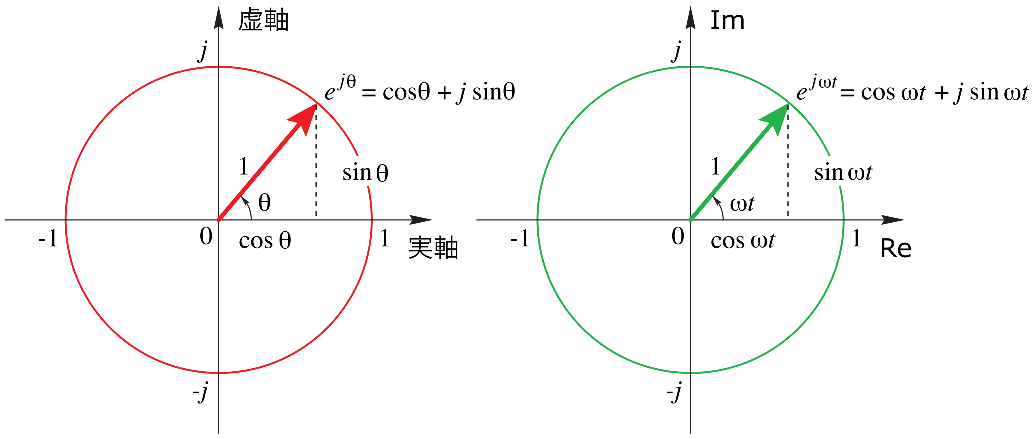
電気数学演習・講義ノート

—連立方程式と複素数になじもう—



2006

徳島大学工学部
電気電子工学科

川上　博

はじめに

この講義は，高校で習った数学をおおざっぱに復習し，後期から始まる「電気回路」へ橋渡しをしようとするものです．

高校で習ったが忘れた，習ったが分からなかった，習わなかったなど，みなさん一人ひとり状況は違うでしょうが，まあ，今から勉強するのだと思ってお付き合いください．

数学をどうして勉強するのか？それは，工学（特に電気工学はそうなのですが）を語るには，数学なしで語れないからです．自然の現象を説明する「言語」，すなわち言葉，として数学があるのです．ひらがなや漢字を知らずして，日本語の小説を読めないのと同じです．ベクトルや連立方程式を知らずして電気は理解できないのです．そんな訳で必要となりそうな事柄を整理してみました．

さて，この講義で勉強し理解してほしい目標は，まず

- 連立 1 次方程式が解けるようになること
- 複素数の計算が自由にできるようになること

です．その上で

- 複素数を係数にもつ連立 1 次方程式が解ける
- 複素三角関数（指数関数）を使いこなせる

ようになってほしいと思います．これらは，このノートの第 2 章から述べてあります．

第 1 章は，関数とその微分・積分についての復習です．上で述べた目標には直接必要はないのですが，「なぜ連立方程式なんか解かなければいけないの？」と言うような疑問に応えるには微分・積分が必要となるでしょう．

各章の内容と高校数学の対応は次のページの表 1 のようになっています．大抵の内容は，高校の教科書にありますが，どこがどう違うのか比較してみるのもおもしろいでしょう．物理の教科書との関係は付録 A に示しておきました．

実は，このノートを作っていて盛り込みたい事柄はいっぱいありました．でも，「消化不良より教えない方がよい」と考えて，書いた項目をどんどん削除しました．これまでの経験から，多くの皆さんが勉強って “何かを覚えること” と勘違いしています．“何かを覚えること” なんかではなく “何かを分かること” なのです．特に，数式がもつ情報量は莫大です．ひとつの式がわかることによって，目前の世界がちがってみえることになるかも知れません．

覚えているだけでは，少しちがった応用にも適用することができませんが，分かっていればどんな局面に遭遇してもうまく使うことができます．分かってしまえば，ゴヂャゴジャした知識をきれいさっぱり忘れて，頭の中をクリーニングして清潔に整頓しておくこともできます．

表 1　このノートの内容と高校数学との対応表

このノートの内容		高等学校の数学の教科書						講義
章節	内　容	I	II	III	A	B	C	回数
1.1	2 次方程式の解	○	○					4 回
1.2	関数とグラフ	○	○				○	
1.3	関数の微分と積分		○	○				
1.4	集合演算と論理演算				○			
2.1	1 次関数	○	○			○	○	5 回
2.2	連立 1 次方程式		○				○	
2.3	ベクトルと行列の幾何学的意味					○	○	
2.4	連立 1 次方程式の解の重ね合わせ							
3.1	複素数はどこから生まれたのか		○					4 回
3.2	複素平面							
3.3	複素係数の連立 1 次方程式							
3.4	複素関数							
3.5	指数関数と三角関数	○	○	○		○		
4.1	正弦波		○	○			○	3 回
4.2	複素正弦波							

○ の無い行は，高校では習っていない項目を意味する．

最後に，一言．人生は長いのです．これからは自分に合った勉強のスタイルを見付けて，そのスタイルで勉強しましょう．「自分に合った勉強のスタイル」なんて，言うは易しく行うは難しかも知れませんが⋯．

では，よいご旅行を

2006 年 4 月 2 日

π と i を掛け合わせた数で e を累乗し，1 を足すと 0 となる．

私はもう一度博士のメモを見直した．果ての果てまで循環する数と，決して正体を見せない虚ろな数が，簡潔な軌跡を描き，一点に着地する．どこにも円は登場しないのに，予期せぬ宙から π が e の元に舞い下り，恥ずかしがり屋の i と握手する．彼らは身を寄せ合い，じっと息をひそめているのだが，一人の人間が 1 つだけ足し算をした途端，何の前触れもなく世界が転換する．すべてが 0 に抱き留められる．

オイラーの公式は暗闇に光る一筋の流星だった．暗黒の洞窟に刻まれた詩の一行だった．そこに込められた美しさに打たれながら．私はメモ用紙を定期入れに仕舞った．

小川洋子著：博士の愛した数式，新潮社，2003

目次

第 1 章

高校数学のおさらい

この章では，高等学校で学んだ数学のうち，これから必要となるであろう幾つかの事柄をおさらいしておく．忘れてしまった人は，適当に必要となった時に復習なり勉強し直すなりしてほしい．

1.1　2 次方程式の解

1.1.1　2 次方程式の解の公式

方程式のすべての項を左辺に移項して整理したとき，次の形で表される方程式を，x についての **2 次方程式**という．

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.1}$$

ここに a, b, c は**定数**であり，$a \neq 0$ とする．

たとえば，

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \tag{1.2}$$

は x についての 2 次方程式である．また，

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \tag{1.3}$$

も λ についての 2 次方程式である．式 (1.2) と式 (1.3) は，**未知変数**が x と λ のように異なっているが，同じ方程式である．したがって，解はどちらの方程式も同じとなるであろう．実際，

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) \tag{1.4}$$

と**因数分解**できるので，答えは

$$x = \lambda = -1,\ \text{または}\ 3 \tag{1.5}$$

となる．

一般に 2 次方程式 (1.1) の**解の公式**[*1]は次式となる．

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.6}$$

以上の事柄は，ある数学 I の教科書をみながら要点を書き写したものである．そこで，幾つかの注意を述べておこう．

注意 1　式 (1.1) では x が未知変数，その他の文字変数 a, b, c はパラメータ（助変数，または経数ともいう）である．パラメータとは，「定数あつかいにする」変数という意味である．したがって「定数」なのであるが，いつ何時「変えられる」かも知れない．実際，解の公式 (1.6) をみると右辺の $a \neq 0, b, c$ はどんな実数を代入してもいい，すなわちこの段階では変数扱いになっている，ことに注意しよう．

何が変数で，何がパラメータかは，その場その場で問題を考える立場によって変化する．たとえば，

$$x^2 + ax + a^2 = 0$$

は，x を未知変数と考え，a をパラメータと考える場合と，その逆に a を未知変数と考え，x をパラメータと考える場合の 2 種類が考えられる．更に，x も a も未知変数と考え 2 つの未知変数の式と見ることもできる．

結局，文字を含む式では，未知変数と考えた変数以外の文字変数はパラメータである．

注意 2　これからは，数式を表すために「英語」，「ドイツ語」「フランス語」「ロシア語」「ギリシャ語」などのアルファベット文字を使用する．特にギリシャ語のアルファベット文字には慣れておく必要がある．表 1.1 を参照．

注意 3　解の公式 (1.6) の右辺の根号の中の式

$$D = b^2 - 4ac$$

は，**判別式**と呼ばれている．

- $D > 0$ の場合は，相異なる 2 実根，
- $D = 0$ の場合は，重根，
- $D < 0$ の場合は，共役複素根 [*2]

となる．

注意 4　2 次方程式 (1.1) の解の公式 (1.6) は，パラメータ a, b をうまく選んでやると少し簡単になる．

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

だから，方程式

$$x^2 + 2Bx + C = 0$$

[*1] 2 次方程式の解を「解」と言わず「根」と呼ぶことが自然と考えるかどうかは，育った世代による．ひと昔前までは，根であった．したがって先生の世代は，2 実根，重根，複素根などと呼び，2 実解，重解，複素解ということにいささか抵抗を感じる．

[*2] 複素数については第 3 章で考える．ここでは，複素解となる場合があることに注意するだけれよい．

表 1.1　ギリシャ文字 (Greek alphabet)

	大文字 (Upper case)	小文字 (lower case)	よみかた pronunciation		Note
1	A	α	アルファ	alpha	A
2	B	β	ベータ	beta	B
3	Γ	γ	ガンマ	gamma	G
4	Δ	δ	デルタ	delta	D
5	E	ϵ, ε	イプシロン	epsilon	E
6	Z	ζ	ゼータ，ツェータ	zeta	Z
7	H	η	イータ	eta	H
8	Θ	θ, ϑ	シータ，テータ	theta	
9	I	ι	イオタ	iota	I
10	K	κ	カッパ	kappa	K
11	Λ	λ	ラムダ	lambda	L
12	M	μ	ミュー	mu	M
13	N	ν	ニュー	nu	N
14	Ξ	ξ	グザイ，クシイ	xi	
15	O	o	オミクロン	omicron	O
16	Π	π	パイ	pi	P
17	P	ρ, ϱ	ロー	rho	R
18	Σ	σ	シグマ	sigma	S
19	T	τ	タウ	tau	T
20	Υ	υ	ユプシロン	upsilon	
21	Φ	ϕ, φ	ファイ	phi	
22	X	χ	カイ	chi	X
23	Ψ	ψ	プシイ，プサイ	psi	
24	Ω	ω	オメガ	omega	

の解の公式を考えれば十分となる．ここに，$B = \dfrac{b}{2a}$, $C = \dfrac{c}{a}$ とおいた．この方程式の解の公式は

$$x = -B \pm \sqrt{B^2 - C}$$

となる．

注意 5　公式を丸覚えして，いつでも ?? の一つ覚え的に使う人がいる．簡単な 2 次方程式は,

その都度，因数分解などによってサーと計算するクセをつけてほしい．

$$x^2 - 1 = 0,\ x^2 + 1 = 0$$

などの解は因数分解して $x = \pm 1,\ x = \pm\sqrt{-1}$ と直ちに知ることができる[*3]．

【問題 1.1.1】 2 次方程式の解の公式 (1.6) を導け．

1.1.2　2, 3 の例題

【例題 1.1.1】

2 次方程式

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1.7}$$

の 2 つの解が $\alpha,\ \beta$ となったという．このとき， $\alpha,\ \beta$ と $p,\ q$ の関係式を求めよ．

【解】式 (1.7) の解が $\alpha,\ \beta$ となることから，式 (1.7) は次のように因数分解できるはずである．

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta) = 0 \tag{1.8}$$

そこで

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

より

$$p = -(\alpha + \beta),\ q = \alpha\beta \tag{1.9}$$

を得る．この関係式を**解と係数の関係式**という．

解と係数の関係を利用すると，一つの解 $x = \alpha$ が分かっているとき，他の一つの解 β は，式 (1.9) を用いて

$$\beta = -p - \alpha,\ \text{または}\ \beta = \frac{q}{\alpha} \tag{1.10}$$

のように求めることができる．

【例題 1.1.2】

2 次方程式の解の公式 (1.6) を機械的に用いると，間違った答えを出してしまうことがある．このことを体験するために次の方程式の解を 10 進 3 桁切り捨てで求めなさい．

$$x^2 - 303x + 42 = 0 \tag{1.11}$$

【解】解の公式 (1.6) より計算すると

$$x = \frac{303 \pm \sqrt{303^2 - 4 \times 42}}{2} = \frac{303 \pm 302}{2} = 302,\ 0.5$$

[*3] $\sqrt{-1}$ は数学では，i と書き，電気工学では j と書く習慣となっている．いずれの場合も虚数単位という．これらについては第 3 章で考える．

次に，$x = 302$ は解の公式 (1.6) を用いて計算し，もう一つの解は式 (1.10) を用いて求めると

$$x = \frac{42}{302} = 0.139 \neq 0.5$$

となる．正解は

$$x_1 = 302.861\cdots,\ x_2 = 0.1387\cdots$$

であるから，解の公式から求めた 0.5 は正しくない．

これを調べるには，解が求められた時点でその解と式 (1.9) を使って再び方程式を作ってみるとよい．$x = 302,\ 0.5$ の場合は

$$(x-302)(x-0.5) = x^2 - 302.5x + 151 = 0$$

また，$x = 302, 0.139$ の場合は

$$(x-302)(x-0.139) = x^2 - 302.139x + 41.978 = 0$$

となって，後者の方が正しいことが分かる．

一般に解の公式 (1.6) は，$b^2 \gg |4ac|$ の場合，どちらかの式の分子の有効桁数が減少して誤差を生じる．これを**桁落ち** (cancellation) という．桁落ちは，数値計算をするとき最も気を付けなければならない事柄である．

【例題 1.1.3】

2 次方程式に含まれるパラメータの数が多くなると，解の公式の計算が煩雑になることがある．こんな場合にもめげずに「式の計算」を誤り無く遂行できるようになりたいものである．さて，次の 2 次方程式の解が負の 2 実根となることを証明しなさい．

$$L_1L_2\lambda^2 + \{L_1R_2 + (L_1+L_2)R_1\}\lambda + R_1R_2 = 0 \tag{1.12}$$

ここに，すべてのパラメータは正数と仮定する．

【解】解の公式 (1.6) より計算すると[*4]

$$\lambda = \frac{-\{L_1R_2 + (L_1+L_2)R_1\} \pm \sqrt{\{L_1R_2 + (L_1+L_2)R_1\}^2 - 4L_1L_2R_1R_2}}{2L_1L_2} \tag{1.13}$$

そこで

$$\begin{aligned} D &= \{L_1R_2 + (L_1+L_2)R_1\}^2 - 4L_1L_2R_1R_2 \\ &= (L_1R_2 - L_2R_1)^2 + 2L_1R_1(L_1R_2 + L_2R_1) + (L_1R_1)^2 > 0 \end{aligned} \tag{1.14}$$

と

$$-\{L_1R_2 + (L_1+L_2)R_1\} + \sqrt{\{L_1R_2 + (L_1+L_2)R_1\}^2 - 4L_1L_2R_1R_2} < 0$$

[*4] L_1 などと文字の右下に付けた数字や文字のことを「添字」という．添字は，右下に限らず，右上，左上，左下など場合によってあちこちに付けられるので注意が必要である．L_1^2 のように付けたりもする．この場合 L_1 の 2 乗と区別しにくくなる．特に注意が必要である．また，L_{11} 等は，L の添字が 11 ではなくて (1, 1) と 1 を 2 つ並べて書いてあることを意味することもある．いずれにせよ文脈から理解することが必要である．

より題意が言える．

【問題 1.1.2】次の x についての 2 次方程式を解け．

1. $x^2 + x - 1 = 0$
2. $x^2 + 100x + 1 = 0$
3. $x^2 + 2\zeta x + \left(\zeta^2 + \omega^2\right) = 0$

【問題 1.1.3】2 つの 2 次関数：

$$f(x) = ax^2, \quad g(y) = by^2 \tag{1.15}$$

を組み合わせた関数：

$$h(x,\ y) = ax^2 + by^2 \tag{1.16}$$

は，2 つの独立変数 x, y のいずれの変数についても 2 次関数となっている．一般に，

$$k(x,\ y) = ax^2 + 2cxy + by^2 \tag{1.17}$$

を変数 x, y についての 2 次形式という．

さて，関数 (1.15) と (1.16) は，次の性質を持っている．

- $a > 0$ の場合，$f(x)$ は，$x = 0$ を除いて，$f(x) > 0$ である．
- $b > 0$ の場合，$g(y)$ は，$y = 0$ を除いて，$g(y) > 0$ である．
- $a > 0$, $b > 0$ の場合，$h(x,\ y)$ は，$x = y = 0$ を除いて，$h(x,\ y) > 0$ である．

2 次形式 (1.17) が $x = y = 0$ を除いて，$k(x,\ y) > 0$ となるための係数 a, b, c が満たす条件を求めよ．

1.2　関数とグラフ

1.2.1　関数とは

2 つの変数 x, y の間にある関係があって，x の値を定めるとそれに対応して y の値がちょうど 1 つ定まるとき，y は x の**関数** (function) であるという．またこのとき，x を**独立変数**，y を**従属変数**という[*5]．

y が x の関数であることを，次のような記号で表す．

$$y = f(x) \tag{1.18}$$

たとえば，2 次関数は

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \tag{1.19}$$

[*5] 「…という」とか，「…と呼ぶ」という文章は，しばしば自然科学の教科書で見かける文章のスタイルである．これらの文章は「…」の部分の「単語または文の意味を定義する」場合に用いる．たとえば，ここでは関数とは「x の値を定めるとそれに対応して y の値がちょうど 1 つ定まる」と決めた（定義した）ので，x の値を定めるとそれに対応して y の値が 2 つ定まる場合は関数とは呼ばないのである．したがって円の方程式 $x^2 + y^2 = 1$ から定まる $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ はここでいう関数ではない．

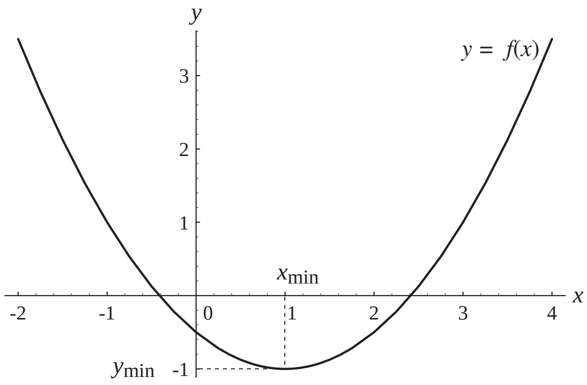


図 1.1　式 (1.2.3) のグラフ.

と表される関数のことである．ここに a, b, c はパラメータであり，$a \neq 0$ とする．

【例題 1.2.1】

2 次関数

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \tag{1.20}$$

のグラフを描き，最小値を与える x_{min} とその時の y_{min} の値を求めよ．

【解】 式 (1.20) は次式のように完全平方の形に変形できる．

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1 \tag{1.21}$$

したがって，$x_{min} = 1$ のとき，この関数は最小となり，最小値は $y_{min} = -1$ である．また，この関数のグラフは放物線であり， 図 1.1 となる．

別の考え方としては，最小値をとる x_{min} で関数の微分が 0 となることを使って[*6],

$$\frac{dy}{dx} = x - 1 = 0 \ \Rightarrow \ x_{min} = 1$$

したがって，関数 y の最小値は

$$y_{\min} = f(1) = -1$$

となる．

【問題 1.2.1】 関数 $y = f(x)$ のグラフを **G** とする．このグラフ **G** を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して得られるグラフ **G'** の関数は $y = f(x-p) + q$ となることを説明しなさい．

【問題 1.2.2】 関数 $y = f(x)$ のグラフを **G** とする．このとき，関数 $y = -f(x)$，$y = f(-x)$，$y = -f(-x)$ のグラフは **G** とどのような関係にあるか．

【問題 1.2.3】 4 つの辺の長さの和が ℓ の長方形がある．この長方形はどのようなときに，その面積 S が最大となるか．

[*6] 記号 $\Rightarrow$ は $P \Rightarrow\ Q$ のように使って，P より Q が導かれることを意味する．P ならば，Q が成り立つともいう．

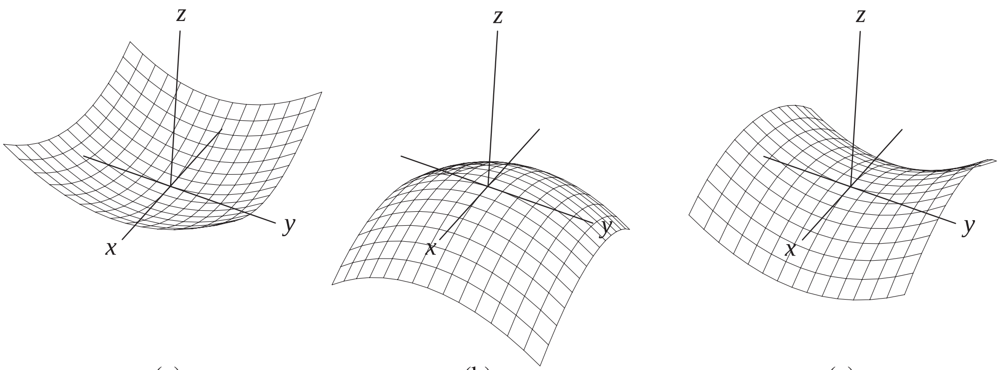


図 1.2　2 次形式のグラフ.

【問題 1.2.4】地上から物体を，初速度 20 $[m/sec]$ で真上に投げあげたとき，t 秒後の物体の高さ y $[m]$ は，およそ $y = -5t^2 + 20t$ で表される．物体がもっとも高い位置に達するのは，投げあげてから何秒後か．また，その高さを求めよ．更に，手元に還ってくるのは何秒後か．またその時の速度はいくらか.

1.2.2　1 次関数

関数とそのグラフの内で，最も単純でかつ最も大切なものは，**1 次関数**[*7]とそのグラフである直線である． 1 次関数は

$$y = ax + b \tag{1.22}$$

の形やその逆関数

$$x = cy + d \tag{1.23}$$

あるいは，x と y のどちらが独立変数か区別できないような形[*8]

$$ax + by = c \tag{1.24}$$

のいずれかで与えられる．これらの関係式がどのような直線となるかは十分に理解しておくことが必要である.

【問題 1.2.5】関数 (1.22)， (1.23) および (1.24) のグラフを描け.

【問題 1.2.6】 1 次関数 (1.22) と表すことができるが， 1 次関数 (1.23) とは表すことができない 1 次関数はどんな 1 次関数か.

1.2.3　2 次形式のグラフ

【問題 1.1.3】で考えた 2 次形式：

$$z = h(x,\ y) = ax^2 + by^2 \tag{1.25}$$

[*7] 1 次関数はまた，1 次形式 (linear form) あるいは線形関数 (linear function) とも呼ばれている.

[*8] このように変数間の関係を $f(x,\ y) = 0$ のような形で与えることを，陰関数表示と言ったりする.

のグラフを考えよう．まず，二つの変数 $x,\ y$ を平面の上の点の座標 $(x,\ y)$ と考えると，式 (1.25) はこの平面上で定義された関数とみることができる．したがって，この関数の値を 3 番目の座標 z に対応させると，この関数のグラフは，3 次元空間の曲面となる．

さて，$y=0$ でのグラフは，$z=h(x,0)=ax^2$ となって放物線を表している．$a>0$ ならば "上に開いたグラフ[*9]"，$a<0$ ならば "下に開いたグラフ" となる．

そこで，式 (1.25) のグラフは，x 軸と y 軸方向に上あるいは下に開いた放物面[*10]となる．組み合わせとして次の 4 種類が考えられる．

1. $a>0,\ b>0$ の場合．上に開いた放物面．この場合，$x=y=0$ を除いて，$h(x,\ y)>0$ となる．2 次形式 (1.25) は**正定値** (posive definite) であるという． 図 1.2 (a) 参照.
2. $a<0,\ b<0$ の場合．下に開いた放物面．この場合，$x=y=0$ を除いて，$h(x,\ y)<0$ となる．2 次形式 (1.25) は**負定値** (negative definite) であるという．図 1.2 (b) 参照.
3. $a>0,\ b<0$ の場合．x 軸方向には上に開き， y 軸方向には下に開いた放物面．この場合は $h(x,\ y)>0$ の部分も $h(x,\ y)<0$ となる部分もあるので $h(x,\ y)$ は**不定値** (indefinite) という．
4. $a<0,\ b>0$ の場合．x 軸方向には下に開き， y 軸方向には上に開いた放物面．x 軸と y 軸を入れ替えると 3 番目の場合と同じとなるので，この場合も $h(x,\ y)$ は不定値である．図 1.2 (c) 参照.

