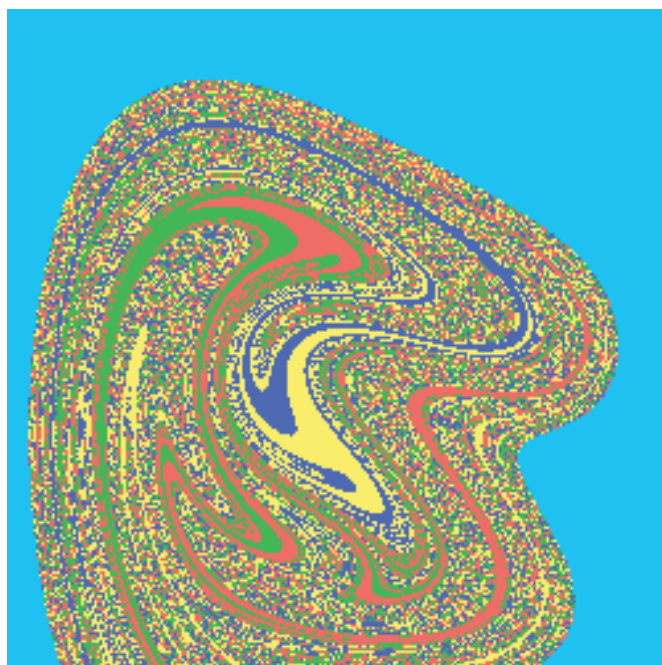
#### 【例 8.11】 引力圏の例

**例 8.10** で扱ったダフィング方程式を例にして固定点や周期点の引力圏を計算してみよう。図 8.21 は図 8.19(a), (b) のアトラクタに関する引力圏を計算した例である。図 (a) の引力圏の境界はなめらかで、隣り合う引力圏をはっきり分けている。 $\omega(D)$  の近くに  $\omega(I)$  が接近し、ヒゲを出しながら巻き付いている様子も分かる。

図 (b) では逆不安定固定点の  $\alpha$  枝と  $\omega$  枝が交差しホモクリニック点が現れ、上下 2 組に分かれた 4 周期点アトラクタ引力圏の境界をフラクタル構造を持つ「**ぼやけた境界** (Fuzzy boundary)」にしてい



(a)



(b)

図 8.23 図 (??) の相平面図に対応する引力圏図, 横軸および縦軸のスケールはいずれも  $-1.4 < x < 0.9, -1.0 < y < 1.0$ . (a)  $k = 0.1, B_0 = -0.075, B = 0.15$ , (b)  $k = 0.1, B_0 = -0.075, B = 0.185$ .

る。もちろん、ホモクリニック点の存在からこのぼやけた境界近傍には 4 周期点アトラクタとは別のカオス集合が存在するが不安定のため見ることができない。■

## 8.4 本章のまとめと文献

### 8.4.1 本章のまとめ

1. 2 次元自律系では、運動は平面の位相幾何学的性質に制約された軌道となる。ポアンカレ・ベンディクソンの定理はリミット・サイクルに関連した問題に適用できる。
2. 2 次元自律系の相平面図の位相的变化を起こす要因としてサドルのセパトリクスに注目することが大切である。サドル・コネクションやセパトリクス・ループは、最近ではヘテロクリニック軌道やホモクリニック軌道と呼ばれることが多い。本書では、後者の呼び名は離散力学系のそれに限定した。
3. 2 次元自律系が構造安定であるとはベクトル場の微分可能な摂動に対して相平面図の位相的性質が変わらないことである。
4. ポアンカレ写像で定義される離散力学系の二重漸近運動には、ホモクリニック運動とヘテロクリニック運動がある。
5. 横断的なホモクリニック運動の近傍では馬蹄形写像が考えられる。馬蹄形写像の不変集合は両側に伸びる 2 進コード列の集合と 1:1 に対応している。このコード列に対する記号力学系の性質を使って、もとの馬蹄形写像の不変集合の性質を知ることができる。この不変集合は典型的なカオス集合の 1 つと考えられる。すなわち、可算無限個の周期点と非可算無限個の非周期点からなり、これらが稠密な集合を作っている。またその上の運動は初期値の僅かな変動に対して敏感である。
6. 実際の力学系では多くの場合、カオス状態は周期倍分岐の連鎖のあとみられる。
7. アトラクタがカオス状態かどうかの判定にはリアプーノフ指数が用いられる。
8. アトラクタの引力圏の位相的变化は大域的分岐現象と考えられる。

### 8.4.2 本章の文献

2 次元自律系の性質については Lefschetz[O9], Hale[O5], Andronov et al.[D2, 3]などを参考にした。特に [D2, 3] は古典的な議論がある。力学系の理論については、白岩 [D10], Abraham・Marsden[D1], Jacson[D11] 参照。馬蹄系写像に関しては Wiggins[D22, 23], Smale[P12], Birkhoff[P2] を参考にするとよいであろう。

リアプーノフ指数の計算法については、島田・長島 [P10], Wolf et al.[P14], Parker・Chua[C5] を参照するとよい。不変曲線や二重漸近運動の計算法に関しては You [P16], 川上・松尾 [P7] を参照。例題として使用したダフィング方程式の諸性質は、林 [N8, P4], 上田 [N23, P13] に詳しい。なお、数値計算の具体的な事項については述べなかったが、川上・上田 [E3] に離散時間系の固定点や分岐計算のプログラムが示されている。方程式を計算する部分を変更すれば微分方程式の場合にも使用できる。

## 8.5 練習問題 8

この章は問題を作るのが難しいので、計算機の数値実験を提案することにしたい。方程式は、いずれもこれまでにでてきたものである。なお、これらの数値実験についての参考書としては、たとえば [C1, C2, C4, C5, C6, E3, E5, E6] がある。方程式に関連して [D6, D9, D11, D16, D21] などが参考になるであろう。

8.1 ロジスティック方程式 (1.28) はパラメータ  $a_0$  を区間  $[0, 4]$  で変化させると周期倍分岐、カオス、カオスの窓、カオスの爆発などの現象が観察される。これらを見てみよう。

8.2 エノン写像 (1.51) は次のパラメータの値でカオスアトラクタを持っている。

$$(1) a = 1.4, b = 0.3, \quad (2) a = 2.1, b = -0.3$$

これを相平面図を描いて体験し、次にパラメータを動かしてどのような分岐現象に遭遇するか実験してみよう。

8.3 練習問題 3.6 の 2 次写像について、前問と同様の実験を行ってみよう。両者のカオスアトラクタの違いは何か考えてみよう。パラメータの値はたとえば次の値をあげておこう。

$$(1) a = 0.4, b = -1.24, \quad (2) a = 0.8, b = -0.8, \quad (3) a = -0.1, b = -1.7$$

8.4 例 2.6 で紹介したローレンツ方程式 (2.62) はカオスアトラクタのみられる自律系としてよく知られている。

$$\sigma = 3, r = 26.5, b = 1$$

でみられるアトラクタを観察してみよう。

8.5 例 4.8 で扱ったレスラー方程式にもカオスアトラクタは豊富にみられる。

$$(1) a = 0.5, b = 1.0, c = 6.0, \quad (2) a = 0.59, b = 1.0, c = 6.0$$

などでアトラクタを観察してみよう。

8.6 ダフィング方程式についての例 8.9, 8.10, 8.11 を検証してみよう。