システム解析ホームワーク＃２の部分的な略解答例

川上　博

2006 年 1 月 3 日

1　定常状態の安定性

以下，レポート課題のうち１．定常状態の安定性についてのみ考える．

1.1　回路方程式，平衡点とその特性方程式

回路方程式は図中の変数を使って次式となる．

$$\begin{aligned} C\frac{dv}{dt} &= -Gv + i \\ L\frac{di}{dt} &= -v - Ri + E \end{aligned} \tag{1}$$

したがって，この回路の定常状態（平衡点）は

$$(v, i) = (\frac{E}{1+RG}, \frac{GE}{1+RG}) \tag{2}$$

となる．この平衡点に関する変分方程式は

$$\begin{aligned} C\frac{d\xi}{dt} &= -G\xi + \eta \\ L\frac{d\eta}{dt} &= -\xi - R\eta \end{aligned} \tag{3}$$

となるから，特性方程式は次式となる．

$$\chi(\mu) = \mu^2 + (\frac{R}{L} + \frac{G}{C})\mu + \frac{1}{LC}(1+RG) = 0 \tag{4}$$

1.2　平衡点の安定性

平衡点の安定性は式 (4) の係数

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \\ a_2 &= \frac{1}{LC}(1+RG) \end{aligned} \tag{5}$$

の符号で定まる．すなわち，1) $a_1 > 0, a_2 > 0$ の場合：安定（２次元安定），2) $a_1 < 0, a_2 > 0$ の場合：２次元不安定，1) $a_2 < 0$ の場合：１次元不安定（サドル）となる．

そこで，$a_1 = 0$ と $a_2 = 0$ の曲線を追跡して GR 平面内に上記のそれぞれの安定領域を書き込めばよい．結果は，図１となる．

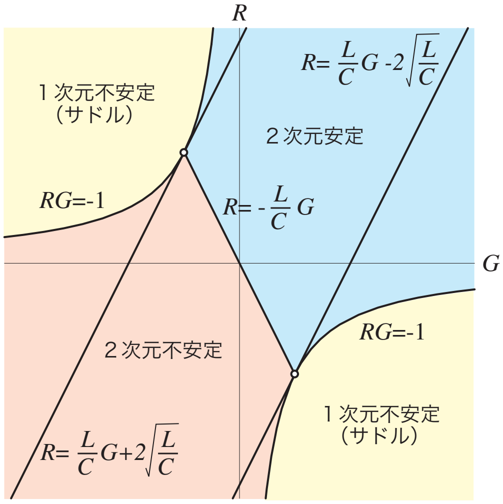

図１　GR 平面での平衡点の分類.

2　検討

これまでのところ R や G がどのような符号を取るにせよ定式化や解析には何ら変わった点はない。では，何が特異なのであろうか？

まず，GR 平面内の曲線：

$$GR = -1 \tag{6}$$

に注目しよう．式 (2) より平衡点の分母が零となり，平衡点は無限大に飛んでしまう．これは通常は考えられないことである．

次に，図１に示した直線

$$R = -\frac{L}{C}G \tag{7}$$

上では，見かけ上抵抗が零となり，回路の状態変化は単振動となる．この条件は，Hopf 分岐と呼ばれる発振条件に他ならない．

この問題は，典型的な発振器の問題として一般に議論されている問題でもある．視点を変えると色々新しい疑問が生じる点で興味深い．また，安定性の変化する境界が単に G や R の符号でき決まるのではなく，動的素子値 L や C が絡んでいる点が解析を複雑にしている．

3　配点

問題１：式 (1)，(2)，(3)，(4) がそれぞれ３点，小計１２点．式 (6)，(7) と図１各３点，および考察２点．最後に問題２と問題３の問題が各２点で合計２４点満点です．