1.3　関数の微分と積分

1.3.1　微分係数と導関数・微分

関数の微分や積分は，自然科学における法則の記述に欠くことのできない道具である．特に，微分は「変化の法則」を書き表すために必要である．高等学校では「数学 II」でこれらを学ぶ．すこし，教科書を引用しよう．

関数 $y=f(x)$ について，x が a から $a+h$ まで変化するときの平均変化率

$$m=\frac{f\left(a+h\right)-f\left(a\right)}{\left(a+h\right)-a}=\frac{f\left(a+h\right)-f\left(a\right)}{h} \tag{1.26}$$

を考えよう．この式で，h が 0 と異なる値をとりながら 0 に限りなく近づくとき，m の値が一定の値に限りなく近づくならば，その極限値を，関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微係数**または**変化率**といい， $f'(a)$ で表す．すなわち $f'(a)$ は次のように書くことができる．

$$f'\left(a\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(a+h\right)-f\left(a\right)}{h} \tag{1.27}$$

さて，一般に x のとる各値 a に対して微係数 $f'(a)$ を対応させると，1 つの新しい関数が得られる．この新しい関数を元の関数 $f(x)$ の**導関数**といい，記号 $f'(x)$ で表す．

[*9] 下に有界ともいう．
[*10] 軸に沿った面の切り口が放物線となっている曲面のこと．

次に思いつくままに幾つかの注意を述べておこう．

注意 1　微分演算は古い歴史を持っている．したがって色々な記法が色々な人々によって使われてきた．たとえば

$$f'(x)\,,\ \frac{df}{dx},\ \frac{Df}{Dx},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \dot{f}(x)\,,\ df,\ Df,\ \partial f \tag{1.28}$$

など，様々である．普通は

$$f'(x)\,,\ \frac{df}{dx}$$

が最もよく使われている．$\dfrac{df}{dx}$ は「ディエフ・ディエッキス」と読む．「ディエッキス分のディエフ」と読むと笑われる．

注意 2　電気回路や力学では，独立変数として x の代わりに時間 (time) t を使用する．そうすると $x,\ y,\ z$ などの文字を従属変数として使うことができるようになる．この場合には，関数 $x(t)$ の微分は

$$x'(t)\,,\ \frac{dx}{dt},\ \dot{x}(t) \tag{1.29}$$

となる．通常は記法 $\dot{x}(t)$ を使うので注意が必要である．

注意 3　独立変数が多い関数[*11]の場合の微分は，一つの独立変数に着目し，他の独立変数をあたかも定数であるかのように扱った微分を考える．この微分を偏微分という．たとえば，2 個の変数に依存する関数 $f(x,\ y)$ は y の値を固定すると x のみの関数になるから，x についての微分を考えることができる．これを $f(x,\ y)$ の x についての**偏微分** (partial derivative) といい，

$$f_x(x,\ y)\,,\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

などで表す．偏微分を用いた法則は電気磁気学で多用される．

注意 4　関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の導関数は

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

と書く．これを $f(x)$ の 2 階微分という．r 階微分を

$$f^{(r)}(x)\,,\ \left(\frac{d}{dx}\right)^r f(x)\,,\ \frac{d^r f(x)}{dx^r}$$

などと記す．

注意 5　関数 $y = f(x)$ を考えていたとき，実は x が独立変数 t の関数 $x = g(t)$ であった，と言うような場合がおこる．この場合 y は t の関数とも考えられる．これを**合成関数**という．

$$y = f(x) = f(g(t)) \tag{1.30}$$

合成関数の微分は次式となる．

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dg}{dt} \tag{1.31}$$

[*11] 多変数関数という．

1.3.2　幾つかの微分の公式

幾つかの有用な関数の微分をあげておこう．

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \tag{1.32}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x} \tag{1.33}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \tag{1.34}$$

次の公式も知っておいてほしい．

$$\frac{d}{dx}af\left(x\right) = a\frac{d}{dx}f\left(x\right) \tag{1.35}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{f\left(x\right)+g\left(x\right)\right\} = \frac{d}{dx}f\left(x\right)+\frac{d}{dx}g\left(x\right) \tag{1.36}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{f\left(x\right)g\left(x\right)\right\} = g\left(x\right)\frac{d}{dx}f\left(x\right)+f\left(x\right)\frac{d}{dx}g\left(x\right) \tag{1.37}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = \frac{g\left(x\right)\frac{d}{dx}f\left(x\right)-f\left(x\right)\frac{d}{dx}g\left(x\right)}{g\left(x\right)^2} \tag{1.38}$$

$$\frac{d}{dx}f\left(g\left(x\right)\right) = \frac{d}{dg}\left(f\left(g\right)\right)\frac{d}{dx}g\left(x\right) \tag{1.39}$$

【問題 1.3.1】次の微分を計算せよ．

$$1.\ \left(\frac{d}{dx}\right)^r x^n,\ \ 2.\ \left(\frac{d}{dx}\right)^r\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\right),\ \ 3.\ \frac{d}{dx}e^{ax},\ \ 4.\ \frac{d}{dx}\sin ax$$

【問題 1.3.2】次の微分を計算せよ．

$$1.\ \left(\frac{d}{dx}\right)^3\left\{f\left(x\right)g\left(x\right)\right\},\ \ 2.\ \left(\frac{d}{dx}\right)\left\{f\left(x\right)g\left(x\right)h\left(x\right)\right\},\ \ 3.\ \left(\frac{d}{dx}\right)^2\left\{f\left(g\left(x\right)\right)\right\}$$

1.3.3　積分

微分すると関数 $f(x)$ となるような関数，すなわち関数 $f(x)$ を導関数とする関数 $F(x)$ を，$f(x)$ の**不定積分**という．したがって不定積分とは微分の逆演算である．$f(x)$ の不定積分を

$$\int f\left(x\right)dx$$

と記す．不定積分は任意定数 C を加えても不定積分である．

$$\int f\left(x\right)dx = F\left(x\right)+C \tag{1.40}$$

関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とするとき，2 つの実数 $a,\ b$ に対して，$F(b)-F(a)$ の値が考えられる．この値は，関数 $f(x)$ と 2 つの実数 $a,\ b$ のみによって定まり，不定積分の選び方（すなわち積分定数 C ）には関係しない．

そこで，この値 $F(b)-F(a)$ を，関数 $y=f(x)$ の a から b までの**定積分**といい

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a) \tag{1.41}$$

と表す．つぎの公式が成り立つ．

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx = f(x) \tag{1.42}$$

$$\int_a^b \{hf(x)+kg(x)\}\,dx = h\int_a^b f(x)\,dx + k\int_a^b g(x)\,dx \tag{1.43}$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{1.44}$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{1.45}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{1.46}$$

x 軸の区間 $[a,\ b]$ で $f(x)\geq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれた部分の面積 S は次式となる．

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1.47}$$

合成関数の微分 (1.31) を不定積分すると次式を得る．

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt \quad ここに \quad x=g(t) \tag{1.48}$$

ただし，右辺は得られた不定積分である t の関数に，$x=g(t)$ を t について逆に解いた x の関数を代入する．この積分を**置換積分**という．

積の微分の公式 (1.37) を不定積分すると

$$f(x)\,g(x) = \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

となる．これを移項して，次の**部分積分**の公式を得る．

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx \tag{1.49}$$

【問題 1.3.3】次の積分を計算せよ．

1. $\int x^n dx$，2. $\int e^{ax}dx$，3. $\int \frac{1}{x}dx$，4. $\int \sin x dx$，5. $\int \cos ax dx$，6. $\int e^{-at}\sin(bt)\,dt$

1.4 集合演算と論理演算

この節は，最初読み飛ばしでもいい．電気屋さんが数学の本を読む時，知っていたら誤解が少なくなるであろう文章の「スタイル」についての初歩的事項が述べられている．

L. シュワルツ[*12]も書いているように，物理学者や技術者のための「涙なしの数学」は存在しない．現代の物理学者や技術者は，莫大な量の，しかも広大な領域にわたっての数学的知識を必要とする．この知識を理解するためには，数学独特の「言い回し」や「記法」にある程度慣れておく必要がある．

いずれにしろ，皆さんはディジタル回路（論理回路）やプログラミング言語で集合演算や論理演算を日常的に使うことになる．機会がある毎に慣れ親しんでおくと良いであろう．

1.4.1 集合とその演算

ものの集まりを**集合**という．たとえば，

- 電気電子工学科 1 年生全員からなる集合
- 自然数：0 以上の整数全部の集合 $\mathbf{N} = \{0,\ 1,\ 2, \cdots\}$
- 整数全部の集合 $\mathbf{Z} = \{\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2, \cdots\}$
- 有理数全部の集合 $\mathbf{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0\}$
- 実数全部の集合 $\mathbf{R}$
- 複素数全部の集合 $\mathbf{C}$

などは集合の例である．数の集合は，しばしば使われるのでこの例にあげたような特別の記号で表す．

部分集合

記号 $x \in \mathbf{E}$ は「x は集合 $\mathbf{E}$ の要素[*13]である」「x は集合 $\mathbf{E}$ に属する」を表す[*14]．$x \notin \mathbf{E}$ は，x が集合 $\mathbf{E}$ の要素でないことを表す．

集合 $\mathbf{A}$ がもう一つの集合 $\mathbf{E}$ の要素だけから成るとき，$\mathbf{A}$ は $\mathbf{E}$ の**部分集合**であるという．

集合を表すには

1. 要素を書き並べて表す．たとえば，三つの要素 $a,\ b,\ ,c$ から成る集合を $\{a,\ b,\ ,c\}$ と書く[*15]．
2. ある性質 P をもつ要素全部の集合を

$$\{x \mid x \text{ は性質 } P \text{ を持つ }\}$$

[*12] シュワルツ著，斎藤正彦訳：解析学 I，東京図書，1970．以下の事項は部分的にこの本から引用した．
[*13] 「要素」は element の訳語である．「元」ともいう．なお，電気回路では element は「素子」と訳されている．
[*14] 集合はまた空間と呼ばれることも多く，そのときにはその要素はふつう点と呼ばれている．
[*15] 要素を書き並べる場合，並べる順序は問題としない．したがって，$\{a,\ b,\ ,c\}$ と $\{c,\ a,\ ,b\}$ は同じ集合を表す．

のように書く．たとえば，

$$\{x \mid x \in \mathbf{R},\ x \geq 0\}$$

は 0 以上の実数全部の集合を表す．

などの方法が用いられる．

集合 $\mathbf{E}$ の部分集合には $\mathbf{E}$ 自身もあり，空集合[*16] $\emptyset$ もある．また，一点 a からなる部分集合 $\{a\}$ もある．$\mathbf{E}$ の要素 a と $\mathbf{E}$ の部分集合 $\{a\}$ とを混同してはならない．

包含関係・補集合

$\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ を $\mathbf{E}$ の部分集合とする．$\mathbf{X}$ の要素がすべて $\mathbf{Y}$ の要素であるとき，$\mathbf{X}$ は $\mathbf{Y}$ に含まれる，または $\mathbf{Y}$ は $\mathbf{X}$ を含むと言い，$\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$ または $\mathbf{Y} \supset \mathbf{X}$ と書く．

$$\emptyset \subset \mathbf{X} \subset \mathbf{E},\ \emptyset \subset \emptyset,\ \mathbf{E} \subset \mathbf{E}$$

また，

$$\mathbf{X} \subset \mathbf{Y},\ \mathbf{Y} \subset \mathbf{Z}\ \text{ならば}\ \mathbf{X} \subset \mathbf{Z}$$

が成り立つ．

$\mathbf{A}$ が $\mathbf{E}$ の部分集合であるとき，$\mathbf{A}$ に属さない $\mathbf{E}$ の要素全部の集合を $\mathbf{A}$ の**補集合**といい，$\bar{\mathbf{A}}$ と書く．このとき，$\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$ が成り立つ．また，$\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ ならば，$\bar{\mathbf{A}} \supset \bar{\mathbf{B}}$ となる．なお，$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ が $\mathbf{E}$ の部分集合で $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ のとき，$\mathbf{A}$ の要素で $\mathbf{B}$ に属さない要素全体の集合を $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ と書くことがある．

和集合・共通部分

集合 $\mathbf{E}$ の部分集合の集まりからなる集合を集合の族という．$\mathbf{E}$ の要素で，それらの部分集合の少なくとも一つに属するような要素全部の集合のことを**和集合**という．たとえば，三つの部分集合 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ の場合，それらの和集合を $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$ と書く．

ある添字集合 I によって添字づけられた部分集合 $\mathbf{A}_i$ の族の場合には，その和集合 $\displaystyle\bigcup_{i \in I} \mathbf{A}_i$ と書く．

集合 $\mathbf{E}$ の部分集合の集まりの共通部分とは，$\mathbf{E}$ の要素で，それらの部分集合のどれにも属するような要素全部の集合のことである．上と同様に，$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}$, $\displaystyle\bigcap_{i \in I} \mathbf{A}_i$ と書く．二つの部分集合の共通部分が空集合となるとき，この二つの部分集合は共通要素を持たないという．

部分集合の族の共通部分の補集合は，各部分集合の補集合の和集合である．部分集合の族の和集合の補集合は，各部分集合の補集合の共通部分である．すなわち，

$$\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}} = \bar{\mathbf{A}} \cup \bar{\mathbf{B}},\ \overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}} = \bar{\mathbf{A}} \cap \bar{\mathbf{B}} \tag{1.50}$$

が成り立つ．したがって，$\mathbf{E}$ の各部分集合にその補集合を対応させる操作により，(1) $\subset$ は $\supset$ に，(2) $\supset$ は $\subset$ に，(3) $\cup$ は $\cap$ に，(4) $\cap$ は $\cup$ に，移る．

[*16] 要素のない空っぽの集合のことを空集合という．

積集合

二つの集合 $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ に対し，$\mathbf{E}$ の要素 x と $\mathbf{F}$ の要素 y との順序のある組 $(x,\ y)$ 全部の集合を $\mathbf{E}$ と $\mathbf{F}$ の**積集合**といい，$\mathbf{E}\times\mathbf{F}$ と書く．$x \neq y$ ならば，$(x,\ y)$ と $(y,\ x)$ は違う要素であることに注意しよう．特に，$\mathbf{E}$ と $\mathbf{F}$ が同じ集合のときは混同しないようにしなければならない．

同様に，もっと多くの集合の積や集合の族の積を定義することができる．このとき，$(\mathbf{E}\times\mathbf{F})\times\mathbf{G}$, $\mathbf{E}\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G})$，$\mathbf{E}\times\mathbf{F}\times\mathbf{G}$ は，たがいに同一視することができる．これが集合の乗法の結合性である．

$\mathbf{E}\times\mathbf{E}$, $\mathbf{E}\times\mathbf{E}\times\mathbf{E}$ 等は，それぞれ $\mathbf{E}^2$, $\mathbf{E}^3$ 等と記す．したがって，実数全部の集合 $\mathbf{R}$ の n 個の積は $\mathbf{R}^n$ と書かれる．$\mathbf{R}^n$ の点は，n 個の任意の実数の順序づけられた組 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ である．

1.4.2　論理とその演算

命題 (proposition)

真 (true) か**偽** (false) かのどちらか一方にはっきり決めることのできる文を**命題**という．命題の集合 $P = \{A,\ B,\ ,\cdots\}$ から，{真，偽} への関数を f とすると，

$$f(A) = \text{真} \tag{1.51}$$

となる命題を “真の命題”

$$f(A) = \text{偽} \tag{1.52}$$

となる命題を “偽の命題” という．

命題の和と交わり

ある対象が命題 A または命題 B を持つということを，命題『 A または B 』を持つと言い，命題 $A\vee B$ と書く．数学では『または 』という言葉や記号 $\vee$ は，どちらか一方に限るという意味はない．『 A または B 』と言っても，同時に A かつ B である場合を除外しない．たとえば，A が $x \leq 0$ という性質，B が $x \geq 0$ という性質のとき，実数 x に対して『 A または B 』は必ず成立つ．この場合， A でも B でもある $x = 0$ の場合も含まれている．図 1.3 参照．

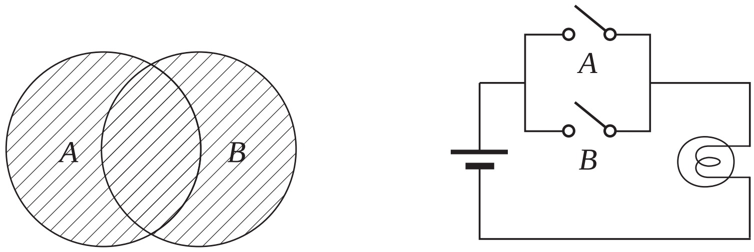
命題 A, B を同時に両方持つことを，命題『 A かつ B 』を持つと言い，命題 $A\wedge B$ と書く．

性質 1　命題『A または B 』は，『A が偽』で，かつ『 B が偽』のときのみ偽である．
性質 2　命題『A かつ B 』は，『A が真』で，かつ『 B が真』のときのみ真である．

性質 A の否定は普通『否 A』とか，『$\neg A$』とか書かれる．つねに，次の性質が成り立つ．

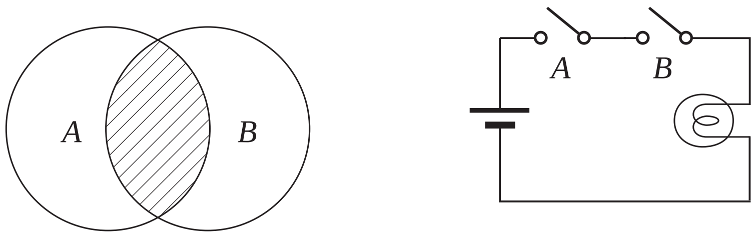
性質 3　$\neg(\neg A) = A$
性質 4　A または $\neg A$ *17

*17 排中律という．



(a)　　　　(b)

図 1.3　命題『 A または B 』の集合による表現 (a) とスイッチによる実現 (b).



(a)　　　　(b)

図 1.4　命題『 A かつ B 』の集合による表現 (a) とスイッチによる実現 (b).

定理の文脈

　定理と名づけられた文章のかたまりは，通常，仮定と呼ばれるある命題 A から，結論と呼ばれるある命題 B が導かれることを主張している文章群である．普通これを簡単に，『A は B を導く』，『A は B を意味する』，『A ならば B である』などと言い，『$A \Rightarrow B$』等の記号で示す．

性質 5　定理『$A \Rightarrow B$』は，A が真で B が偽であるときにのみ偽となる．

【問題 1.4.1】 この性質 5 は，仮定 A が偽の場合は，結論 B が真あるいは偽いずれの場合であっても「定理『$A \Rightarrow B$』は真である」ことを言っている．

　徒然草の第 209 段には，以下のような意味の事柄が述べられている．下男たちの主張を性質 5 と照らし合わせて，おもしろい理由を考えよ．

> 　他人の田を（自分のものだと言って）訴訟で争っていた者が，その訴訟に負けてしまった．くやしさのあまり「その田の稲を刈り取ってこい」といって，下男たちをその田に向かわせた．
>
> 　下男たちは，まず相手の田へ行く途中の田まで刈ながら行くので，（人が見て），「これは訴訟のなされた場所ではない．どうしてこのように別の場所の稲まで刈り取るのか」と尋ねたところ，刈っている下男たちは，「その訴訟した田だって，刈ってよいという理由はないのだ．どっちみち我々は間違ったことをしようと思って出かけている者なのだから，どこの田だって刈らないことがあろうか，どこだって刈り取ってよいのだ.」といった．
>
> 　この理屈はたいそうおもしろい．

定理『$A \Rightarrow B$』の逆の定理は必ずしも真ではないが，それは『$B \Rightarrow A$』を主張するものである．

定理 $A \Rightarrow B$ とその逆とが共に真であるとき，二つの性質 A, B は同値であるといい，『$A \Leftrightarrow B$』あるいは『A iff B』[*18]と書く．これは，『A であるためには B であることが必要十分である』と表現される．

性質 6　命題 $A \Rightarrow B$ が真であるためには，命題 $\neg B \Rightarrow \neg A$ が真であることが必要十分である．

性質 6 の命題 $\neg B \Rightarrow \neg A$ は，命題 $A \Rightarrow B$ の対偶と呼ばれる．

量称

数学の定理では，『任意の…に対して 』,『…であるような…が存在する 』という表現がよく使われる．これらを **量称**と言い，それぞれ量称記号 $\forall$, $\exists$ で表わす．

『A であるような x が存在する 』というかわりに，『適当な x を取ると x は性質 A を持つ 』と言うこともある．

『任意の… 』とか『…存在する 』とかいう表現は，何等かの制限を伴うことが多い．それらの制限は，括弧 ( ) の中に書き表わす．

【定理】

ある命題がいくつかの量称記号 $\forall$, $\exists$ を合み，そのあとに一つの性質 P が来るようなものであるとき，その命題の否定は，各量称記号 $\forall$ を $\exists$ で，$\exists$ を $\forall$ で置き換え，さらに P をその否定 $\neg P$ で置き換えることによって得られる．

【証明】

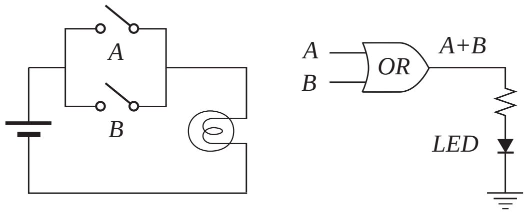
第一段階　まず，ただ一つの量称記号 $\forall$ を合む場合を考える．すなわち，($\forall x$, x は S を充たす) $\Rightarrow P$．この否定は，S を充たすような x で，しかも P を充たさないものが存在する，ということである．したがって ($\exists x$, x は S を充たす) $\Rightarrow \neg P$ となる．

ただ一つの量称記号 $\exists$ を含む場合もまったく同様に証明される．すなわち，($\exists x$, x は S を充たす) $\Rightarrow P$．この否定は，S を充たすどのような x をもってきても，P を充たさない，ということである．したがって ($\forall x$, x は S を充たす) $\Rightarrow \neg P$ となる．

第二段階　あとは量称記号の個数に関する帰納法による．$n-1$ 個の量称記号を合む揚合には証明されたと仮定して，n 個の場合にも成立つことを示せばよい．

この性質は，最初の量称記号が $\forall$ の場合，($\forall x$, x は S を充たす) $\Rightarrow Q$ と書くことができる．Q は $n-1$ 個の量称記号を含む性質である．したがってこの否定は ($\exists x$, x は S を充たす) $\Rightarrow \neg Q$ となる．ところが Q は $n-1$ 個しか量称記号を含まないから，帰納法の仮定により，否定 $\neg Q$ は Q に定理を適用して得られる．よってこの場合にも定理は成立つ．最初の量称記号が $\exists$ の場合も同様である．

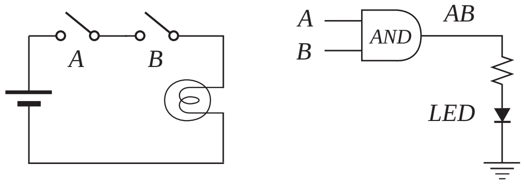
[*18] iff は if and only if を縮めた単語である．



A	B	$A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(a)　(b)

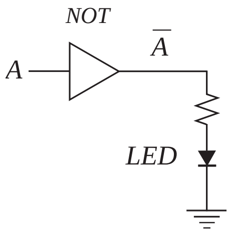
図 1.5　命題『 A または B 』のスイッチによる実現 (a) と信号 A, B についての論理回路：$A+B$ およびその動作表（真理値表）(b).



A	B	AB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(a)　(b)

図 1.6　命題『 A かつ B 』のスイッチによる実現 (a) と信号 A, B についての論理回路：AB およびその動作表（真理値表）(b).



A	$\bar{A}$
0	1
1	0

(a)　(b)

図 1.7　信号 A の否定（逆）についての論理回路：$\bar{A}$ (a) およびその動作表（真理値表）(b).

coffee break

命題の組み合わせは，電気回路のスイッチの組み合わせ回路と対応が付く．さらに，スイッチの動作は，信号を「通す（ある）」か「通さない（ない）」の機能と関係づけられて，ディジタル回路で学ぶ論理演算回路がつくられる．図 1.5 は，OR 回路，図 1.6 は，AND 回路，そして図 1.7 は，NOT 回路を表している．信号 A と信号 B は，0 あるいは 1 の値しか取らない．たとえば，実際の回路ではこれらが 0V と 5V に対応する．ディジタル回路は一つ一つの素子の動作は簡単であるが，たくさん組み合わさった場合に複雑な動作となる．たとえば，3 つの信号 A, B, C を使って，$F = A + B(\bar{A} + \bar{C})$ を作ってみよう．

第 2 章

1 次関数と行列・ベクトル

比例の関係を表す 1 次関数 $y = ax$ は，最も簡単な関数と言える．同時に，この関数は我々にとって最も有用な関数でもある．簡単な関数が有用であるのは理解し易いということで幸運なことである．この章では，1 次関数を多変数の場合に拡張して，その応用を考える．

2.1　1 次関数

2.1.1　比例とその関係式

y が x に比例するとき，その関係式は

$$\frac{y}{x} = a \tag{2.1}$$

と表される．ここに a は比例定数と呼ばれている．式 (2.1) は書き直すと

$$y = ax \tag{2.2}$$

となり，これは y が x の 1 次関数[*1]であることを意味する．

いま，$y = b$ と固定してみると，式 (2.2) は

$$ax = b \tag{2.3}$$

となり，未知数 x についての 1 次方程式となる．もちろん，式 (2.3) の解は $a \neq 0$ の場合

$$x = a^{-1}b \tag{2.4}$$

で与えられる．$a = 0$ の場合は，$b \neq 0$ の場合は解なし，$b = 0$ の場合は任意の実数が解となる[*2]．

【 **問題 2.1.1**】式 (2.3) の解を，式 (2.2) のグラフを描いて説明しなさい．

比例の関係にある物理量は，ありふれている．その一例をあげておこう．

[*1] 線形 (linear) 関数ともいう．

[*2] つまり無限に沢山の解がある．

【例題 2.1.1 オーム (Ohm) の法則】

抵抗素子の電圧 v と電流 i の関係は

$$v = Ri \tag{2.5}$$

で与えられる．これをオーム (Ohm) の法則という．

さて，式 (2.2) の右辺を左辺に移項すれば

$$ax - y = 0$$

となる．y の係数にもパラメータをあたえると，一般に

$$ax + by = 0 \tag{2.6}$$

となる．この関係式は x と y の関係が比例の関係にあることをより一般的に表していると言えよう．つまり，式 (2.6) では独立変数 x，従属変数 y という関係がなくなって両者が対等の関係にある変数となっている．

実は，式 (2.6) の関係式は，関数

$$z = ax + by \tag{2.7}$$

の $z = 0$ の場合を表したものと考えることができる．式 (2.7) は 2 つの独立変数 x，y の関数である．この場合，z は 2 変数 x と y に関する 1 次関数という．

この考え方を一般化して，n 個の変数 x_1，x_2，$\cdots, x_n$ [*3]についての関係式

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \tag{2.8}$$

を考えることができる．z は変数 x_1，x_2，$\cdots, x_n$ についての一次式と呼ばれている．これはまた，z は変数 x_1，x_2，$\cdots, x_n$ について線形であるともいう．

添字変数 x_i を使った利点の一つは，式 (2.8) を次のように「あいまいさ[*4]を含まない式」として書き下せることである．

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i \tag{2.9}$$

ここで独立変数を増やして n 個の変数を使った n 変数関数の考え方にたどりついた．それでは，従属変数の個数を増やした場合はどうなるのであろうか．一番簡単な場合として，独立変数が 1 個 x，従属変数が 2 個 y_1，y_2 の場合を考えてみよう．

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1x \\ y_2 &= a_2x \end{aligned} \tag{2.10}$$

となる．これは，式 (2.2) の比例の関係式を 2 個同時に考えることにほかならない．しかし比例定数 a_1，a_2 は一般に違うので，同じ x に対して y_1 と y_2 は違った値をとることとなる．

[*3] このように変数の個数が多くなると，それぞれの変数を表すのにアルファベットの文字を沢山使わなければならなくなる．こんな場合には，アルファベットの文字数を少なくして，そのかわりに添字をつけた変数で表すと便利である．

[*4] 式 (2.8) に含まれている記号 $\cdots$ は，この式をみる人が自然に推論する結果を期待した書き方といえる．

次に，独立変数を 2 個に増やしてみよう．

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1x_1 + b_1x_2 \\ y_2 &= a_2x_1 + b_2x_2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

となる．この関係式は各比例定数を同じ文字で表し，そのかわりに添字を 2 個に増やして書き表すと分かりやすくなる．すなわち

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

と表すとよい．ここで a_{11} は a eleven ではなく，a one one を表す．すなわち添字は 2 個付いている．

【例題 2.1.2 鶴亀算】

鶴が x_1 尾，亀が x_2 匹いる．鶴と亀の個体数の和を y_1，足の数の和を y_2 とする．y_1，y_2 と x_1，x_2 との関係式を求めよ．

【解】

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= 2x_1 + 4x_2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

【 問題 2.1.2】　1 個 30 円のみかんを x_1 個，150 円のりんごを x_2 個，80 円のオレンジを x_3 個買った．買った果物の総数を y_1，払ったお金を y_2 として，式をたてなさい．

【 問題 2.1.3】　横軸を x 軸，縦軸を y 軸とする 2 次元平面の 1 点を $(a,\ b)$ とする．この点を原点を中心にして角度 θ だけ回転させた．回転させた後の座標を $(c,\ d)$ とする．$(c,\ d)$ と $(a,\ b)$ の関係式を求めよ．

【 問題 2.1.4】　ある家庭の 1 ヶ月の収入は，3 人の家族の給料 x_1，x_2，x_3 円であり，支出は 8 項目 $y_1, \cdots, y_8$ 円であったという．また，この家庭では，収支残高 z 円はすべて貯金するという．それぞれの変数の間に成り立つ関係式を求めよ．

【 問題 2.1.5】　電気回路では，素子をはんだで接続した点において，流れ込む電流と流れ出す電流を足し合わせると常に零になっている．これをキルヒホッフの電流法則という．流れ込む電流を i_1，$\cdots$，i_m，流れ出す電流を j_1，$\cdots$，j_n とすると，どんな式が成り立つか．

2.1.2　行列とベクトルを使った表示

式 (2.12) を再び書いておこう．

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

この関係式は一組の変数 $(x_1,\ x_2)$ を他の変数 $(y_1,\ y_2)$ に写す（変換する）**写像** (mapping) [*5]とみることができる．この写像を特徴づけるのは，4 個のパラメータ a_{ij} である．すなわち，a_{ij}

[*5] 写像は関数を一般化した用語で多変数間の関数関係を表す場合に用いられる．

の並び

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

を与えると，式 (2.14) は完全に決定されてしまう．式 (2.15) は数を正方形状に並べたものである．一般に，数を長方形状に並べたものを**行列** (matrix) といい，その各々の数 a_{ij} を行列の**成分** (element) という．

行列の横の数の並びを**行** (row)，縦の並びを**列** (column) という．行は上から順に第 1 行，第 2 行，$\cdots$ といい，列は左から順に第 1 列，第 2 列，$\cdots$ という．

行列は，その行の行数と列の列数によって，その型が区別される．たとえば

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

は，それぞれ 1 行 2 列の行列，2 行 1 列の行列，2 行 2 列の行列，2 行 3 列の行列である．これらは簡単に，1×2 行列，2×1 行列，2×2 行列，2×3 行列ともいう．一般に m 行 n 列の行列を $m \times n$ 行列という．

特に，行数と列数が等しい $n \times n$ 行列を，n 次の**正方行列** (square matrix) という．式 (2.15) は 2 次の正方行列である．また，1 行だけからできている行列を**行ベクトル** (row vector)，1 列だけからできている行列を**列ベクトル** (column vector) という*6.

最後に，1×1 行列は，単に通常の数である．これを行列と区別して呼ぶときは**スカラー** (scalar) という．

行列とベクトルを使って，式 (2.15) は次式のように表すことができる．

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

そこで，今それぞれのベクトルや行列に次のような名前をつけて表すことにしよう．

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

すると，式 (2.16) は簡単に次式のように表すことができる．

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{2.18}$$

この式を，最初の 1 次関数の式 (2.2) と比較してほしい．その類似性に驚くであろう．このように n 個の変数に関する m 個の 1 次同次式を「ひとまとめに」考える道具として行列やベクトルを使い，1 次関数の性質を整理するのが**線形代数** (linear algebra) と呼ばれる数学である．

ここで問題となることは，行列やベクトルの間の計算のルールがどうなっているのかということである．次にこれを定義しよう．

---

*6 この講義では，列ベクトルつまり縦長の $n \times 1$ 行列を単に「ベクトル」，行ベクトルをくだけた言い方で「横長ベクトル」ということにする．

2.1.3　行列の和・差と積

行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ が同じ型であって，かつ，その対応する成分がそれぞれ等しいとき，$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は**等しい**といい，$\mathbf{A} = \mathbf{B}$ と書く．

成分がすべて零の行列を**零行列** (zero matrix) という．また，n 次の正方行列で左上から右下への対角線上の成分がすべて 1 で，その他の成分がすべて 0 の行列を，n 次の**単位行列** (identity matrix, unit matrix) をいう．単位行列は通常 $\mathbf{E}$ や $\mathbf{I}$ と書く．特に n 次であることを示す必要のあるときは，$\mathbf{I}_n$ のように添字を付して書く．たとえば，

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

は，それぞれ 2 次および 3 次の単位行列である．

行列の和・差や積については，高校の「数学 C」で一通り勉強しているであろう．ここではそれらのルールを 2×2 の行列を例にして，表 2.1 にまとめておく．

【 問題 2.1.6】　**例題 2.1.1** および **2.1.2** で出てきた 1 次同次式をすべて行列とベクトルを用いて書き直しなさい．

【 問題 2.1.7】　次の行列の積を計算しなさい．

1. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

【 問題 2.1.8】　次の行列について表 2.1 の最後の 4 つの積の関係が正しいことを計算によって

表 2.1　行列の演算表.

演算の名前	内　容
和・差	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{bmatrix}$
スカラー倍	$k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$
積	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{bmatrix}$
積のルール	$k(\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}) = k(\mathbf{AB})$ $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
逆行列	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

確かめなさい．

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

2.1.4　ブロック行列

行列のブロック行列への分解

行列

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

をよく見てほしい．この行列は，つぎの行列

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

を 4 個くりかえし使って

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

のようにして作られた行列とみることもできる．このように，行列を適切な型の行列から作られた行列[*7]とみなすことを，**ブロック行列** (block matrix) に分解する，あるいはブロック行列から作られているという．

ブロック行列を考えると，通常の行列を色々なブロックに分解して扱うことができる．このことは行列の積演算を行う際に見通しをよくすることがある．したがって，ブロックで考えることに慣れておくと便利である．

特に，行列を列ベクトルや行ベクトルに分解して考えることがよくある．行列

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

を例にとってこの分解を行ってみよう．m 個の列ベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

[*7] 行列の各成分が，実は行列であったと考えてもよい．すなわち，入れ子になった行列とみることもできる．

と n 個の行ベクトル

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^1 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}^2 &= \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \end{bmatrix} \\ &\cdots \\ \mathbf{a}^n &= \begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.21}$$

を用いて，行列 $\mathbf{A}$ は次のようにブロック行列に分解して書くことができる．

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

2×2 行列の固有値と固有ベクトル

ブロック行列に分解して考えると整理できる例を一つあげておこう．いま，2×2 行列

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

が 2 つのベクトル

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

と 2 つの異なるスカラー λ_1，λ_1 を用いて，次の関係式を満たしていたとしよう．

$$\mathbf{A}\mathbf{h}_1 = \lambda_1 \mathbf{h}_1, \quad \mathbf{A}\mathbf{h}_2 = \lambda_2 \mathbf{h}_2 \tag{2.25}$$

このとき，ベクトル $\mathbf{h}_1$，$\mathbf{h}_2$ を行列 $\mathbf{A}$ の**固有ベクトル** (eigen vector)，スカラー λ_1，λ_2 を行列 $\mathbf{A}$ の**固有値** (eigen value) という．

さて，式 (2.25) をブロック行列を用いて一つの式に書き直すことを考える．右辺と左辺のベクトルを並べて書くと次式となる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{h}_1 & \mathbf{A}\mathbf{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{h}_1 & \lambda_2 \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

そこで，この式の右辺と左辺は行列の積を使って次のように書くことができる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{h}_1 & \mathbf{A}\mathbf{h}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{h}_1 & \lambda_2 \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

したがって，式 (2.26) は次式となる．

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

最後に，2 つの列ベクトルからなるブロック行列を 2×2 行列

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

と定義し，式 (2.28) を書き直すと次式となる．

$$\mathbf{AH} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

2.2　連立 1 次方程式

2.2.1　2 元連立 1 次方程式

2 つの未知数 x_1，x_2 を持つ一般の**連立 1 次方程式** (linear equation)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{2.31}$$

を解いて，解の公式を作ろう．ここで，未知数以外の数は与えられた数とする．

まず，式 (2.31) の第 1 式に a_{22} を掛け，第 2 式に a_{12} を掛けて引くと次式を得る．

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \tag{2.32}$$

同様にして，式 (2.31) の第 2 式に a_{11} を掛け，第 1 式に a_{21} を掛けて引くと次式を得る．

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \tag{2.33}$$

したがって，$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ の場合には，これらの 2 つの方程式から解

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{2.34}$$

が求められる．しかも，この計算から解はただ 1 つであることも分かる．これが式 (2.31) の解の公式である．

なお，$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ の場合には，解がなかったり，あるいは無限に多くの解があったりする．このことについては，後で考えることにしよう．

解の公式 (2.34) は，行列

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

から作られる**行列式** (determinant) と呼ばれる数 $\det \mathbf{A}$ を用いるとたやすく覚えられる．すなわち，数 $\det \mathbf{A}$ は次式で定義される．

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2.36}$$

そこで解の公式 (2.34) は，行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2, \ \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \tag{2.37}$$

を使って，次式のように表すことができる．

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{2.38}$$

【 問題 2.2.1】　**例題 2.1.2** で出てきた鶴と亀の個体数の和，および足の総数をあなたの好きな数に定め，鶴と亀の数を計算しなさい．

【 問題 2.2.2】　次の方程式は，ある電気回路の電流 I_1, I_2 に関する連立方程式である． I_1, I_2 を計算しなさい．

$$(R_1 + R_3)\, I_1 + R_3 I_2 = E_1$$

$$R_3 I_1 + (R_2 + R_3)\, I_2 = E_2$$

幾つかの注意を述べておこう．

注意 1　行列 (2.35) とベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

を使って，最初の連立方程式 (2.31) は次式と書くことができる．

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{2.40}$$

注意 2　行列 $\mathbf{A}$ の**逆行列** (inverse matrix) $\mathbf{A}^{-1}$ を，性質

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_2 \tag{2.41}$$

を持つ行列で定義する．$\det \mathbf{A} \neq 0$ ならば，$\mathbf{A}^{-1}$ が存在し，

$$\mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

と計算できる．

注意 3　式 (2.40) の両辺に左から逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ 掛けると

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = (\det \mathbf{A})^{-1} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

となって，解の公式 (2.34) をベクトルで表した公式を得る．

注意 4　解の公式 (2.38) はクラーメル (Cramer) の公式を呼ばれている．

2.2.2　行列式

行列式は，高校の数学では習わなかった新しい考え方の一つである．もっとも 2×2 行列の逆行列を求める際に，各成分の分母に既に使ってはいた．それを行列式と教えられなかったのは，たぶん行列式の定義がややっこしいからであろう．

ここで改めて行列式について幾つかの事柄を述べておこう．まず，次のことを注意する．

注意 1　行列式は数である．行列のように「数を並べた表」ではなく，行列から「一定のルールに従って作った数」である．

注意 2　行列式は，正方行列にしか定義されていない．

注意 3　2×2 や 3×3 の正方行列では，行列式は比較的簡単に計算できる．しかし，次数 n の正方行列に対応した行列式は n 個の成分の積を $n!$ 個加えたものとなり，次数 n が大きくなると計算が非常に煩雑となる．

我々の応用から考えると，2×2 と 3×3 の正方行列についての行列式が計算できれば十分であり，それ以上の次数の行列に関する行列式の計算が必要となった場合には計算機を利用すればよいであろう．したがって，ここでは 2×2 と 3×3 の正方行列についての行列式の定義を与えることで満足することにしよう．

2×2 の行列式の定義

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2.44}$$

3×3 の行列式の定義

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned} \tag{2.45}$$

この公式は，よく見ていると次のようにも書ける．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{2.46}$$

これらの「積和のルール」は図 2.1 のようになっている．この図のルールを覚えておくと便利である．

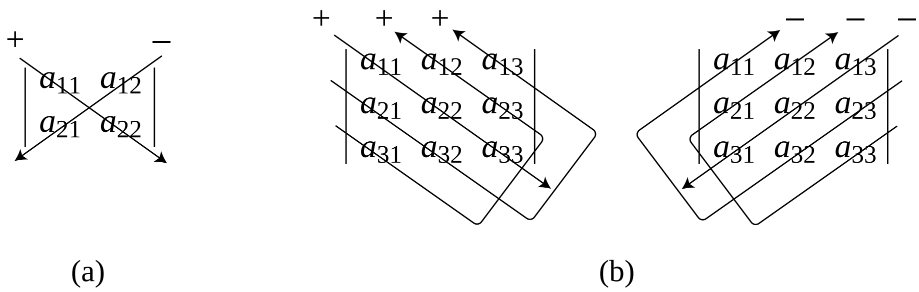


図 2.1　積和のルール．

【問題 2.2.3】　次の行列式を計算しなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 5 & 2 & 8 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

行列式の幾つかの性質

性質 1　行と列を入れ換えても行列式の値は変わらない．すなわち

$$\left|\mathbf{A}^t\right| = |\mathbf{A}| \tag{2.47}$$

ここに，$\mathbf{A}^t$ は行列 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ の行と列を入れ換えた行列 $\mathbf{A}^t = [a_{ji}]$ を表す．この $\mathbf{A}^t$ を行列 $\mathbf{A}$ の**転置行列** (transposed matrix) という．

性質 2　任意の 2 つの行（または列）を入れ換えると，行列式はその符号だけが変化する．たとえば

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2.48}$$

性質 3　2 つの行（あるいは列）の等しい行列式は 0 である．たとえば

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.49}$$

性質 4　行列式の 1 つの行（あるいは列）の各成分を a 倍すれば，行列式の値も a 倍になる．たとえば

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ ab_1 & ab_2 & ab_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2.50}$$

性質 5　行列式の 1 つの行（あるいは列）の各成分が 2 つの数の和で表されている場合，この行列式は和の各項を成分とする 2 つの行列式の和に等しくなる．たとえば

$$\begin{vmatrix} a_1+d_1 & a_2+d_2 & a_3+d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2.51}$$

性質 6　行列式の一つの行に a を掛けて，これを他の行に加えても行列式の値は変わらない．たとえば

$$\begin{vmatrix} a_1+ac_1 & a_2+ac_2 & a_3+ac_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2.52}$$

性質 7

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.53}$$

【問題 2.2.4】　次の行列式を計算しなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

2.2.3　3 元連立 1 次方程式

3 つの未知数 x_1，x_2，x_3 を持つ一般の**連立 1 次方程式** (linear equation)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{2.54}$$

の解は次式で与えられる．これをクラーメル (Cramer) の公式という．

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\ x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \tag{2.55}$$

これは，たとえば x_1 について考えると，次の行列式の計算から求められる．

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

【問題 2.2.5】　次の連立方程式を解きなさい．

1. $$4x + y + z = 2,\ 2x + 5y + 4z = 1,\ 3x + 2y + 6z = 3 \tag{2.56}$$

2. 次の方程式は，ブリッジ回路を流れる電流 I_1, I_2, I_3 についての回路方程式である．恐らく手計算としては最も煩雑な計算を必要とする問題の一つでしょう．電流 I_1, I_2, I_3 を求めて下さい．

$$\begin{aligned} (R_1 + R_3 + R_5)\,I_1 - R_5 I_2 - R_3 I_3 &= 0 \\ -R_5 I_1 + (R_2 + R_4 + R_5)\,I_2 - R_4 I_3 &= 0 \\ -R_3 I_1 - R_4 I_2 + (R_3 + R_4 + R_6)\,I_3 &= E \end{aligned} \tag{2.57}$$

2.3　ベクトルと行列の幾何学的意味

2.3.1　内積の定義

ベクトルの「長さ」や 2 つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の間の「角度」とはどのように決められるのであろうか．これらは，内積と呼ばれるベクトルどうしの関係によって定められる．そこで，まずベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積を次式で定義する．

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \tag{2.58}$$

この関係式は，行列の積[*8]の演算を用いて書くと次式のように表すこともできる．

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \tag{2.59}$$

内積によって定められている定義を幾つかあげておこう．

定義 1　ベクトル $\mathbf{a}$ の長さ $\|\mathbf{a}\|$ は「 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{a}$ の内積の平方根」で定義される．

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \tag{2.60}$$

定義 2　2 つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の間の「角度 θ」は，次式で定義される．

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \tag{2.61}$$

[*8] 行列の積には何も書かない．すなわち，行列 $\mathbf{A}$ と行列 $\mathbf{B}$ の積は，単に $\mathbf{AB}$ と書く．

定義 3 2 つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は，内積が零：

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0 \tag{2.62}$$

となるとき**直交** (orthogonal) するという．

内積は，つぎの性質を持っている．

性質 1

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a} \tag{2.63}$$

性質 2

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \bullet \mathbf{c} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{c} + \mathbf{b} \bullet \mathbf{c} \tag{2.64}$$

性質 3 α をスカラーとすると

$$(\alpha\mathbf{a}) \bullet \mathbf{b} = \mathbf{a} \bullet (\alpha\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \tag{2.65}$$

性質 3 $\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}$ は

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 \geq 0 \tag{2.66}$$

であるから，零または正であり，零となるのは

$$a_1 = 0 \quad \text{かつ} \quad a_2 = 0,\ \text{すなわち}\ \mathbf{a} = 0 \tag{2.67}$$

のときに限られる．

2.3.2 ベクトルの住んでいる空間

ここでは，スカラーやベクトルそれに行列の成分はすべて実数[*9]として話をする．

スカラーである実数は 1 次元の住民，成分を 2 つ持つ 2×1 の列ベクトルは 2 次元の住民である[*10]．一般に，成分を n 個持つ $n \times 1$ の列ベクトルは n 次元の住民である．話を簡単にするために 2 次元の場合を考えよう．

数直線

実数 x は直線上の一点として表すことができる．これは，直線を 1 本引いて $\mathbf{R}$ と呼ぶことにし，次の基準を設定して考える．

- まず，この直線上に原点 O を定める．
- 原点から好きな方向[*11]に長さ 1 の点を取り，これを基準とする．すなわち，原点から 1 に向かって長さ 1 のベクトル $\mathbf{e}$ を直線上に描く．

こうすると，任意の実数 x は，直線上の点 $x\mathbf{e} \in \mathbf{R}$ として表すことができる．図 2.2 を参照．

[*9] 複素数については後ででてくる．

[*10] 成分を 2 つ持つ 1×2 の行ベクトルも 2 次元の住民であるが，ここでは列ベクトルに注目して話をすすめる．同じ話は行ベクトルについてもいえる．行ベクトルは，2 次元平面の点である列ベクトルをスカラーに写す関数達と考えるといいであろう．

[*11] 原点をはさんで右か左かどちらかに決める．普通は右の方に選ぶ．

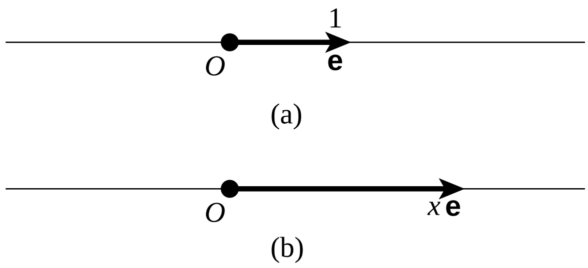
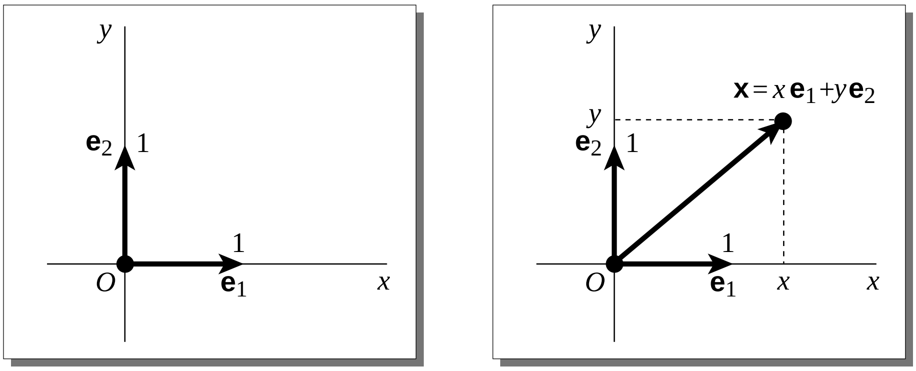


図 2.2　直線上の基底 (a) と点 x (b).



(a)　(b)

図 2.3　平面上の基底 (a) と点 x (b).

2 次元平面

平面上の点を指定しようとすると，2 つの実数の組が必要となる．地図を想像してほしい．現在地を中心に考えると東西方向へ x，南北方向へ y と指定すると番地が 1 点に定まる．

さて，平面を 1 枚用意しよう．これに，直線の時と同様に基準を 1 つ決めよう．

- まず，平面上に原点 O を定める．
- 原点から，好きな方向に長さ 1 のベクトル $\mathbf{e}_1$ を描く．ベクトル $\mathbf{e}_1$ を原点を中心に「反時計回りに 90° 回転」させたベクトルを作って，これを $\mathbf{e}_2$ とする[*12].

こうすると，任意の実数の組 $(x,\ y)$ は，この平面上の 1 点として表すことができるようになる．これを示そう．いま，簡単のため，ベクトル $\mathbf{e}_1$ 方向を x 軸，ベクトル $\mathbf{e}_2$ 方向を y 軸と呼ぶことにする．図 2.3 を参照.

これだけの準備のもとに，成分を 2 つ持つ 2×1 の列ベクトルでこの平面上の点を表すことに

---

*12 実は，この表現には数学的におおいに問題がある．したがって数学の本では，決してこんな言い方をしてない．「反時計回り」や「回転」の意味が定義されていないこと，それになぜ 90° でなければばならないのか，など疑問だからである．考え方がつかめたらこれらを排除したより抽象的な言い方にチャレンジするといいであろう．ヒントは，内積を定義しておかないとこれらの議論ができないということである．

しよう．平面を $\mathbf{R}^2$ と呼ぶことにし，

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2 \tag{2.68}$$

と書くと，ベクトル $\mathbf{x}$ は，x 軸方向の成分が a，y 軸方向の成分が b であることを表す．また，$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ は，$\mathbf{x}$ が平面 $\mathbf{R}^2$ の要素である（あるいは，平面に属する）ことを表す．

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

である．これら 2 つのベクトルの集合 $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$ を，この平面の**直交基底** (orthogonal base) という[*13]．

そこで，平面上の任意の点 $\mathbf{x}$ は，次のように基底ベクトル達によって表すことができる．

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \tag{2.70}$$

2.3.3 ベクトルの独立性

平面 $\mathbf{R}^2$ の任意の点 $\mathbf{x}$ は原点から $\mathbf{x}$ に引かれたベクトルで表される．このベクトルも $\mathbf{x}$ で表される．さて，スカラー $\alpha \in \mathbf{R}$ を用いてベクトル $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ を考えると，ベクトル $\mathbf{y}$ は $\mathbf{x}$ 方向に正負に延びるベクトル達の集合となる．この事実を色々な言い方で説明することがあるので，それらの幾つかをあげておこう．

注意 1　ベクトル $\mathbf{x}$ からベクトル $\alpha\mathbf{x}$ を作ることを，$\mathbf{x}$ の**スカラー倍** (scalar product) という[*14]．

注意 2　ベクトル $\mathbf{x}$ と，$\mathbf{x}$ のスカラー倍で作ったベクトル $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ は，互いに**線形従属** (linear dependent) あるいは一次従属の関係にあるという．

- 「ベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ が線形従属にある」$\Leftrightarrow$「$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \mathbf{0}$ を満たす，零ではない α，β がある」
- 「ベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ が線形従属にある」$\Leftrightarrow$「$\det[\mathbf{x}\ \mathbf{y}] = 0$」[*15]

注意 3　次に，互いに線形従属にないベクトルを 2 つ考える．これらをベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ としよう．このとき，次のような言い回しに注意しよう．等価な条件が色々あることにも注意しよう．

- 「$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は線形従属でない」$\Leftrightarrow$「$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は**線形独立**である」
- 「$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は線形独立である」$\Leftrightarrow$「$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0,\ \beta = 0$」
- 「$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0,\ \beta = 0$」$\Leftrightarrow$「$\det[\mathbf{x}\ \mathbf{y}] \neq 0$」

[*13] $\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_2 = 0$ となっている．これは，式 (2.69) から確かめられる．
[*14] スカラー倍，すなわち，「積」という言葉がでてくるので注意しよう．演算としての積を考える場合，どういうオブジェクトを掛け合わせてどういうオブジェクトが生成されるかに注意しなければ，「積」の違いが理解できない．
[*15] この条件は 2 次元特有の条件である．

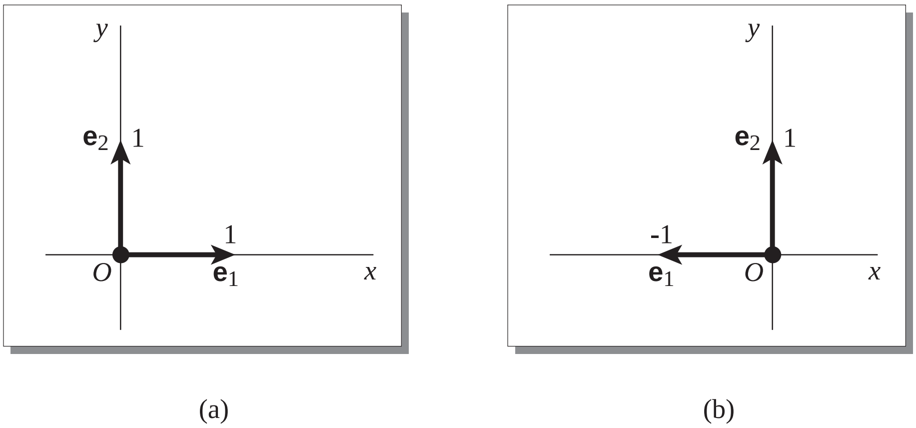


図 2.4　平面上の基底・表 (a) と裏 (b).

- 「$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は線形独立である」$\Leftrightarrow$「$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は，平面 $\mathbf{R}^2$ を張る」
  すなわち，平面 $\mathbf{R}^2$ の任意の点 $\mathbf{u}$ は，ベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ を使って
  $$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$$
  と表すことができる．ここに，$\alpha, \beta \in R$ である．$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ のスカラー倍の和から新しいベクトルを作ることを $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ を線形結合するという．

2.3.4　2 次元平面の表と裏

一般に**空間の向き** (orientation) を理解することはやっかいである．2 次元平面の向きは，表あるいは裏などとも呼ばれる．また，3 次元空間では，右手系とか左手系とか呼ばれたりする．空間は，一つの基底を定義し，これによる座標系を与えた瞬間に向きが定義されたことになる．

ここでは，最も常識的に，先に定義した直交基底 (2.69) を用いて平面の向きを考えることにする．今，図 2.4(a) の基底を定めて，これを平面の「表」と考える．すると，この平面を「裏」からみると図 2.4(b) の基底となる．つまり，裏は図 2.4(b) の基底を持つ．あるいは，基底を図 2.4(b) のように取った平面は，基底を図 2.4(a) のように定めた平面に対して，裏であると言える．また別の言い方をすれば，図 2.4(a) の y 軸上に鏡を垂直に立てて鏡に映った平面をみると基底は図 2.4(b) の基底となっている．したがって，鏡に映すと裏がみえるといえる．一般に，鏡に映す変換を鏡映という．ある基底の鏡映変換した基底は裏となる．なお，図 2.4(b) の基底ベクトル $\mathbf{e}_1$ に -1 を付したのは，裏を表からみると -1 となるということを意味する．

以上の話をまとめると次のように言える．

基底の分類 1　直交基底 (2.69) で用いたベクトル $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ を用いて考えられる基底としては次の 2 種類が考えられる．

- 集合 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ および集合 $\{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2\}$：これらは「表」を表す基底を意味する．いずれも $\det[\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2] = 1$ および $\det[-\mathbf{e}_1\ -\mathbf{e}_2] = 1$ となって，行列式が正となっている．

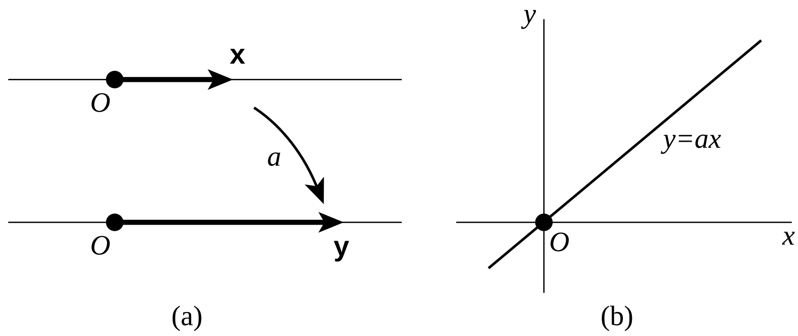


図 2.5 関数 a (a) とそのグラフ (b).

- 集合 $\{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ および集合 $\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2\}$ ：これらは「裏」を表す基底を意味する．いずれも $\det[-\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2] = -1$ および $\det[\mathbf{e}_1\ -\mathbf{e}_2] = -1$ となって，行列式が負となっている．

基底の分類 2 基底は順序のついた一次独立なベクトルで表される．順序の付いた集合 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ を「表」の基底と考えると，集合 $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}$ を基底とする座標系は「裏」となる．この場合も $\det[\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2] = 1$ および $\det[\mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_1] = -1$ となっている．集合 $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}$ は，集合 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ と鏡映の関係にあることに注意しよう．

2.3.5 直線を直線に写す 1 次関数

さて，式 (2.2)

$$y = ax \tag{2.71}$$

を幾何学的にみてみよう．独立変数 x は 1 次元直線上の点であり，従属変数 y は，別の直線上の点と考えられる．点 x を与えると a 倍して点 y が決まる．図 2.5(a) 参照．2 つの直線を別々に描くと関係が見えないので，2 つの直線を直交させて描いた平面を作る．すると図 2.5(b) のように 1 次関数は「関数のグラフ」としてみえてくる．

次に，方程式

$$ax = b \tag{2.72}$$

を解く問題を，このグラフを使って考えよう．式 (2.72) の解は， 2 つの直線

$$y = ax, \quad y = b \tag{2.73}$$

の交点として求められる．図 2.6(a) 参照．$a \neq 0$ ならば確かに答えはただ一つ $x = \dfrac{b}{a}$ となる．

では，例外の $a = 0$ の場合はどうであろうか．直線 $y = 0x$ は，x 軸である．直線 $y = b$ が「 x 軸に平行な直線」なので

- $b \neq 0$ ならば，交点は無く，したがって解は存在しない．
- $b = 0$ ならば，2 直線は共に x 軸となり，重なってしまうので，任意の x は解となる．つまり，無限に多くの解がある．

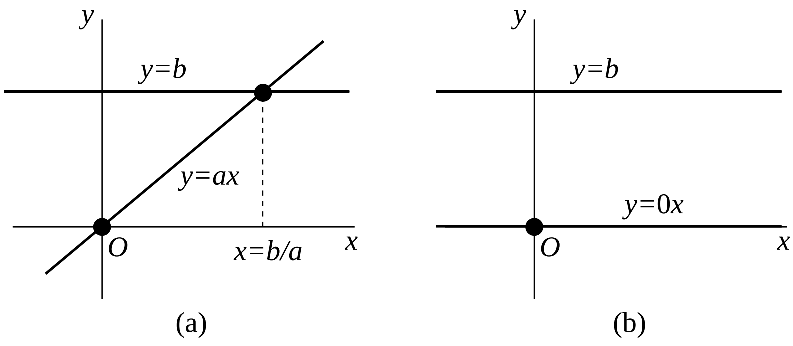


図 2.6　2 つの 1 次関数 (a) と a=0 の場合 (b).

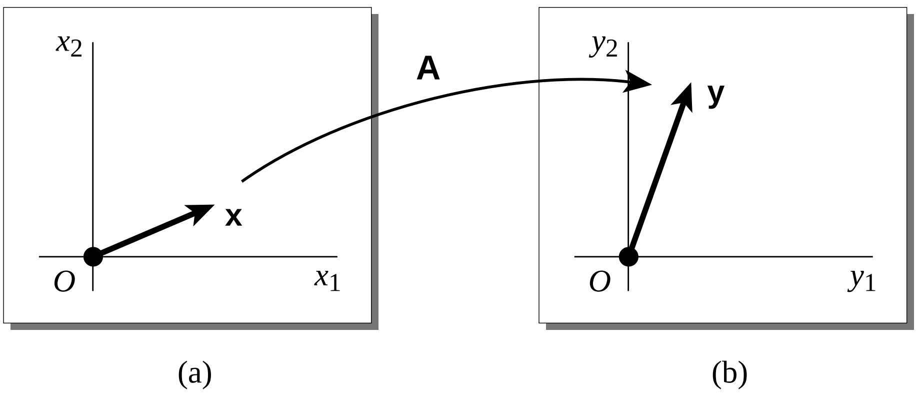


図 2.7　平面から平面への写像 A.

ことが分かる．図 2.6(b) 参照.

このように，幾何学的にみると解の存在する条件や解の様子が鮮明にみえてくる.

2.3.6　平面を平面に写す 1 次写像

さっそく，式 (2.18) を考えよう．もう一度書いておくと

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{2.74}$$

ここで，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は，別々の 2 次元平面のベクトルを表す．すると，$\mathbf{A}$ は 2 次元平面から 2 次元平面への 1 次写像を与える．たとえば，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \ \Rightarrow\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

を図 2.7 に示す．この写像のグラフは，4 次元空間にしか描けないのでイメージすることは難しい.

$$y_1 = x_1 - x_2,\ y_2 = x_1 + x_2$$

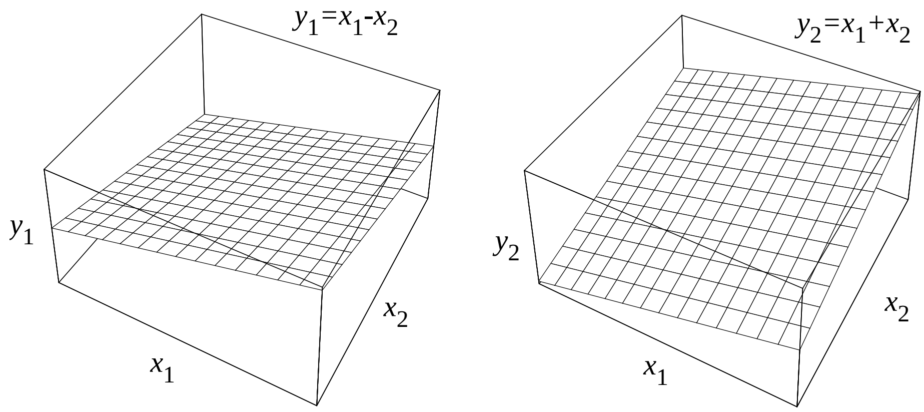


図 2.8　1 次関数の作る関数平面.

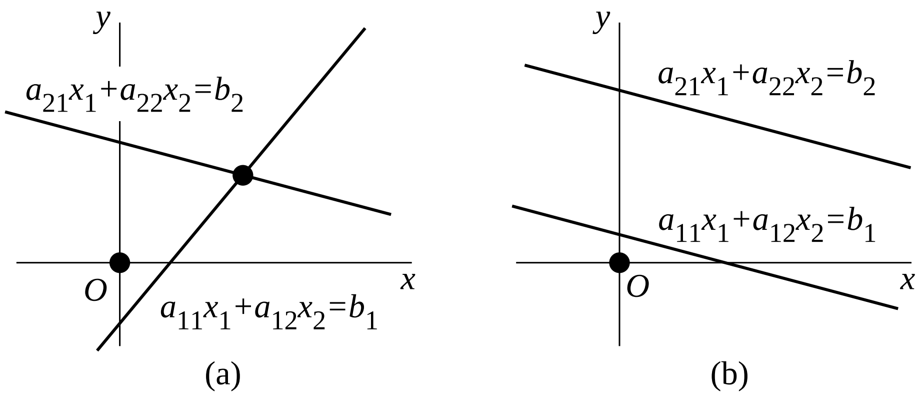


図 2.9　2 つの関数の満たす集合.

の 1 つづつは，3 次元空間 $(x_1,\ x_2,\ y_1)$ や $(x_1,\ x_2,\ y_2)$ での平面として描くことができる．図 2.8 参照.

そこで，連立方程式 (2.31):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{2.75}$$

の解の様子を幾何学的にみてみたい．2 つの 2 次元平面 $(x_1,\ x_2)$，$(y_1,\ y_2)$ を同時にみることはできないので 2 次元平面 $(x_1,\ x_2)$ 内で式 (2.75) の 1 つ 1 つの式が満たす集合をみることにしよう．

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

は，いずれも直線となる．図 2.9 参照．この 2 つの直線の交点として解が求められる．次の場

合が考えられよう．ここで

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_2 = 0 \;\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

という性質に注意しよう．

- $\det \mathbf{A} \neq 0$ ならば，2 直線は傾きが異なるので 1 点で交わる．つまり，解はただ一つである．図 2.9(a) 参照.
- $\det \mathbf{A} = 0$ ならば,

  場合 1　$b_1 \neq kb_2$ ならば，2 本の平行な直線となるので，解は存在しない．図 2.9(b) 参照.

  場合 2　$b_1 = kb_2$ ならば，2 つの直線は重なって 1 本になるので，解は無限個存在する．

ここでの話は，おおざっぱであったが

- ベクトルは空間の点,
- 行列は「ベクトルの住む 1 つの空間からもう 1 つのベクトル空間」への 1 次写像

を表すと考えると，おもしろくなる．行列が正方行列の場合， 1 つのベクトル空間から自分自身のベクトル空間への写像と考えることもできる．この場合は，写像と言わずに**変換** (transformation) という．ベクトルと写像の物語が「線形代数」と言える．

2.3.7　平面を平面に写す写像の微分

2 次元平面 $(x_1,\ x_2)$ から 2 次元平面 $(y_1,\ y_2)$ への一般的な写像は

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1,\ x_2) \\ y_2 &= f_2(x_1,\ x_2) \end{aligned} \tag{2.76}$$

で表すことができる．座標 x_1，x_2 をそれぞれ dx_1，dx_2 だけ変化させたとき，座標 y_1，y_2 の変化を dy_1，dy_2 とすれば，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} dy_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2 \\ dy_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2 \end{aligned} \tag{2.77}$$

式 (2.77) を 1 つの式にまとめて書くと，次式となる．

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} \tag{2.78}$$

このことは，写像の一次近似が各成分の一次の変化項の和で表され，まとめると変化の割合は行列となることを表している．このことから「一般に，多変数関数の微分は行列となる」と言いえよう．

2.3.8　2×2 行列の固有値と固有ベクトル—再考—

2.1.4 で考えた 2×2 行列 $\mathbf{A}$ の固有値と固有ベクトルの問題を再び考えよう．いま，

$$\mathbf{A}\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h} \tag{2.79}$$

を満たす，ベクトル $\mathbf{h}$ とスカラー λ があると考えて，まずこれらを求めよう．式 (2.79) を書き直すと次式となる．

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2)\,\mathbf{h} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.80}$$

この方程式が零でない解をもつためには，

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{2.81}$$

でなければならない．したがって，λ はつぎの 2 次方程式の解でなければならない．

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \tag{2.82}$$

そこで，ここでは最も簡単な場合として，この 2 次方程式が相異なる 2 実解 λ_1，λ_2 をもつ場合を考えよう．λ_1 を式 (2.80) に代入して，$\mathbf{h}_1$ として，たとえば次のベクトルを得る[*16]．

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} \end{bmatrix} \tag{2.83}$$

同様にして，λ_2 についても次の固有ベクトル $\mathbf{h}_2$ を得る．

$$\mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \lambda_2 - a_{11} \end{bmatrix} \tag{2.84}$$

これらの固有ベクトルを用いて，行列

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} & \lambda_2 - a_{11} \end{bmatrix} \tag{2.85}$$

を定義し，座標変換

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{y} \tag{2.86}$$

を考えると，

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{y} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

[*16] 固有ベクトルは唯一のベクトルとして定めることはできない．ある固有ベクトルをスカラー倍したベクトルは，すべて固有ベクトルとなる．

より，次の関係を得る．

$$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{AHy} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{y} \tag{2.87}$$

そこで，元々ベクトル $\mathbf{y}$ はどんなベクトルでもよいので

$$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{AH} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{2.88}$$

の関係を得る．すなわち，ベクトル $\mathbf{y}$ の住んでいる空間では行列 $\mathbf{A}$ は $\mathbf{H}^{-1}\mathbf{AH}$ となり，対角行列となる．行列 $\mathbf{A}$ を行列 $\mathbf{H}$ を用いて $\mathbf{H}^{-1}\mathbf{AH}$ と変換することを，行列の**相似変換** (similar transformation) という．

以上の結果は，行列を対角行列に相似変換するには固有ベクトルを用いるとよいことを示している．

2.4　連立 1 次方程式の解の重ね合わせ

連立方程式

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{2.89}$$

を考え，この方程式の解を $\mathbf{x}_b$ としよう． すなわち

$$\mathbf{Ax}_b = \mathbf{b} \tag{2.90}$$

さて，右辺の定数ベクトルを適当に 2 つのベクトルに分解したとしよう．すなわち

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \tag{2.91}$$

とする．そして，この分解されたそれぞれの定数ベクトルを右辺に持つ方程式

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b}_2 \end{aligned} \tag{2.92}$$

を考え，それぞれの方程式の解を $\mathbf{x}_{b1}$，$\mathbf{x}_{b2}$ としよう．すなわち

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax}_{b1} &= \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{Ax}_{b2} &= \mathbf{b}_2 \end{aligned} \tag{2.93}$$

このとき，3 つの解 $\mathbf{x}_b$，$\mathbf{x}_{b1}$，$\mathbf{x}_{b2}$ の間には次の関係がある．

$$\mathbf{x}_b = \mathbf{x}_{b1} + \mathbf{x}_{b2} \tag{2.94}$$

これを，**解の重ね合わせ** (superposition) あるいは**重ね合わせの理** (law of superposition) という．

実際，

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{x}_{b1} + \mathbf{x}_{b2}\right) = \mathbf{Ax}_{b1} + \mathbf{Ax}_{b2} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \mathbf{b} \tag{2.95}$$

となって，$\mathbf{x}_{b1}+\mathbf{x}_{b2}$ は確かに元の方程式 (2.89) の解となっている．

【例題 2.4.1】

ある回路から次の方程式を得た．

$$\begin{aligned} Ri+v &= E \\ i-Gv &= J \end{aligned} \tag{2.96}$$

ただし，i, v が未知数であり，他の記号はすべて既知の値であるものとする．i, v を求めよ．

【解】クラーメルの公式を使って解くことにしよう．

$$\Delta = \begin{vmatrix} R & 1 \\ 1 & -G \end{vmatrix} = -(1+RG) \tag{2.97}$$

より，解は次式となる．

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} E & 1 \\ J & -G \end{vmatrix} = \frac{GE+J}{1+RG} \\ v &= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} R & E \\ 1 & J \end{vmatrix} = \frac{E-RJ}{1+RG} \end{aligned} \tag{2.98}$$

次に，方程式 (2.96) を

$$\begin{aligned} Ri+v &= E \\ i-Gv &= 0 \end{aligned} \tag{2.99}$$

と

$$\begin{aligned} Ri+v &= 0 \\ i-Gv &= J \end{aligned} \tag{2.100}$$

に分解して解いてみよう．式 (2.99) の解は

$$i = \frac{GE}{1+RG},\ v = \frac{E}{1+RG} \tag{2.101}$$

また，式 (2.100) の解は

$$i = \frac{J}{1+RG},\ v = \frac{-RJ}{1+RG} \tag{2.102}$$

となって，確かに重ね合わせができることが分かる．

【問題 2.4.1】　次の連立方程式を重ね合わせの理を使って解きなさい．

$$4x+y+z=2,\ 2x+5y+4z=1,\ 3x+2y+6z=3$$

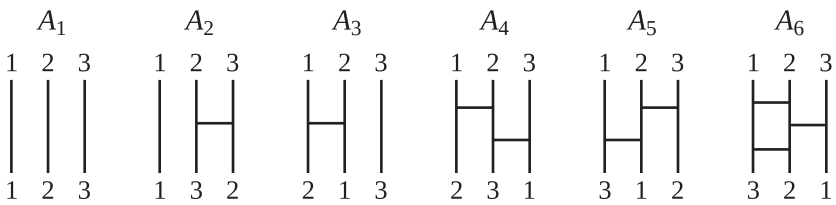


図 2.10　並び替え行列のあみだくじ.

coffee break

数の並び替え (permutation) は奥が底知れず深い．ここでは簡単な一例を紹介しよう．今，1, 2, 3 の 3 つの数を並び替えることを考えよう．(2, 1, 3) は一つの並びであり，この意味は 1 番目に 2 を，2 番目に 1 を，そして 3 番目に 3 を並べるということとする．これは数のリストと言ったりもする．つまり，中味の 3 つの数には順序が決められて並んでいると考えるのである．

さて，3 つの数から作られる異なる数の並びは全部で次の 6 つである．

$$(1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2),\ (3,2,1)$$

今，これらのリストに 3×3 の単位行列 $I_3 = \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$ の行の並びを対応させて，新しい 3×3 の行列を作ってみよう．たとえば，(2, 1, 3) からは行列 $\left(\begin{smallmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$ を作るといった具合である．

$$A_1 = \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right),\ A_2 = \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{smallmatrix}\right),\ A_3 = \left(\begin{smallmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right),$$

$$A_4 = \left(\begin{smallmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{smallmatrix}\right),\ A_5 = \left(\begin{smallmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right),\ A_6 = \left(\begin{smallmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right),$$

これらの行列は，もちろん

$$A_3\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$$

のように，並び替えを行ってくれる行列を表している．

次に，これらの行列を「あみだくじ」表現すると図 2.10 のようになる．このあみだくじをよくみると，A_4 は横棒が 2 本あり，上の横棒は A_3 を，下の横棒は A_2 を表している．とすると，A_4 は A_3 につづいて A_2 を作用させる行列であることに気づく．すなわち，

$$A_4 = A_2A_3$$

このことに気づけば，A_4，A_5，A_6 は A_2 と A_3 の積から作られることもわかる．

みなさんは，この話を (1,2,3,4) でやってみませんか．え！ (1,2,3,4,5) で挑戦したいって？どうぞご自由に．

第 3 章

複素数

複素数は高校の数学 B で学ぶことになっている．教科書に沿って復習しておこう．複素平面での複素数の表示や複素指数関数と三角関数の関係を与えるオイラーの公式は，回路理論のうち「交流理論」と呼ばれる回路の解析手法の主役を演じる．今からなじんでおこう．

3.1 複素数はどこから生まれたのか

数は人間が発明した情報伝達のための偉大な手段である．自然科学やその応用としての工学・技術は数なしに語ることはできない．

1 次方程式 $x+1=0$ は，**自然数** (natural number) の範囲では解はないが，0 や負の整数を考え，数の範囲を**整数** (integer) にまで広げると，解 $x=-1$ を持つ．

また，1 次方程式 $3x=2$ は，整数の範囲では解はないが，分数を考え，数の範囲を**有理数** (rational number) にまで広げると，解 $x=\dfrac{2}{3}$ を持つ．

更に，2 次方程式 $x^2=2$ は，有理数の範囲では解はないが，**無理数** (irrational number) を考え，数の範囲を**実数** (real number) にまで広げると，解 $x=\pm\sqrt{2}$ を持つ．

しかし，どのような実数も，その平方は負にならないから，2 次方程式 $x^2=-2$ は，実数の範囲では解はない．そこで，平方すると -1 になる数を 1 つ考え，これを j [*1]（すなわち $j^2=-1$）と表し，数の範囲を広げることが発明された．そうすると， $x^2=-2$ は，解 $x=\pm j\sqrt{2}$ を持つようになる．j を**虚数単位**という．

このようにして， a と b が実数のとき，$a+bj$ の形で表される数のことを**複素数** (complex number) という．たとえば，$1+j$, $2-3j$, $5j$ などは，いずれも複素数である．実数 a を $a+0j$ と同一視することによって，実数は複素数の特別なものとみなすことができる．

複素数がお互いに等しいこと（相等という），加減乗除は表 3.1 のルールに従う．これらの計算規則は，文字 j の式と考えて計算したとき，j^2 がでてくればそれを -1 と置き換えて得られる．

複素数 $z=a+bj$ に対して，$a-bj$ を z と**共役な複素数** (conjugate complex number)[*2]といい，$\bar{z}$ で表す．$\bar{\bar{z}}=z$ である．

[*1] 数学では文字 i を用いるが，電気工学では i は電流を表すのに用いるので，j を用いる．
[*2] 共役は「きょうやく」と読む．

表 3.1　複素数の相等および四則演算.

演算の名前	内　容
相　等	$a+bj=c+dj \Leftrightarrow a=c,\ b=d$ $a+bj=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0$
加　減	$(a+bj)\pm(c+dj)=(a\pm c)+(b\pm d)\,j$
乗　除	$(a+bj)\cdot(c+dj)=(ac-bd)+(ad+bc)\,j$ $\dfrac{a+bj}{c+dj}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}j,\ c+dj\neq 0$
共役複素数	$\bar{z}=\overline{a+bj}=a-bj$
共役複素数 の性質	$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\ \overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$ $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2},\ \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
絶対値	$\lvert z\rvert=\lvert a+bj\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$
絶対値の性質	$\lvert z\rvert=0 \Leftrightarrow z=0$ $\lvert z\rvert=\lvert -z\rvert=\lvert\bar{z}\rvert,\ z\bar{z}=\lvert z\rvert^2$ $\lvert z_1z_2\rvert=\lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert,\ \left\lvert\dfrac{z_1}{z_2}\right\rvert=\dfrac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$
極形式	$z=a+bj \Leftrightarrow z=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta+j\sin\theta),\ \theta=\arg z=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$

また，z の絶対値 $|z|$ を $\sqrt{a^2+b^2}$ により定義する．$|z|^2=z\bar{z}$ である．

【問題 3.1.1】　$z\bar{z}=|z|^2,\ |zw|=|z|\,|w|,\ |z+w|\leq|z|+|w|$ を示せ．

【問題 3.1.2】　次の計算をしなさい．

$$(2+3j)-(5-2j),\ (1+j)^3,\ \frac{1}{j},\ \frac{j}{1+j},\ \frac{3-2j}{3+2j}$$

【問題 3.1.3】　次の計算をしなさい．

$$\sqrt{-2}\sqrt{-8},\ \frac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-5}},\ \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-9}},\ \frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}+j}$$

【問題 3.1.4】　次の 2 次方程式を解きなさい．

$$x^2-x+1=0,\ 3x^2-2x+1=0,\ -2x^2+6x-7=0$$

【問題 3.1.5】　2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解が複素数になるための条件を求めよ．また，その範囲を $ab-$ 平面内に図示せよ．

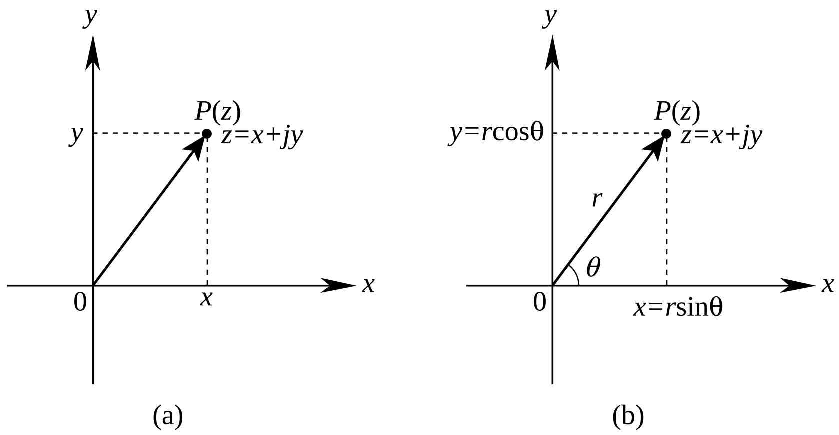


図 3.1 直角座標表示 (a) と極座標表示 (b).

3.2 複素平面

複素数を平面上の点に対応させて考えると，複素数を幾何学的な対象として理解することができる.

3.2.1 直角座標表示と極座標表示

まず，複素数 z を 2 つの実数 $x,\ y$ を用いて

$$z = x + yj = x + jy, \qquad j \text{ は虚数単位} \tag{3.1}$$

の形[*3]に表すことを，**直角座標表示** (rectangular form) という．このとき x を z の**実部** (real part)，y をその**虚部** (imaginary part) という．これらを

$$\mathrm{Re}\,(z) = x = \frac{z + \bar{z}}{2},\ \mathrm{Im}\,(z) = y = \frac{z - \bar{z}}{2j}$$

と書く.

そこで，z を 2 次元平面上の点 $P(x,\ y)$ に対応させて考える．このときの 2 次元平面を**複素平面** (complex plane) という．x 軸を**実軸** (real axis)，y 軸を**虚軸** (imaginary axis) という．図 3.1 (a) 参照.

ここで，複素数の絶対値は $|z|$ は，原点から点 P までの距離 $\sqrt{x^2 + y^2}$ になっていることに注意しよう.

一般に，複素平面上で 0 でない複素数 $z = x + yj$ を表す点を P とし，原点 O から点 P までの距離を $OP = |z| = r$ とする．OP と x 軸の正の部分のなす角を θ とすると，z は次のように表すことができる.

$$z = r\,(\cos\theta + j\sin\theta) \tag{3.2}$$

[*3] 数学では，$x + yj$ と書くが，電気工学では $x + jy$ と j を虚部のはじめに書く習慣がある.

これを z の**極座標表示** (polar form) という．図 3.1 (b) 参照.

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2$$

であるから，r は実際 z の絶対値である．θ はベクトル OP と x 軸の正の部分のなす角であり，z の**偏角** (argument) といい，$\arg z$ で表す.

$$\theta = \arg z = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{3.3}$$

偏角 θ は $-\pi \leq \theta \leq \pi$ の範囲[*4]でただ 1 通りに定まる．これを θ_0 とすると，n を整数として z の偏角は，一般につぎのように表される.

$$\theta = \arg z = \theta_0 + 2\pi n \tag{3.4}$$

偏角はこの式に従って計算できるが，次の点に注意しなければならない.

1. まず，$\tan^{-1}$ は「アーク・タンジェント」と読み， tan の逆関数である．すなわち，$\tan\theta = A$ のとき，$\theta = \tan^{-1} A$ である.
2. 任意の角度 θ に対して $\tan\theta$ はただ一つ定まるが，逆に tan の値が同じでも，角度はただ一つとは限らない．偏角 θ を $-\pi \leq \theta \leq \pi$ の範囲に制限しても，$\tan^{-1} A$ は必ず 2 つの値を持つ．そこで，通常は $\tan^{-1}$ の値域を $-\dfrac{\pi}{2} \leq \tan^{-1} A \leq \dfrac{\pi}{2}$ に制限して値を 1 つに定めている．たとえば，関数電卓ではこの計算法に従っている.
3. そこで，複素数 $z = x + jy$ の偏角 $\arg z$ の値は，まず $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ のとき次のように書ける.

$$\arg(x+jy) = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{y}{x} & (x > 0) \\ \pi - \tan^{-1}\dfrac{y}{|x|} & (x < 0, y > 0) \\ \tan^{-1}\dfrac{|y|}{|x|} - \pi & (x < 0, y < 0) \end{cases} \tag{3.5}$$

4. $x = 0$ のときは，複素数は純虚数となり，偏角は虚部の符号だけで決まる.

$$\arg(jy) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (y > 0) \\ -\dfrac{\pi}{2} & (y < 0) \\ \text{不定} & (y = 0) \end{cases} \tag{3.6}$$

5. $y = 0$ のときは，複素数は実数となり，偏角は実部の符号だけで決まる.

$$\arg(x) = \begin{cases} 0 & (x > 0) \\ -\pi & (x < 0) \\ \text{不定} & (x = 0) \end{cases} \tag{3.7}$$

[*4] 角度は，数学ではラジアン (radian) を使用する．これは，微分や積分を扱いやすくする．日常生活では，角度を度 (degree) で表す方がなじみやすい．状況に応じて使い分けてほしい．また，偏角を $0 \leq \theta \leq 2\pi$ で定めてもよい.

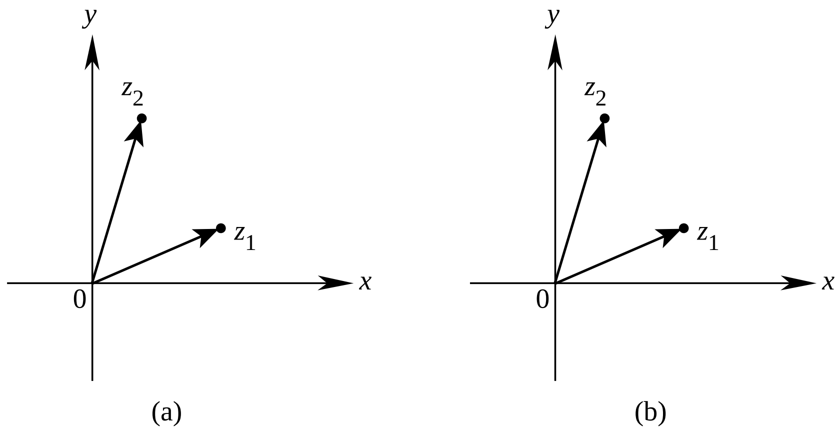


図 3.2　2 つの複素数の和差 (a) と積商 (b).

6. $z = 0$ ，すなわち原点，の偏角は定義しない.

【問題 3.2.1】　次の複素数の偏角をそれぞれ求めよ.

$$5 + j5,\ 5 - j5,\ -5 - j5,\ -5 + j5$$

極座標表示では，乗除算の計算が楽にできる．一例として，絶対値が 1 の 2 つの複素数 $z_1 = \cos\theta_1 + j\sin\theta_1$ と $z_2 = \cos\theta_2 + j\sin\theta_2$ の積を計算しよう.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2) \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + j(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + j\sin(\theta_1+\theta_2) \end{aligned} \tag{3.8}$$

となる．特に，$\theta_1 = \theta_2$ の場合は

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + j\sin(2\theta) \tag{3.9}$$

の等式を得る．一般に

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta) \tag{3.10}$$

が成り立つ．これをド・モアブル (de Moivre) の定理という.

3.2.2　四則演算の図式表示

2 つの複素数の和差については，表 3.1 より，積と商については

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \{\cos(\theta_1+\theta_2) + j\sin(\theta_1+\theta_2)\} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + j\sin(\theta_1-\theta_2)\} \end{aligned} \tag{3.11}$$

の関係を使って，結果を複素平面内に示すことができる．各自図 3.2 に結果を示しなさい.

積については，次のように考えてもよい．これは，おもしろいと思う．2 つの複素数を

$$z_1 = r\left(\cos\theta + j\sin\theta\right),\ z_2 = x + jy \tag{3.12}$$

と，それぞれ極形式と直角座標形式で表す．積は

$$z_1 z_2 = r\left\{x\cos\theta - y\sin\theta + j\left(x\sin\theta + y\cos\theta\right)\right\} \tag{3.13}$$

となる．そこで，複素平面の実部を u，虚部を v とおいて，できあがった点を表示すると次式を得る．

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\left(x\cos\theta - y\sin\theta\right) \\ r\left(x\sin\theta + y\cos\theta\right) \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

これは，z_2 ベクトルを z_1 で角度 θ だけ回転し，長さを r 倍することを意味している．特に，$z_1 = j$ の場合には，z_2 を 90° 度回転させることになる．

3.3　複素係数の連立 1 次方程式

複素数は実数と同じように四則演算が可能なので，連立方程式の係数が複素数になっても，実数の場合と同様な方法で解を求めることができる．一例を示しておこう．

【例題 3.3.1】

ある回路から次の 3 つの方程式を得た．

$$\begin{aligned} I_L &= I_C + I_G \\ \left(R + j\omega L\right) I_L + \frac{1}{j\omega C} I_C &= E \\ \frac{1}{j\omega C} I_C &= \frac{1}{G} I_G \end{aligned} \tag{3.15}$$

ただし，I_L，I_C，I_G が未知数であり，他の記号はすべて既知の値であるものとする．I_L，I_C，I_G を求めよ．

【解】式 (3.15) をそのまま，3 元連立方程式としてといてもよいが，第 1 式が簡単なので，第 2 式に代入して 2 元連立方程式にしてから解くことにしよう．代入して，整理すると次式を得る．ここでは，行列とベクトルの形にまとめておいた．

$$\begin{bmatrix} 1 - \omega^2 LC + j\omega CR & j\omega C\left(R + j\omega L\right) \\ G & -j\omega C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_C \\ I_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega CE \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

この係数行列を $\mathbf{A}$ とすると

$$\begin{aligned} \det\mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 1 - \omega^2 LC + j\omega CR & j\omega C\left(R + j\omega L\right) \\ G & -j\omega C \end{vmatrix} \\ &= -j\omega C\left\{1 + RG - \omega^2 LC + j\omega\left(CR + GL\right)\right\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

したがって，

$$\begin{aligned} I_C &= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{vmatrix} j\omega CE & * \\ 0 & -j\omega C \end{vmatrix} = \frac{j\omega C}{1 + RG - \omega^2 LC + j\omega\,(CR + GL)} E \\ I_G &= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{vmatrix} * & j\omega CE \\ G & 0 \end{vmatrix} = \frac{G}{1 + RG - \omega^2 LC + j\omega\,(CR + GL)} E \end{aligned} \tag{3.18}$$

を得る．これより

$$I_L = I_C + I_G = \frac{G + j\omega C}{1 + RG - \omega^2 LC + j\omega\,(CR + GL)} E$$

が求められる[*5]．

3.4　複素関数

複素数を独立変数とし，値となる従属変数も複素数となる関数を考えると，複素関数が得られる．複素関数は優美な関数であり，深く研究がされている．第 1 章でおさらいをした多くの関数は，そのまま引数を複素数にすると複素関数となる．

たとえば

$$w = f\,(z) = z^2 \tag{3.19}$$

は $z = x + jy$ と考えると，複素 2 次関数である．もっとも，この関数を x, y の関数と考えると，$w = u + jv$ とおいて

$$w = u + jv = z^2 = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + j\,(2xy)$$

より，2 変数 x, y についての関数

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \\ v &= 2xy \end{aligned} \tag{3.20}$$

となる．これは 2 次元平面 (x, y) から 2 次元平面 (u, v) への写像を与える．このように，複素関数は簡単に見えてもその正体はつかみやすいとは限らない．したがって，ここでは深入りしない．工業数学の授業で勉強してほしい．

ただ，結果だけを述べておくと，我々が知っている初等関数は複素関数にしても，微分や積分の公式は同じである．そこで，以下必要となる指数関数についてのみ，その性質を次節で述べよう．

[*5] 電気の問題では，通常この答えのように，分母と分子をそれぞれ直角座標表示でそのままにしておいてよい．問題の問われ方によって分母を極形式にする場合がおこる．そのときになったら違った表現に直せばよい．

3.5　指数関数と三角関数

3.5.1　指数関数と三角関数のベキ級数展開

指数関数と三角関数の微分について復習し，これらの関数の新しい表現形式を見いだそう．第 1 章 **1.3.2** でおさらいした結果を再度示しておく．

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \tag{3.21}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \tag{3.22}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \tag{3.23}$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \tag{3.24}$$

ここで，指数関数は微分しても同じ指数関数となっている．言い換えると，**指数関数は微分の操作に対して不変**である．そこで，この性質を使って指数関数をつぎのように多項式を無限次数にした形に表すことを試みよう．

$$e^x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k \tag{3.25}$$

関数をこのように無限個の和の形に表すことを**ベキ級数** (power series) に展開するという．ここで，各項の係数 a_k を決定したい．式 (3.25) を微分すると次式を得る．

$$e^x = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ka_kx^{k-1} \tag{3.26}$$

式 (3.25) と式 (3.26) は等しいので，係数について次の漸化式を得る．

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & a_0 \\ 2a_2 & = & a_1 \\ 3a_3 & = & a_2 \\ & \cdots & \\ ka_k & = & a_{k-1} \\ & \cdots & \end{array} \tag{3.27}$$

そこで

$$e^0 = a_0 = 1$$

の関係から，最初の係数を決定すると，式 (3.27) に従って次々に係数を決定できる．すなわち

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3!},\ \cdots,\ a_k = \frac{1}{k!},\ \cdots$$

となる[*6]．したがって，指数関数は，次のベキ級数に展開できることが分かった[*7]．

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k \tag{3.28}$$

同様に，三角関数についても 2 階微分すると符号が反転することを使って，ベキ級数の各係数を決定できる．結果は，次式となる．

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \end{aligned} \tag{3.29}$$

【問題 3.5.1】　式 (3.29) のベキ級数の係数を求めよ．

3.5.2　オイラーの公式

さて，そこで指数関数 (3.28) の引数 x を複素数にしてみよう．すなわち

$$x = \alpha + j\theta \quad \text{ここに，} \alpha,\ \theta \text{ は実数}$$

と置いてみる．

$$e^x = e^{\alpha + j\theta} = e^{\alpha}e^{j\theta}$$

であるから，指数が純虚数の $e^{j\theta}$ の部分に興味がある．この部分をベキ級数に展開しよう．

$$\begin{aligned} e^{j\theta} &= 1 + j\theta + \frac{1}{2}(j\theta)^2 + \frac{1}{3!}(j\theta)^3 + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdots\right) + j\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots\right) \end{aligned} \tag{3.30}$$

なんと！この最後の関係式は $\cos\theta$ と $\sin\theta$ のベキ級数の和になっているではないか．すなわち，次式を得る．

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \tag{3.31}$$

これを**オイラーの公式** (Euler's formula) という．

オイラーの公式は，交流理論の根幹にかかわる最重要公式である．この式があったからこそ交流の問題が簡単に解けるのである．忘れないように，大きく大きくもう一度書いておく．

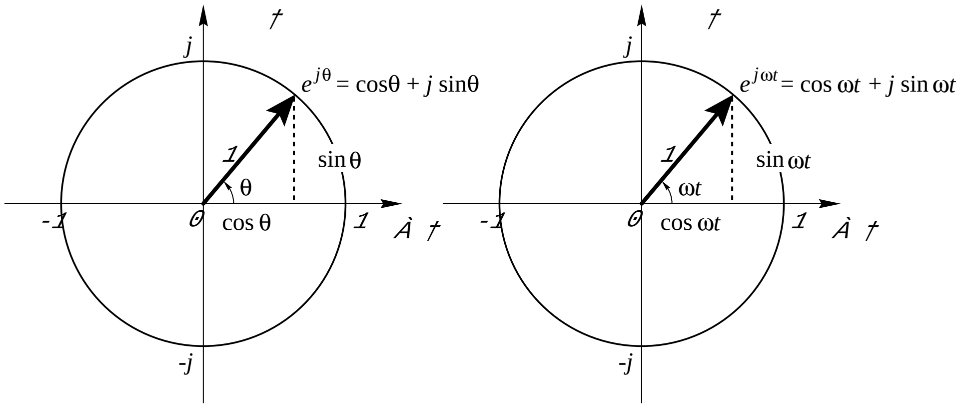
【オイラーの公式】

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

電気工学では，$\theta = \omega t$ の場合を扱うことが多いので，そのように書き直しておいた．三角関数

[*6] $k!$ は k の階乗（かいじょう）といい，$k! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k$ を表す．

[*7] 数学的には，この級数が「収束」することを調べておく必要がある．実際指数関数は，任意の x についてこの級数は収束することが分かっている．



(a)　(b)

図 3.3　単位円上の複素数.

と指数関数は，複素数の世界でこのように関係づけられているのである．複素関数を考えることがなぜ自然であり，大切であるかを示す一例といえよう．

この公式の御利益は何といっても微分演算で指数関数がその形を変えないという性質であろう．このことは，学習歴が進と共に実感することとなる．

$$\frac{d}{dt}e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t} \tag{3.32}$$

3.5.3　単位円上の複素数

単位円上の複素数は，おもしろい性質を持っていて応用面でも大変重要である．思いつくままに幾つかの性質をあげておこう．図 3.3 (a) 参照．なお，図 3.3 (b) は同じ図であるが，角度 θ が角速度 ω で運動している場合を表している．単位円の上の複素数を考えるときには，いつもこの図を思い浮かべると役に立つであろう．

オイラーの公式をもう一度書いて置いてから色々な性質をみることにしよう．

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \tag{3.33}$$

なお，単位円上の複素数はその絶対値が 1 であるから，次の公式が成り立つ．

$$\left|e^{j\theta}\right| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{3.34}$$

また，$e^{j\theta}$ の複素共役は $\overline{e^{j\theta}} = e^{-j\theta}$ であるから

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta \tag{3.35}$$

となる．式 (3.33) ，(3.35) を使って

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2},\ \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \tag{3.36}$$

特別な角度の値

$$
\begin{aligned}
e^{j0} &= e^{2\pi} = \cos 0 + j \sin 0 = 1,\ e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = j \\
e^{j\pi} &= \cos\pi + j\sin\pi = -1,\ e^{j\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + j\sin\frac{3\pi}{2} = -j
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

三角関数の加法定理

$$
e^{j(\theta_1+\theta_2)} = e^{j\theta_1}e^{j\theta_2} \tag{3.38}
$$

の右辺と左辺に式 (3.33) を適用して

$$
e^{j(\theta_1+\theta_2)} = \cos(\theta_1+\theta_2) + j\sin(\theta_1+\theta_2)
$$

$$
e^{j\theta_1}e^{j\theta_2} = (\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)
$$

$$
= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + j(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)
$$

したがって，次の加法定理を得る．

$$
\begin{aligned}
\cos(\theta_1+\theta_2) &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \\
\sin(\theta_1+\theta_2) &= \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

特に，$\theta_1 = \theta_2 = \theta$ の場合を考えると，次の倍角の公式を得る．

$$
\begin{aligned}
\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \\
\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

de Moivre の定理

指数関数の性質 $\left(e^{j\theta}\right)^n = e^{jn\theta}$ から，直ちに次のド・モワブル (de Moivre) の定理を得る．

$$
(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos n\theta + j\sin n\theta \tag{3.41}
$$

1 の n 乗根

方程式 $x^n = 1$ の根を求めよう．一般に n 個存在することが分かっている[*8]．いま，$x = e^{j\theta}$ と仮定して代入すると，次式を得る．

$$
e^{j\theta n} = 1 = e^{j2\pi m} \quad \text{ここに } m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots
$$

したがって

$$
\theta = \frac{2\pi}{n}m,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1 \tag{3.42}
$$

そこで，n 個の根は次式となる．

$$
1,\ e^{j\frac{2\pi}{n}},\ e^{j\frac{4\pi}{n}},\ e^{j\frac{6\pi}{n}},\ \cdots,\ e^{j\frac{2\pi(n-1)}{n}} \tag{3.43}
$$

[*8] これを，代数学の基本定理という．

θ 回転

複素数 $z = x + jy$ に $e^{j\theta}$ を掛けると，複素数 z は角度 θ 回転する．$w = u + jv = e^{j\theta}z$ とすると

$$w = u + jv = e^{j\theta}(x + jy) = x\cos\theta - y\sin\theta + j(x\sin\theta + y\cos\theta)$$

となる．したがって，複素平面上の点は次の変換を受ける

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

これは，z を角度 θ 回転させたことにほかならない．

複素数 $e^{j\theta}$ はこの場合，回転の行列 $\left[\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right]$ に対応している．この行列は

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \cos\theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \cos\theta\mathbf{I} + \sin\theta\mathbf{J}$$

と分解できる．ここに，

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおいた．これらの行列は積について

$$\mathbf{I},\ \mathbf{J},\ \mathbf{J}^2 = -\mathbf{I},\ \mathbf{J}^3 = -\mathbf{J},\ \mathbf{J}^4 = \mathbf{I}$$

となり，ちょうど虚数単位 j と同じルール

$$1,\ j,\ j^2 = -1,\ j^3 = -j,\ j^4 = 1$$

に従っている．一般に，複素数 $z = a + jb$ と行列 $\left[\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right]$ とは同じ四則演算の性質を持っている．その意味で同じものと考えてよい．

微分と積分

$$\frac{d}{dt}e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t} \tag{3.45}$$

$$\int e^{j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega}e^{j\omega t} \tag{3.46}$$

【問題 3.5.2】　$z^3 = 1$ および $z^3 = -1$ の根を求め，単位円上に図示せよ．

【問題 5.5.3】　次の公式を証明しなさい．

1. $\cos^4\theta = \dfrac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3)$
2. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$
3. $\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$

4. $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right\}$
5. $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right\}$

3.5.4　複素数の表示法のまとめ

オイラーの公式から，これまで極形式と呼んできた複素数の表記法は複素指数関数を用いて表すことが可能となった．すなわち

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta) = re^{j\theta} \tag{3.47}$$

そこで，今後極形式といえば，この指数関数を用いた記法を意味することとしよう．複素数 z を表現する方法をまとめると，次の 2 つの方法が使われる．

- **直角座標表示** (rectangular form)

$$z = x + jy \quad \text{ここに}\ \ x : \text{実部},\ y : \text{虚部}$$

- **極座標表示** (polar form)

$$z = re^{j\theta} \quad \text{ここに}\ \ r : \text{絶対値},\ \theta : \text{偏角}$$

直角座標表示された複素数と極座標表示された複素数の間の変換は次のようになる．

- **直角座標表示から極座標表示への変換**　$(xy \Rightarrow r\theta)$

$$r = |z| = x^2 + y^2,\ \theta = \arg(z) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

- **極座標表示から直角座標表示への変換**　$(r\theta \Rightarrow xy)$

$$x = \mathrm{Re}(z) = r\cos\theta,\ y = \mathrm{Im}(z) = r\sin\theta$$

ここで， 2 つの複素数 $z_1 = r_1e^{j\theta_1}$，$z_2 = r_2e^{j\theta_2}$ の絶対値と偏角についても復習しておこう．

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|\,,\ \arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

これらを使うと，a，b，c，d を実数として，複素分数式 $\dfrac{a+jb}{c+jd}$ の絶対値と偏角は次式となる．

$$\left|\frac{a+jb}{c+jd}\right| = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}},\ \arg\left(\frac{a+jb}{c+jd}\right) = \tan^{-1}\frac{b}{a} - \tan^{-1}\frac{d}{c} \tag{3.48}$$

また，$\tan^{-1}$ の和や差に関しては次の公式が成立する．

$$\begin{aligned} \tan^{-1}x + \tan^{-1}y &= \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} \\ \tan^{-1}x - \tan^{-1}y &= \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy} \\ \pi - \tan^{-1}x &= \tan^{-1}\frac{1}{x} \end{aligned} \tag{3.49}$$

ただし，各式の分母が負になるときは注意が必要である．

【例題 3.5.1】

$$\theta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \tag{3.50}$$

の実部と虚部を求めよ．ただし，R，G，C，L，ω はいずれも正の実数とする．

【解】

$$\theta = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \tag{3.51}$$

とおいて，実部 α と虚部 β を求める．まず，式 (3.51) の両辺を 2 乗して，実部と虚部を求めると次式を得る．

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= RG - \omega^2 LC \\ 2\alpha\beta &= \omega(GL + RC) \end{aligned} \tag{3.52}$$

これらの両辺を 2 乗して加え，平方根をとると次式を得る．

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} \tag{3.53}$$

そこで，$\alpha^2 + \beta^2$ と $\alpha^2 - \beta^2$ の和と差を取ることによって

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (RG - \omega^2 LC)\right\}} \\ \beta &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (RG - \omega^2 LC)\right\}} \end{aligned} \tag{3.54}$$

を得る．ここで符号は，正負の組み合わせから 4 種類が考えられるが，式 (3.52) の第 2 式より，$\alpha\beta > 0$ となっていることから，複合同順でなければならない．したがって

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (RG - \omega^2 LC)\right\}} \\ \beta &= \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (RG - \omega^2 LC)\right\}} \end{aligned} \tag{3.55}$$

あるいは

$$\begin{aligned} \alpha &= -\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (RG - \omega^2 LC)\right\}} \\ \beta &= -\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (RG - \omega^2 LC)\right\}} \end{aligned} \tag{3.56}$$

となる．

なお，$R + j\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}e^{j\phi}$，　$G + j\omega C = \sqrt{G^2 + \omega^2 C^2}e^{j\psi}$ とおいて，

$$\begin{aligned} \theta &= \sqrt[4]{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}e^{j\frac{1}{2}(\phi+\psi)} \\ &= \sqrt[4]{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}\left(\cos\frac{1}{2}(\phi + \psi) + j\sin\frac{1}{2}(\phi + \psi)\right) \end{aligned} \tag{3.57}$$

から実部と虚部を計算してもよい．

表 3.2　単位となる倍数の呼び名

大きさ	記号	呼び名	大きさ	記号	呼び名
10^{12}	T	テラ (tera)	10^{-1}	d	デシ (deci)
10^9	G	ギガ (giga)	10^{-2}	c	センチ (centi)
10^6	M	メガ (mega)	10^{-3}	m	ミリ (milli)
10^3	k	キロ (kilo)	10^{-6}	μ	マイクロ (micro)
10^2	h	ヘクト (hecto)	10^{-9}	n	ナノ (nano)
10	D	デカ (deca)	10^{-12}	p	ピコ (pico)

3.6　大きな数・小さな数

3.6.1　単位の呼び名

具体的に扱う物理量が桁違い大きかったり小さかったりすると，その数値をそのまま言い表すとかえって分かりにくい．たとえば，抵抗の値は非常に大きな値から非常に小さな値まで，値の広がりが極端に大きい．12100000 オームの抵抗とか，0.00000121 オームの抵抗とか言ってみても実感が湧かない．

そこで，工学では大きな数や小さな数の単位の呼び方として，表 3.2 に示すような倍数記号をつけ，数値がなるべく有効数字だけになるように工夫されている．$12.1M\Omega$ [*9]とか，$1.21\mu\Omega$ とか呼ぶと分かりやすい．これらの呼び名も必要に応じて使えるようにしておこう．

3.6.2　対数目盛（対数尺）

変化の大きな数を適当な区間に写すには，対数関数を用いるとよい．常用対数を用いることにすると，10^{-2}，10^{-1}，10^0，10^1，10^2 は，それぞれ -2，-1，0，1，2 に写され，扱いやすくなる．

図 3.4 は，x 軸，y 軸ともに対数目盛を付した両対数方眼紙にデータをプロットしたグラフである．100 万倍に及ぶ体重の差を適切な長さに表現できている．

3.6.3　複素倍率：dB

アンプ（増幅器）などの入力と出力の間の増幅率 A は，複素数で表されることが多い．

$$A = |A| \angle A \tag{3.58}$$

そこで，A の振幅 $|A|$ は変化が大きいことが多いので，更に

$$G = 20 \log_{10} |A| \tag{3.59}$$

[*9] 抵抗の場合は「メガ・オーム」とは読まずに，「メグ・オーム」とよむ習わしのようである．

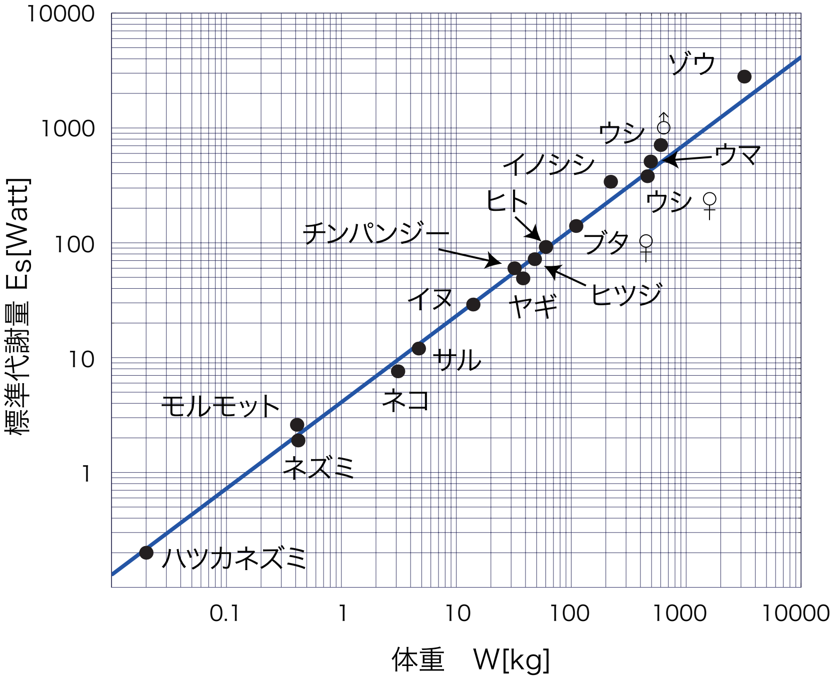


図 3.4　動物のサイズとエネルギーの消費量．本川達雄著「ゾウの時間とネズミの時間」から引用．

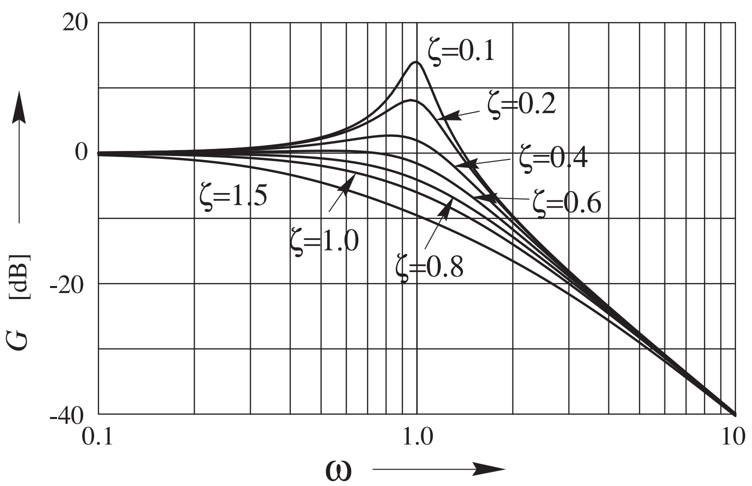


図 3.5　ボード線図：倍率の周波数依存性をみる図 ζ はパラメータ．

のように対数を取った量 G を定義し，これをデシベル dB (deci-Bell) と呼ぶ単位で測る．0 dB は $|A| = 1$ ，20 dB は $|A| = 10$ である．

通常，G は入力周波数 ω の関数となる．$G(\omega)$ の周波数依存性をグラフにして，これをボード線図 (Bode diagram) と呼ぶ．図 3.5 では，周波数 ω も変化が大きいため，対数目盛に取ってある．大きく変化する量の表示には，このように対数目盛を使うと便利である．[*10]

[*10] 図 3.5 は，両対数目盛のはずなのに，y 軸は等尺目盛りとなっている．不思議ではないか？

第 4 章

正弦波と複素正弦波

4.1 正弦波

4.1.1 正弦波とは

時間の関数としての三角関数について復習しておこう．まず，余弦関数

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \phi) \tag{4.1}$$

および正弦関数

$$y(t) = A_m \sin(\omega t + \phi) \tag{4.2}$$

を考えよう．ここに，t は時刻を表わす実変数である．いずれの関数についても，A_m を**振幅** (amplitude)，ω を**角周波数** (angular frequency)，ϕ を**初期位相** (initial phase) または単に**位相** (phase) という．

これらの関数は，tx 平面または ty 平面上で，グラフに描くと周期的な**波形** (waveform) となるので，**余弦波**または**正弦波** (sinusoid) と呼ばれている．また，これらの関数は， 3 つのパラメータ，A_m, ω, および ϕ を与えると一意的に定まる．すなわち，

- 振幅 A_m は波形の大きさ，
- 角周波数 ω [rad/sec] は 1 秒間に角度 ω [radian] 回転する回転角の**角速度** (angular velocity)
- 位相角 ϕ

を与えると正弦波は決まってしまう．電気回路では，式 (4.1), (4.2) のように時間の関数として表された波形を**瞬時値** (instantaneous value) 表示と呼んでいる．

波形の**周期** (period) を T [s]，**周波数** (frequency) を f [Hz] とすると，

$$\begin{aligned} \omega T &= 2\pi \\ fT &= 1 \end{aligned} \tag{4.3}$$

の関係がある．図 4.1 参照.

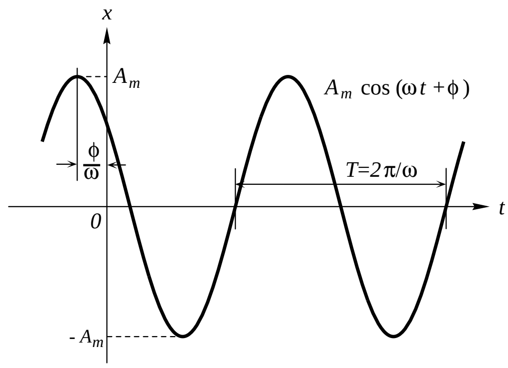


図 4.1　余弦波の例.

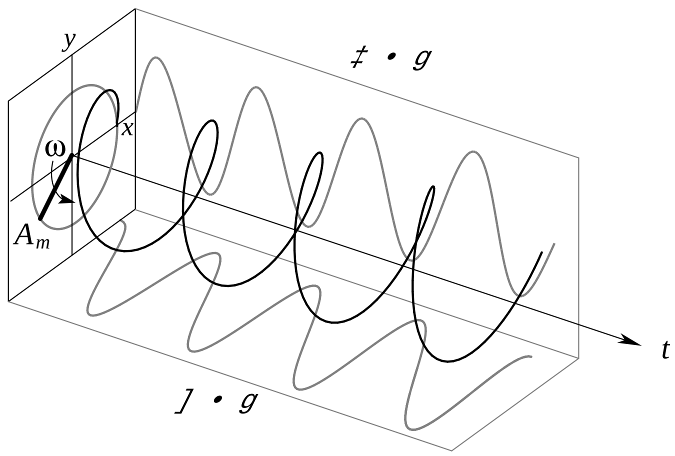


図 4.2　角速度 ω で回転する棒の各軸への射影.

式 (4.1), (4.2) を，xy 平面と時間軸 t からなる 3 次元空間のグラフとして描くと，一端が原点に固定された，長さ A_m の棒が，一定角速度 ω で回転していると考え，この棒の先端の動きを x 軸，および y 軸に射影した関数が式 (4.1) および式 (4.2) である．図 4.2 参照.

4.1.2　正弦波間の位相差

次に，位相の異なる 2 つの余弦波

$$x_1(t) = A_m \cos \omega t \tag{4.4}$$

および

$$x_2(t) = B_m \cos(\omega t + \phi) \tag{4.5}$$

について，位相の持つ性質を見ておこう．ここで，式 (4.4) を基準にして考えるために，その位相は 0 とおいた.

1. $\phi = 0$ の場合，2 つの波形は**同相** (in-phase) であるという．

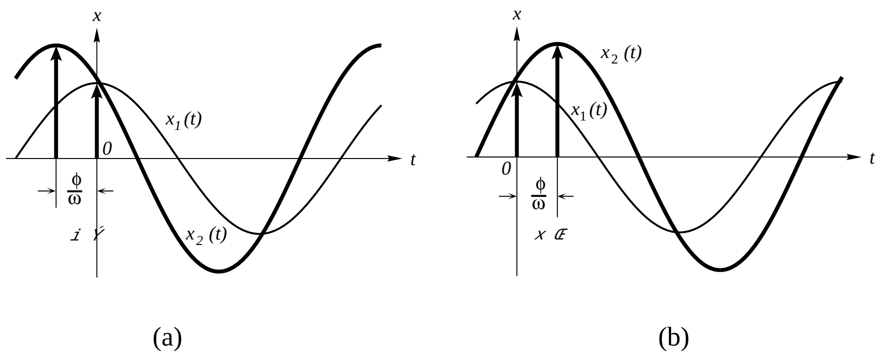


図 4.3　進み波形 (a) と遅れ波形 (b).

2. $\phi > 0$ の場合，式 (4.5) の波形は，式 (4.4) の波形より（位相が）**進んだ** (leading phase) **波形**であるという．図 4.3(a) 参照.
3. $\phi < 0$ の場合，式 (4.5) の波形は，式 (4.4) の波形より（位相が）**遅れた** (lagging phase) **波形**であるという．図 4.3(b) 参照.

特に，式 (4.4) の波形より位相が $\dfrac{\pi}{2}$ だけ遅れた波形は

$$A_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = A_m \sin \omega t \tag{4.6}$$

となって，正弦波となる．このことから，余弦波と正弦波はどちらか一方を考えれば十分である．以下では，主として余弦波を用いて説明する．

【問題 4.1.1】　次の 2 つの正弦波について，$x(t)$ に対する $y(t)$ の位相差を求めよ.

1. $x\left(t\right) = \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{6}\right)$，$y\left(t\right) = \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{3}\right)$
2. $x\left(t\right) = \sin\left(\omega t - \dfrac{\pi}{6}\right)$，$y\left(t\right) = \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{3}\right)$

4.1.3　**正弦波の実効値**

正弦波の平均値について考えておこう．式 (4.1) を例にとって説明する．勿論，式 (4.2) についても同様である．まず，そのまま一周期にわたって平均してみよう．

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)d\tau = \frac{\omega A_m}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(\omega\tau + \phi)d\tau = \frac{A_m}{2\pi}\left[\sin(\omega\tau + \phi)\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = 0 \tag{4.7}$$

ここに，$< \cdot >$ は 1 周期にわたって平均をとることを表わす．したがって，正弦波はそのまま平均してもその値は 0 となってしまう．このような波形については，一度 2 乗してから平均し，その平方根をとるとよい．すなわち，

$$\langle x \rangle_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [x(\tau)]^2 d\tau} \tag{4.8}$$

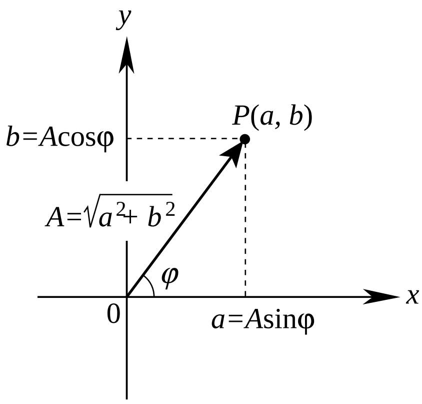


図 4.4　合成位相を計算するための図.

を定義し，この平均 $<\cdot>_{rms}$ を **2 乗平均の平方根** (root mean square) または単に rms という．特に，正弦波にこれを適用すると，交流回路では有用な物理量が得られるので，この平均値を，**実効値** (effective value) と呼んでいる．

式 (4.1) の正弦波の場合，振幅 A_m と実効値 A_e の関係は

$$A_e = \langle x \rangle_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [x(\tau)]^2 d\tau} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega\tau + \phi) d\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_m \tag{4.9}$$

4.1.4　正弦波の合成

加法定理を用いて $a\cos\omega t + b\sin\omega t$ を式 (4.1) のように $A_m\cos(\omega t + \phi)$ に変形することを**正弦波の合成**という[*1]．

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t = \sqrt{a^2+b^2}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega t\right\} \tag{4.10}$$

と変形し，

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{4.11}$$

とおくと，式 (4.10) は次式となる．

$$x(t) = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\cos\omega t + \sin\varphi\sin\omega t) = A\cos(\omega t - \varphi) \tag{4.12}$$

ここに，

$$A = \sqrt{a^2+b^2},\ \varphi = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

とおいた．これらの関係は，図 4.4 をみるとすぐに理解できるであろう．

【問題 4.1.2】　次の式を式 (4.12) のように変形し，$\cos\omega t$ に対する位相差を求めよ．

---

*1　$A_m\sin(\omega t + \phi)$ のようにまとめることも同じである．ここでは余弦波にまとめることを考える．

1. $\cos\omega t + \sin\omega t$, $\sqrt{3}\sin\omega t - \cos\omega t$, $\sqrt{3}\cos\omega t - \sin\omega t$
2. $\dfrac{RE}{R^2+\omega^2L^2}\cos\omega t + \dfrac{\omega LE}{R^2+\omega^2L^2}\sin\omega t$

【問題 4.1.3】　次の正弦波の実効値を求めよ．

$$3\sin\omega t + 4\cos\omega t,\ 100\sqrt{2}\sin\omega t - 100\sqrt{2}\cos\omega t,\ \sqrt{3}\sin\omega t + \cos\omega t$$

4.2　複素正弦波

4.2.1　複素正弦波を考える理由

オイラーの公式を用いると

$$A_m e^{j(\omega t+\phi)} = A_m\cos(\omega t+\phi) + jA_m\sin(\omega t+\phi) \tag{4.13}$$

となる．この右辺の実部と虚部はそれぞれ，式 (4.1), (4.2) の正弦波である．式 (4.13) を正弦波の複素数表示いい，これを単に**複素正弦波**ということにする．

瞬時値表示の実時間で表した正弦波 (4.1), (4.2) に対して，複素正弦波 (4.13) をわざわざ考えるのはなぜだろうか．これは,

- 色々な計算が飛躍的に楽になる
- その結果，計算の途中においても「式の意味」や「変形の見通し」，強いてはその「物理的意味」がわかる

からである．

では，複素正弦波を考えると「何故計算が飛躍的に楽になる」のか．それは

- 微分・積分を施しても，指数関数は関数の形を変えない
- 複素数の指数関数を使った極形式を用いると，たやすく絶対値（振幅）と偏角（位相）が得られる

からである[*2]．

そんな訳で，電気工学では，正弦波を扱う交流の問題において例外なく，複素正弦波を用いて計算する．この具体的な方法を**記号法** (symbolic method) という．

しかし，次の事実を忘れてはならない．記号法の適用できる問題は次の 3 つの条件を満たした問題のみである．

- 回路は**線形**である
- **正弦波電源**の印加された回路である
- **定常状態**である

[*2] ここに述べた理由は，まったく私の私見である．

こんなに有用な記号法を紹介しない手は無いのだが，それは電気回路の授業におまかせすることにして，以下 2 つの正弦波の位相差を求める問題を複素正弦波を使って考えてみよう．

4.2.2 複素正弦波を用いた位相差の計算

2 つの正弦波の間の位相差を求める問題を，複素正弦波の問題に置き換えて考えてみよう．このことによって，問題をまったく機械的に解くことができるようになる．

まず，位相差とは

- $-\pi$ から π までの角度 δ であり，
- $0 \leq \delta \leq \pi$ の場合が進み，$-\pi \leq \delta \leq 0$ の場合が遅れである

と考えよう．

さて，波形 $A\cos(\omega t + \phi)$ を基準として，別の正弦波との位相差を計算する問題を考える[*3]．比較したい正弦波は，$B\cos(\omega t + \theta)$ か $B\sin(\omega t + \theta)$ のどちらか形をしている．そこで，次の手順を考える．

手順 1 基準とする波形の複素正弦波表示を求める．すなわち

$$x(t) = Ae^{j(\omega t + \phi)} = A\left\{\cos(\omega t + \phi) + j\sin(\omega t + \phi)\right\} \tag{4.14}$$

とする．ちょうど，基準の正弦波が実部になるように対応づけた．

手順 2 比較する正弦波の複素正弦波表示を求める．ただし，比較する正弦波が実部にくるように表現する．上の例の場合

1.
$$y(t) = Be^{j(\omega t + \theta)} = B\left\{\cos(\omega t + \theta) + j\sin(\omega t + \theta)\right\} \tag{4.15}$$

2.
$$z(t) = B\frac{1}{j}e^{j(\omega t + \theta)} = B\left\{\sin(\omega t + \theta) - j\cos(\omega t + \theta)\right\} = Be^{j\left(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2}\right)} \tag{4.16}$$

となる．

手順 3 $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{B}{A}e^{j(\theta - \phi)},\ \dfrac{z(t)}{x(t)} = \dfrac{B}{A}e^{j\left(\theta - \frac{\pi}{2} - \phi\right)} \ \Rightarrow\ \delta_c = \theta - \phi,\ \delta_s = \theta - \dfrac{\pi}{2} - \phi$ を求める．

手順 4 もし，必要ならば $\delta_c = \theta - \phi,\ \delta_s = \theta - \dfrac{\pi}{2} - \phi$ について，角度が $-\pi$ から π までの角度に入るように 2π を加える（または引く）．

【例 4.2.1】

次に示す正弦波について，$\cos(\omega t - \dfrac{\pi}{3})$ に対する位相差を求めよ．

$$(a)\ \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right),\ (b)\ \sin\omega t + \cos\omega t$$

[*3] 波形 $\sin(\omega t + \phi)$ を基準としても同様な手法がつくれる．

【解】　まず，基準とする複素正弦波を $e^{j\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)}$ とする．
(a) $\sin\left(\omega t-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ の複素表示は，次式となる．

$$\frac{1}{j}e^{j\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)}=e^{j\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)}=e^{j\left(\omega t-\frac{7\pi}{6}\right)}=e^{j\omega t}e^{j\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}$$

したがって，

$$\frac{e^{j\omega t}e^{j\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}}{e^{j\omega t}e^{j\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}=e^{j\left(-\frac{7\pi}{6}\right)-j\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=e^{j\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$$

より，$\dfrac{5\pi}{6}$ の遅れとなる．
(b) まずは，合成する．

$$\cos\omega t+\sin\omega t=\sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\omega t+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\omega t\right\}=\sqrt{2}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)$$

したがって，複素表現は $e^{j\omega t}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ となる．そこで

$$\frac{e^{j\omega t}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}{e^{j\omega t}e^{j\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}=e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)-j\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=e^{j\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

これより，位相差は $\dfrac{\pi}{12}$ の進みとなる．

4.3　複素正弦波の満たす微分方程式

4.3.1　微分方程式をつくる

複素正弦波

$$z(t)=A_m e^{j(\omega t+\phi)}=A_m\cos(\omega t+\phi)+jA_m\sin(\omega t+\phi) \tag{4.17}$$

を考えよう．これを時刻 t で微分すると次式を得る．

$$\frac{dz}{dt}=j\omega A_m e^{j(\omega t+\theta)}=j\omega z$$

したがって， $z(t)$ は次式の微分方程式の解となっている．

$$\frac{dz}{dt}-j\omega z=0 \tag{4.18}$$

この方程式が，式 (4.17) の満たす微分方程式である[*4]．

次に，$z=x+jy$ とおいて，実部と虚部が満たす方程式を導いておこう．式 (4.18) を実部と虚部に分解して

$$\frac{d}{dt}(x+jy)=\frac{dx}{dy}+j\frac{dy}{dt}=j\omega(x+jy)=-y+jx$$

[*4] 逆に，式 (4.18) の解はすべて式 (4.17) の形に書ける．その意味で，式 (4.17) を微分方程式 (4.18) の一般解という．

より，次式を得る．

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\omega y \\ \frac{dy}{dt} &= \omega x \end{aligned} \tag{4.19}$$

さらに，どちらかの変数を消去すると次式を得る．

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y &= 0 \end{aligned} \tag{4.20}$$

これらの式は，**単振動** (simple oscillation or harmonic oscillation) の式として知られている．もちろん解は，一般に

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{4.21}$$

となっている．ここに，A，B は任意定数（積分定数という）である．2 階の微分方程式 (4.20) が，複素数で表すと，式 (4.18) のように，1 階の微分方程式として簡単に表すことができる．

4.3.2　外力として複素正弦波をもつ微分方程式の定常解

いま，微分方程式の右辺に複素正弦波を加えた（これを外力という）次の方程式を考える．

$$\frac{dz}{dt} + az = Ae^{j\omega t} \tag{4.22}$$

ここに，a, A は実数定数とする．

さて，指数関数は微分しても，その関数の形を変えないことから，式 (4.21) の解として，次の形の関数が候補となる．

$$z(t) = Ze^{j\omega t} \tag{4.23}$$

そこで，Z を見付けて，解を求めよう．式 (4.23) を式 (4.22) に代入して整理する．

$$j\omega Ze^{j\omega t} + aZe^{j\omega t} = Ae^{j\omega t}$$

うまい具合に，両辺から $e^{j\omega t}$ が消えて，Z に関する次の 1 次方程式を得る．

$$(a + j\omega)\, Z = A$$

これを解いて，解 (4.23) は次式となる．

$$z(t) = Ze^{j\omega t} = \frac{A}{a + j\omega} e^{j\omega t} \tag{4.24}$$

このままでは，解の見通しがきかないので，右辺を極形式に書き直そう．

$$z(t) = \frac{A}{a + j\omega} e^{j\omega t} = \frac{A}{\sqrt{a^2 + \omega^2} e^{j\varphi}} e^{j\omega t} = \frac{A}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{j(\omega t - \varphi)} \tag{4.25}$$

ただし，

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{\omega}{a} \tag{4.26}$$

とおいた．

これで，式 (4.22) の解を見付けることができた．この解を式 (4.22) の定常解（特殊解）という．

おもしろいことは，式 (4.22) の実部からなる微分方程式の解は，式 (4.25) の実部となっていることである．すなわち，微分方程式

$$\frac{dz}{dt} + az = A\cos\omega t \tag{4.27}$$

の解は

$$z\,(t) = \frac{A}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\cos\,(\omega t - \varphi) \tag{4.28}$$

となる．

【問題 4.3.1】　次の微分方程式の定常解を求めよ．

$$\frac{dz}{dt} + az = A\sin\omega t$$

【問題 4.3.2】　次の微分方程式の定常解を求めよ．ただし，R, L, E は実数とする．

$$L\frac{di}{dt} + Ri = Ee^{j\omega t}$$

【問題 4.3.3】　次の微分方程式の定常解を求めよ．ただし，R, L, C, E は実数とする．

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = Ee^{j\omega t}$$

また，この解を参照して，次の微分方程式の定常解を求めよ．

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = E\cos\omega t$$

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = E\sin\omega t$$

4.4　正弦波動

前節 **4.1** ， **4.2** と **4.3** で述べた時間関数としての三角関数を，空間あるいは時間・空間の関数と考えると，正弦波動となる．時間関数の正弦波が複素指数関数を用いると定常解析が楽になったように，正弦波動も複素化すると計算が著しく簡単になる．以下，余弦波を用いて基本的な用語と関係式をみておこう．

4.4.1　時間的な正弦波

まず，時刻 t の関数としての余弦波は，式 (4.1) より

$$z(t) = A_m \cos(\omega t + \phi) \tag{4.29}$$

となる．また，これに対応する複素指数関数は

$$z(t) = A_m e^{j(\omega t + \phi)} \tag{4.30}$$

である．どちらの関数も 2 回微分すると分かるように，次の単振動の微分方程式を満足する．

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\omega^2 z(t) \tag{4.31}$$

4.4.2　空間的な正弦波

次に，直線上の点を表す空間座標を x とし，x の関数としての余弦波は，式 (4.29) と同様に

$$z(x) = A_m \cos(\beta x + \phi) \tag{4.32}$$

と書ける．また，これに対応する複素指数関数は

$$z(z) = A_m e^{j(\beta x + \phi)} \tag{4.33}$$

である．ここで，β は位相定数 (phase constant)，

$$\beta\lambda = 2\pi$$

を満足する長さ λ は波長 (wave length) である．また，

$$\beta = 2\pi k$$

を満たす k は波数 (wave number) と呼ばれている．k は，波 (4.32) の単位長さあたりにみられる山（余弦波の最大値）の数を表している．位相定数，波長および波数は，それぞれ時間波形の角周波数，周期および周波数に対応している．

式 (4.32)，(4.33) どちらの関数も，x で 2 回微分すると分かるように，次の時間を含まない波動方程式を満足する．

$$\frac{d^2 z(x)}{dx^2} = -\beta^2 z(x) \tag{4.34}$$

4.4.3　時間・空間的な正弦波

さて，時刻 t と空間座標 x の関数としての余弦波は，式 (4.29) や 式 (4.32) と同様に

$$z(t,\ x) = A_m \cos(\omega t - \beta x + \phi) \tag{4.35}$$

と書ける．また，これに対応する複素指数関数は

$$z\left(t,\ x\right)=A_m e^{j(\omega t-\beta x+\phi)}=A_m e^{j\phi}e^{j\omega t}e^{-j\beta x} \tag{4.36}$$

である．

どちらの関数も 2 回微分すると

$$\frac{\partial^2 z\left(t,\ x\right)}{\partial t^2}=-\omega^2 z\left(t,\ x\right),\ \frac{\partial^2 z\left(t,\ x\right)}{\partial x^2}=-\beta^2 z\left(t,\ x\right)$$

となる．これらの関係式から，$z\left(t,\ x\right)$ は，次の波動方程式を満足する．

$$\frac{\partial^2 z\left(t,\ x\right)}{\partial t^2}=\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2\frac{\partial^2 z\left(t,\ x\right)}{\partial x^2} \tag{4.37}$$

4.4.4　進行波と定在波

式 (4.35) あるいは (4.36) の余弦波は，山（振幅が最大となる位相）や谷（振幅が最小となる位相）が時間の経過とともに x 軸上を右（ x の正の方向）に向かって移動する．すなわち，位相が一定となる関係を

$$\psi_+\left(t,\ x\right)=\omega t-\beta x+\phi=\text{一定} \tag{4.38}$$

とおくと，この位相の x 軸上での時間的変化は

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\omega}{\beta} \tag{4.39}$$

となる．すなわち，位相は式 (4.39) の速度で右に移動することが分かる．この速度を**位相速度** (phase velocity) という．

このように，空間的に位相一定の部分がある速度で動く波を**進行波** (traveling wave) という．また，右に移動する進行波を**前進波** (forward wave)，左に移動する波を**後進波** (backward wave) と呼ぶことがある．後進波の例は，たとえば

$$z\left(t,\ x\right)=A_m\cos\left(\omega t+\beta x+\phi\right) \tag{4.40}$$

である．この波の位相速度は

$$\psi_-\left(t,\ x\right)=\omega t+\beta x+\phi=\text{一定} \tag{4.41}$$

より

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{\omega}{\beta} \tag{4.42}$$

である．

空間的に位相が右にも左にも動かず静止し，波の振幅が場所の関数となり周期的に変化している場合がある．このような波動を**定在波** (standing wave) という．たとえば

$$\begin{aligned} z\left(t,\ x\right) &= A_m\cos\left(\omega t-\beta x+\phi\right)+A_m\cos\left(\omega t+\beta x+\phi\right) \\ &= 2A_m\cos\left(\omega t+\phi\right)\cos\left(\beta x\right) \end{aligned} \tag{4.43}$$

は，定在波の例である．これは，振幅 $2A_m \cos(\omega t + \phi)$ が時間的に余弦波で変化し，空間的には静止した余弦波 $\cos(\beta x)$ とみることができる．定在波では，空間的に振幅が最大となる位置，すなわち $|\cos(\beta x)| = 1$ を満たす $x = n\pi,\ n = 0, 1, \cdots$ を腹 (loop) という．また，$\cos(\beta x) = 0$ となる位置 $\beta x = \left(\dfrac{1}{2} + n\right)\pi,\ n = 0, 1, \cdots$ は節 (node) と呼ばれている．

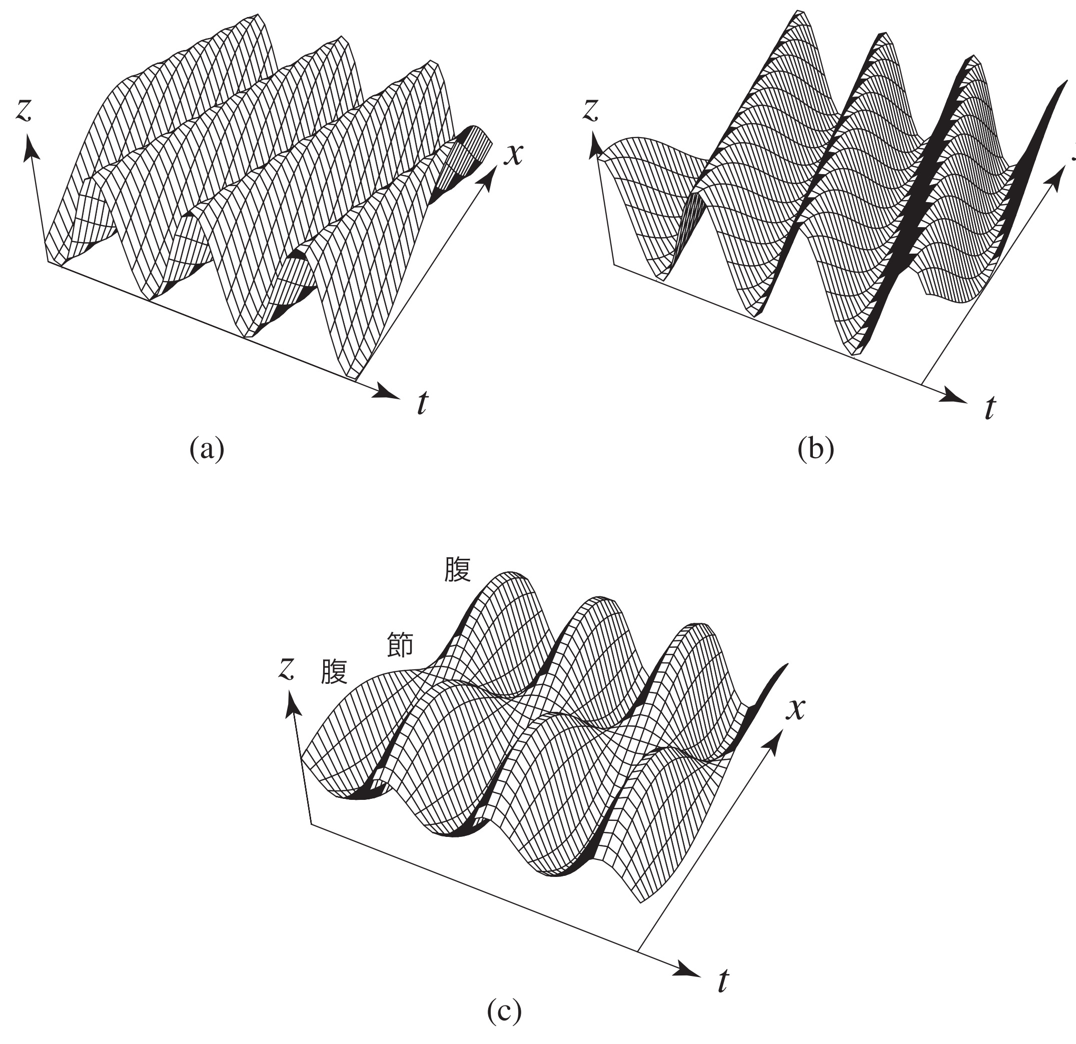


図 4.5　前進波 (a)，後進波 (b)，定在波 (c).

4.5　波動のうなり

ω とほんの少しちがった角周波数 $\omega \pm \delta\omega$ を，また位相定数 β についても同様にわずかに違った $\beta \pm \delta\beta$ をもつ 2 つの波動 $e^{j\{(\omega+\delta\omega)t-(\beta+\delta\beta)x\}}$ と $e^{j\{(\omega-\delta\omega)t-(\beta-\delta\beta)x\}}$ の和を考えよう．すなわち，波動

$$e^{j\{(\omega+\delta\omega)t-(\beta+\delta\beta)x\}} + e^{j\{(\omega-\delta\omega)t-(\beta-\delta\beta)x\}} \tag{4.44}$$

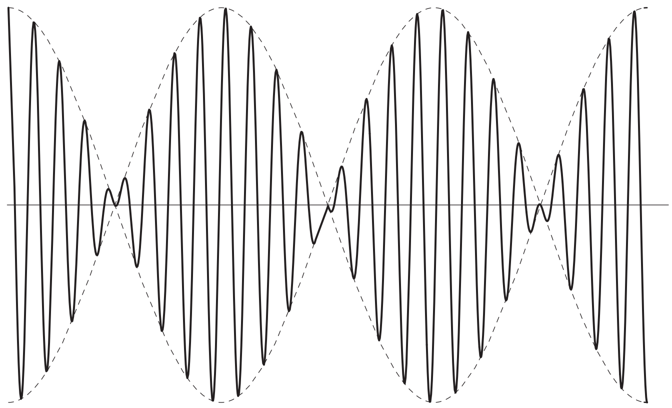


図 4.6　振幅が余弦波のうなり波形の例.

を考える．式 (4.44) は

$$e^{j(\omega t-\beta x)}\left(e^{j\{\delta\omega t-\delta\beta x\}}+e^{-j\{\delta\omega t-\delta\beta x\}}\right)=e^{j(\omega t-\beta x)}2\cos\{(\delta\omega)\,t-(\delta\beta)\,x\} \tag{4.45}$$

と書き換えられる．これは，平均の角周波数 ω および平均位相定数 β をもち，振幅が $2cos\{(\delta\omega)\,t-(\delta\beta)\,x\}$ でかわる波動を表している．特に，この振幅は時間と空間に関してゆっくり変わる余弦波となっている．このように振幅が変化する波動は，**うなり波動**と呼ばれている．

そこで，式 (4.45) の実部の波動を例にとって考えよう．すなわち

$$2\cos\{(\delta\omega)\,t-(\delta\beta)\,x\}\cos\{\omega t-\beta x\} \tag{4.46}$$

を考える．振幅が一定となるのは $(\delta\omega)\,t-(\delta\beta)\,x=$ 一定 であるから，このうなり波形は

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\delta\omega}{\delta\beta} \tag{4.47}$$

の速度で進むことが分かる．この速度は**群速度** (group velocity) と呼ばれている．

空間の一点，たとえば $x=0$，で固定してこの波動をみると $2\cos(\delta\omega)\,t\cos\omega t$ となる．図 4.6 は，この波形を示している．

一般に，2 つの異なる角周波数 ω_1，ω_2 をもつ正弦波 $A_1\sin(\omega_1 t)$，$A_2\sin(\omega_2 t)$ の和：

$$f(t)=A_1\sin(\omega_1 t)+A_2\sin(\omega_2 t) \tag{4.48}$$

は，必ずしも正弦波になるとは限らないことに注意しよう．すなわち，

1. $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}=$ 有理数の場合：$f(t)$ は周期関数となる．
2. $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}=$ 無理数の場合：$f(t)$ は周期関数とならない[*5].

2 つの異なる角周波数をもつ正弦波の和で表される関数は，このように周期関数にならないこともあり，この関数の性質を知ることは易しくない．

[*5] この場合 $f(t)$ を準周期関数 (quasi-periodic function) と呼ばれている．

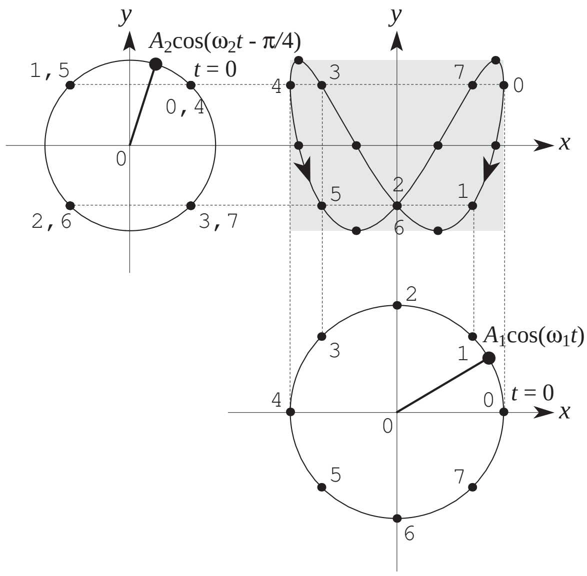


図 4.7　リサジュー図形の描き方の例．$\omega_2 = 2\omega_1, \delta = \pi/4$ の場合．

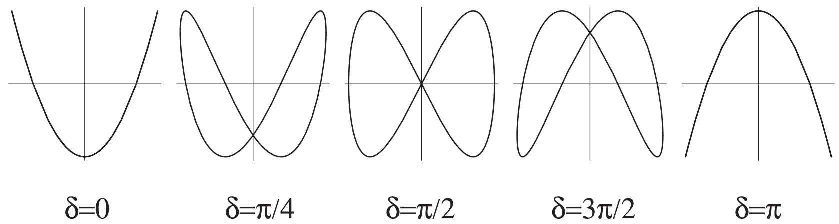


図 4.8　$\omega_2 = 2\omega_1$ で位相差 δ を変化させた場合のリサジュー図形．

4.6　リサジュー図形

異なる角周波数をもつ 2 つの余弦波：

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t) \\ y(t) &= A_2 \cos(\omega_2 t - \delta) \end{aligned} \tag{4.49}$$

を平面上の座標と考えて軌跡を描くとおもしろい結果が得られる．

図 4.7 には $\omega_2 = 2\omega_1, \delta = \pi/4$ の場合が例として描かれている．y 軸の軌跡は，x 軸に比べて 2 倍の早さで描かれるので，x 軸の余弦波が円周を 1 周する間に，y 軸の余弦波は円周を 2 周する．したがって，合成された図形は中央のように $x = \pm A_1$ で 1 つの接触点を持ち，$y = \pm A_2$ で 2 つの接触点を持つ曲線が得られる．ただし，位相差 δ の値によっては，曲線が点 $(\pm A_1, \pm A_2)$ を通るときには，これら接触点の個数が減少する．図 4.8 参照．このような図形を**リサジュー** (Lissajous) **の図形**という．図 4.9 に ω_1 と ω_2 の比を変え，位相差を変えた場合のリサジュー図形を示しておいた．

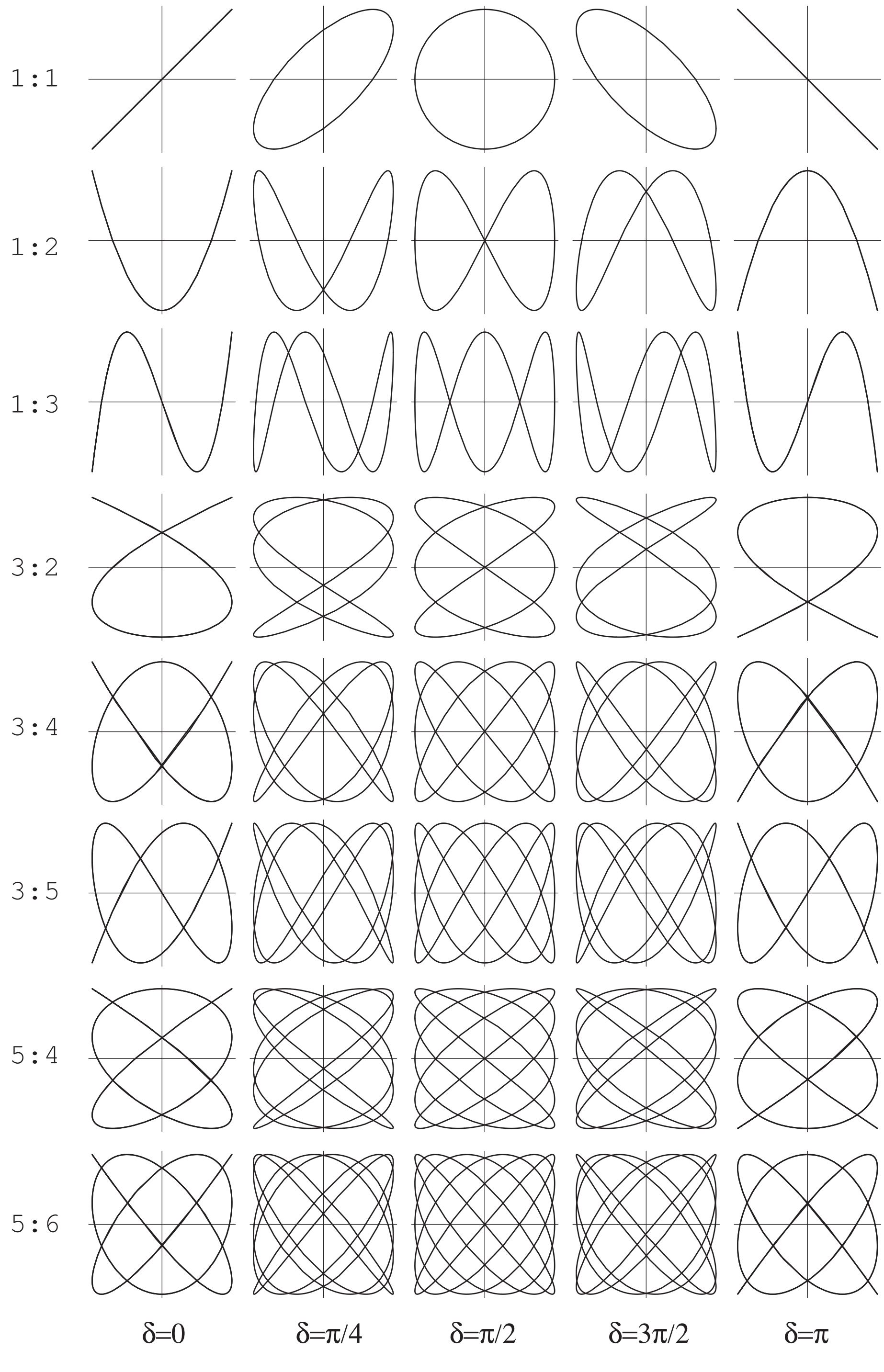


図 4.9　リサジュー図形の例．$\omega_1 : \omega_2$ を図の左に示した．

三角関数 の諸公式

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha, \quad \sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$A\sin\alpha + B\cos\alpha = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\left(\alpha - \tan^{-1}\frac{B}{A}\right)$$

複素数を含んだ公式は 3.5.4 参照

参考文献

[1] 古屋茂著：**行列と行列式**，培風館，昭和 50 年.

この本は古くから読み継がれてきた名著であり，記述も分かりやすい．第 5 章までの 100 ページ位を読んでおくと大抵のことは理解できるようになる．

[2] 砂田利一著：**行列と行列式 1**，岩波講座：現代数学への入門，岩波書店，1995.

この本は最近書かれた良書である．非常に読みやすくおもしろく書かれている．行列式の定義の説明に「アミダクジ」の話が書かれている．このノートでも紹介したかった話題である．そんなこともあって，一番推薦したい本である．できればがんばって 2 巻目も読破してほしい．いやいや，この「岩波講座：現代数学への入門」全 10 巻をできれば揃えておきたい．

[3] スピヴァック著，斎藤正彦訳：**多変数解析学**，東京図書，1972.

この本は，お薦めの微積の本である．副題が「古典理論への現代的アプローチ」となっていて，電気磁気学で中心的な役割を果たす Stokes の定理だけに捧げられて書かれている．

多変数の微分の勉強には，最初の 50 ページ程を読むだけで十分だ．全体でも 164 ページと手頃な本だが，全体を理解するためには，「岩波講座：現代数学への入門」の適当な本を読んでおく必要が有りそうだ．

[4] ポントリャーギン著，千葉克裕訳：**常微分方程式**，共立出版，1963.

工学屋がなぜ微積を勉強するのか？それは微分方程式を解きたいからだ．このノートでも一章をさいて，微分方程式の解説をぜひしたいと考えていた．最初に述べたように，いかに教えないでおくかということで省略してしまった．でもここで文献だけは紹介しておこう．

微分方程式の本として 1 冊あげろと言われるとこの本しかない．それほどに世界的な名著である．回路，制御，非線形力学への最良の入門書と言える．40 年間も新鮮さを失わない教科書があるなんて信じられない気もする．ちなみに，ポントリャーギンは，旧ソ連の盲目のトポロジスト．連続群論や力学系における構造安定性の理論で有名．制御工学では「ポントリャーギンの最大値原理」で 1960 年代の流れを作った．

[5] スメール・ハーシュ著，田村一郎・水谷忠良・新井紀久子訳：**力学系入門**，岩波書店，1976.

この本の原題は「Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra」となっていて，線形代数と微分方程式の関係を丁寧に述べている．例題も多くて親切である．この本の著者 S. Smale は微分可能力学系の発展にこの上もなく寄与したバークレーのフィールド・メダリストである．このノートで省略した「重複特性根に対する Jordan 標準

形とそれに関連した一般化された固有ベクトル空間」について知りたいときは，この本を参照すればよい．

[6] フレンチ著，平松惇・安富精一監訳：**振動・波動**，培風館，1986.

なぜ三角関数にこだわるのだろうか？この質問もまじめに答える必要があるであろう．物理法則の基本的な部分が大抵微分方程式で記述され，その線形近似が線形微分方程式で表され，そして有界な解が振動や波動に対応し，そしてその基礎が三角関数で表される単振動となる…．電気回路といえども例外ではない．

この本は，物理の常識を補強するための教養書として読んでおきたい． MIT の教科書である．

[7] フランク・クラウフォード共著，高橋秀俊監訳：**波動　上・下**，丸善株式会社，昭和 48 年.

こちらは Berkeley の教科書．このノートの第 4 章の続きとして読むとよいであろう．「徳島大学にもこんな本の書ける先生の講義があったらなあー」と思うくらい惚れぼれする本である．正弦波についてやさしく，かつ興味深く語られている．

[8] ファインマン・レイトン・サンズ共著，坪内忠二訳：**力学—ファインマン物理学 I—**，岩波書店，1967.

この魅力的な啓蒙書はじっくり読んでみよう．分からなくて結構．微積がこんな具合に「言語として使われるのだ」ということが肌で感じられるであろう．

さて，最後に将来学ぶであろう回路の本：超やさしいのと超難解？のとを紹介しておこう．

[9] 末武国弘著：**基礎電気回路 1，2**，培風館，1971, 1980.

「著者は，これから工学を学ぼうとする諸君に，工学の考え方とその方法—言うなれば工学の思想—を電気工学の立場から学んで身につけてもらうことをこの本の執筆目標とした」とまえがきに記されている．分からせるための努力がしみ出してくるような，教育的配慮が痛いほど感じられる本である．高校生にも問題なく理解できます．したがって，いつの時点で読んでもらってもいい本です．

[10] ローレー著，斎藤政男・篠崎寿夫訳：**回路理論**，学献社，1973.

こちらは，回路方程式の導出法について研究していた研究者によって書かれた良書である．一から始める人が躓きそうな所をカバーするように丁寧に説明されている．日本のカリキュラムでは，時間がなくて教えられない内容が語られている．回路理論の入り口を示してくれたと感じられる本といえる．この本は，英語の原典を読んだほうが分かりやすい気がする．各章が短いことも読みやすくしている．

付録 A

高校物理の教科書から

A.1　2006 年問題

2006 年 4 月から，新指導要領で学習した高校生が大学に入学してくる．知識量が低下していることが問題となっている．これが 2006 年問題である．みなさんは，その当事者として注目を浴びている．大いに迷惑なことであろう．

実際，新課程の教科書で内容をみてみると，表 A.1 となっている．「物理 I」の教科書では，従来より扱う事項が多くなっているにもかかわらず，式の数が極端に減ってしまっている．その分は「きれいな写真」と「わかりやすい図」で説明されている．したがって，本質的な内容は「物理 II」の教科書に先送りされているのだ．しかも，高校では「物理 II」は 3 年制の後期にならないと教えられないという．今後，大学での初年次教育をどうするのか．頭の痛い問題である[*1]．

A.2　電気回路理論との関係はどうなっているのだろうか

A.2.1　電気磁気現象のカプセル化＝電気回路

ここでは，「物理 I」「物理 II」の電気に関する内容から，さらに回路を学ぶために必要な部分を抜き出して「考え方（話の筋書き）」を述べることにしよう．

一般に，電気現象は，「電荷」と呼ばれる「電気の素」がこの世界に存在することに起因して生じる．電荷が複数個あれば，「電荷間の力に関係した現象」が観測される．この現象を「電場」と「磁場」[*2] という 2 つの言葉で法則として定式化した理論が「電気磁気学」である．電気磁気学は，電荷とその流れである電流によっておこる「電場と磁場の時間・空間的性質」を探求する．

さて，電気磁気学は時間空間的に現象を説明するので結構複雑となり，テレビやコンピュータの設計に応用するにはやや困難となる．そこで，空間的に起こる電磁現象をカプセル化[*3]し，時

[*1] 大学では，高校までの教育と違って，義務的に教えなければならない教科・科目はない．そのため，先生方は日夜「何を・どう」教育するか知恵をしぼっている．

[*2] 「電場」や「磁場」という単語は，物理学を専攻した理学部の先生が使用する用語である．工学部の先生は，これらの単語をそれぞれ「電界」および「磁界」という．「場」と「界」のバトルは近づかないほうが賢明である．どちらにせよ英語では単に「field」ですから．

[*3] 空間的に狭い領域に現象を閉じこめ，「理論的には空間的な考慮をしなくていいように素子化（あるいは要素化）

表 A.1　新課程の高校物理の内容

物理 I 第 1 編，私たちのくらしと電気 [pp.6-55]		大学で学ぶ科目名	
章の名前 (式数合計)	節の名前 (節中に含まれる式の数)	電気磁気学	電気回路論
静電気と電流 (7)	静電気 (1)，電流 (6)，放電 (0)	◯	◯
電流と磁場 (0)	磁石 (0)，電磁石 (0)	◯	◯
	モーター (0)，発電機のしくみ (0)	◯	◯
交流と電波 (0)	交流 (0)，電波 (0)	◯	◯
物理 II　第 2 編，電気と磁気 [pp.69-164]			
電場 (27)	静電気力 (2)，電場 (4)，電位 (4)，	◯	◯
	電場の中の物体，コンデンサー (17)	◯	◯
電流 (15)	オームの法則 (7)，直流回路 (8)	◯	◯
電流と磁場 (21)	磁場 (3)，電流のつくる磁場 (4)，	◯	◯
	電流が磁場から受ける力 (9)，ローレンツ力 (5)	◯	◯
電磁誘導と電磁波 (37)	電磁誘導の法則 (12)，交流の発生 (6)	◯	◯
	インダクタンス (8)，交流回路 (10)，電磁波 (1)	◯	◯

◯ は関係の深い科目を示す．なお，括弧内の式の数は本文の主要な式の数のみを示す．

間的に変化する電磁現象のみに着目し，現象を素子化して，素子達のつなぎ合わせにより現象を設計する理論が考え出された．これが「電気回路理論」である．

カプセル化，すなわち要素化し，要素達を組み合わせることによって望ましい機能をもつ人工システムをつくることは，工学の設計手法のひとつである．このようなシステムは，動的システムとして解析が一般的に扱えることから「集中定数系」と呼ばれている．電気回路は，集中定数系の典型的な例となっている．

A.2.2　静的現象と動的現象

以上のことから，高校物理の電気に関連した事項は，大学では「電気磁気学」と「電気回路理論」の 2 つに大別して教えられていることが分かった[*4]．

次に，物理的状態の「時間的な変化の有無」に関する考え方の流れを見ることにしよう．

物理現象は，電場や磁場，電荷，電流や電圧などといった物理的な状態間の関係式で表現される．これらの状態の時間的変化については，つぎの 3 種類に分けて考えると分かりやすい．表 A.2 参照．

することと」をここではカプセル化と呼んだ．これは力学における質点の考え方の同じ考え方と言える．

[*4] 表 A.1 で電気磁気学と電気回路論の両方にすべて ◯ が付いてしまったのは，教科書の章・節の分類がまずいことによる．以前の教科書ではかなりはっきりと区別できた．

表 A.2　物理的な状態の時間的変化の様子.

状態の変化		状態の変化率	法則を表す方程式	回路の例
静的	なし	0	連立方程式	直流回路
動的	連続	有限	連立微分方程式	交流回路
瞬時	不連続	∞	連立方程式	電池とコンデンサーのみの回路

静的状態　変化していない，止まっている，静止している，平衡している，動かない状態のこと．この場合，物理法則は，すなわち状態量の間の関係式は，一般に連立代数方程式となる．たとえば，釣り合いの位置にあるてこ，固定された電荷のつくる電場，一定電流のつくる磁場，電池と抵抗からつくられた直流回路の電流，などが代表的な例である．

動的状態　変化している，動いている状態のこと．動き（変化）に関する関係式は一般に，連立微分方程式で表される．たとえば，飛翔物体の運動，動いている電荷のつくる電場，交流電源と抵抗，コイル，コンデンサーからつくられた回路（交流回路という）の電圧や電流，などがこの場合の例である．

超高速・瞬時に変わる不連続変化の状態　一瞬に変化する，すなわち，不連続な変化となる状態のこと．瞬時の変化は法則として記述するのが難しい．特殊な場合として，変化の前後で保存される量を連立方程式として定式化できる場合がある．この場合の一例としては，物理 II にでてくる電池でコンデンサーを充電する問題におけるコンデンサーの電圧などが考えられる．この場合，電圧は瞬時に変化し，その変化の瞬間に無限大の電流が流れる[*5].

電気回路では，カプセル化して空間的な変化は考えないことにしたので，回路の状態は時間的に変化しないかするかのいずれかである．変化しない回路を「直流回路」という．変化する回路のひとつに「交流回路」がある．

A.2.3　3つのカプセルたち＝コンデンサー・コイルと抵抗

学生 A「先生，ちょっと待ってください．電荷を動かさずに置いてある場合の現象は，静的であることは分かりましたが，電流の場合が静的というのが分かりません．電荷が動くというか流れるのが電流なんでしょう.」

先生「いい質問です．電荷を q クーロン，電流を i アンペアとすると

$$\frac{dq}{dt} = i \tag{A.1}$$

[*5] 状態が不連続に変化する場合の物理学はやっかいである．数学的に不連続関数の微分を考えることが難しいことに由来する．一方，日常生活では不連続現象にはしばしば遭遇する．かなづちで釘を打つ，物体の衝突，コンデンサーの瞬時充電などの場合がこの例である．このような場合には，別の適切な物理量が変化の前後で保存される性質をうまく使って問題を解決する．

という関係が成り立ち，A さんに言うように電流は電荷の時間的な変化率で定義されている．どうしてなんだろう．」

学生 B 「電流が変化しないということは

$$\frac{di}{dt} = 0, \text{ すなわち } i(t) = \text{一定} \tag{A.2}$$

ということで，一定電流を扱うということだと思います．」

先生 「これは模範解答だね．すばらしいよ B さん．」

学生 C 「先生,「動く」「動かない」は相対的でしょう．電荷の動きと同じ早さで動かしたら電流はどうなりますか？」

先生 「鋭い質問だ．これは大学院生でも答えるのが難しいのではないだろうか．電気回路理論では，現象をカプセル化することによって空間的な動きを無視してしまったので，あなたの質問には関係なくなる．電磁気学では，アインシュタインが考えた，もちろん考える前に「おかしいなと思った」，大問題につながっている．時間空間的な現象を座標変換する問題は難しい問題だということで今のところ深入りしないことにしよう．」

学生 A 「B さんの話と表 A.1 の物理 II を合わせて眺めてみると，電流が変化することによる電磁現象があるのでしょうか？わざわざ節が作ってあるようですから…」

先生 「そのとおり．有名な現象が潜んでいます．電気電子工学があるのもこの現象のおかげかも知れません．Faraday が見つけた電磁誘導の現象です．

$$\frac{di}{dt} \tag{A.3}$$

に比例した電圧が発生するのです．

$$v(t) = L\frac{di}{dt} \tag{A.4}$$

と定式化し，このカプセル化した素子のことを「コイル」あるいは「インダクタ」と呼びます．」

学生 A 「先生, 物理 II ででてきたコンデンサーもカプセル化した電気回路の素子なんでしょう．」

先生 「おっしゃるとおりです．電荷を蓄えるビーカーみたいな入れ物がコンデンサーと考えるといい．ビーカーに貯まった水の量を電荷と考え $q(t)$，ビーカーの底面積を C，貯まった水の高さを v とおくと，

$$q(t) = Cv(t) \tag{A.5}$$

と書ける．貯まった水の量は，底面積 × 高さであると思えばよい．これは静的な式だが，電流の式を組み合わせると

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt} \tag{A.6}$$

となる．これがコンデンサーの性質を表す動的な式といえる[*6]．」

[*6] 関係式に時間微分の量が含まれている場合を動的関係といっていることに注意してほしい．単に比例だけの関係は，たとえ物理量が時間的に変化していても，静的関係である．

先生　「実は，言い忘れていたのだけれど，電磁誘導についても，まず電流に比例した磁場ができて，この磁場の時間的変化が電圧を誘導している．だから物理 II では，まず電流による磁場が論じられている．

そこで，コイルを流れる電流 $i(t)$ による磁場のカプセル化した量（磁束という）を λ とし，比例定数を L とすると

$$\lambda = Li \tag{A.7}$$

が成り立つ．そして Faraday の法則は

$$v(t) = \frac{d\lambda}{dt} \tag{A.8}$$

となる．だから上で述べた関係式を得る．」

学生 C　「電圧や電流が変化する話ばかりになっていますが，第 2 章の例題 2.1.1 にある抵抗は

$$v(t) = Ri(t) \tag{A.9}$$

の関係式を与える要素なので，静的ですね．」

先生　「まったくそのとおりです．電圧と電流の関係を定義する要素を抵抗素子と考えると，電圧源

$$v(t) = E\ （一定） \tag{A.10}$$

や，電流源

$$i(t) = I\ （一定） \tag{A.11}$$

も抵抗のなかまと考えてよい．」

先生　「結局，カプセル化した電気回路の構成要素である素子の種類は，大別して 3 種類：コイル，コンデンサーと抵抗ということになる．」

A.3　電気回路理論の枠組み

A.3.1　素子の接続に関する法則

さて，回路を構成する素子たちのプロフィールを紹介できたので，回路を組み立てることにしよう．これも至って簡単で，素子の端を適当に何カ所かに寄せ集めて端止めのハンダ付けをすればよい．これで一つの回路ができる．このつなぎ方によって，電圧や電流が制約される．このことから生まれる法則が，Kirchhoff の電流則と電圧則である．物理 II の教科書には次のような説明がなされている．

キルヒホッフの第 1 法則 (KCL)　回路中の任意の接続点に流れ込む電流を正，流れ出す電流を負の量で表すと，それらの総和はつねに 0 である*[7].

*7 実際に，式で表すと【問題 2.1.5】となる．

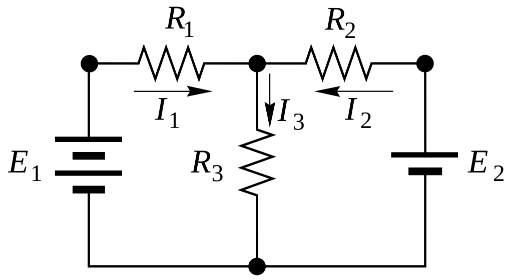


図 A.1　直流回路の例.

キルヒホッフの第２法則 (KVL)　任意の閉じた回路にそって１周するとき，電源および抵抗，コイル，コンデンサーによる電圧の上昇を正，電圧の降下を負の量で表すと，電位差の総和はつねに 0 である.

この２つの法則は，どのような電気回路でも成り立つので，これらの関係式を使って回路の電圧や電流について成り立つ方程式を導くことができる.

【 回路例 1.1】　問題 2.2.2 に回路方程式が与えられていた電気回路とはどんな回路であったのか種明かしをしておこう．図 A.1 の回路を考える．図に示した電流を用いて次の方程式が導かれる.

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_3 \ \ (KCL \text{ から}) \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 &= E_1 \ \ (KVL \text{ を左の閉じた回路に適用}) \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 &= E_2 \ \ (KVL \text{ を右の閉じた回路に適用}) \end{aligned} \tag{A.12}$$

第１式の I_3 を第２，第３式に代入して問題に示した次式を得る.

$$\begin{aligned} (R_1 + R_3)\, I_1 + R_3 I_2 &= E_1 \\ R_3 I_1 + (R_2 + R_3)\, I_2 &= E_2 \end{aligned} \tag{A.13}$$

【 回路例 1.2】　問題 2.2.5 の 2 に回路方程式が与えられていた電気回路を図 A.2 (a) に示す．図に示した電流を用いて問題に示した方程式が導かれる．また，**例題 2.4.1** に示した方程式に対応する回路を図 A.2 (b) に示した.

A.3.2　交流理論＝複素直流化の手法

時間的に正弦（あるいは余弦）波の電圧源は，第４章の最初で述べたように

$$v(t) = E_m \sin(\omega t + \phi) \tag{A.14}$$

の形をしている．このような電源の引加された回路を「交流回路」という．交流回路の解析をどう進めるか．これが，電気電子工学科で学ぶ「電気回路理論」の中心的課題なのである．そのためには，さらに

- 法則の線形性・非線形性

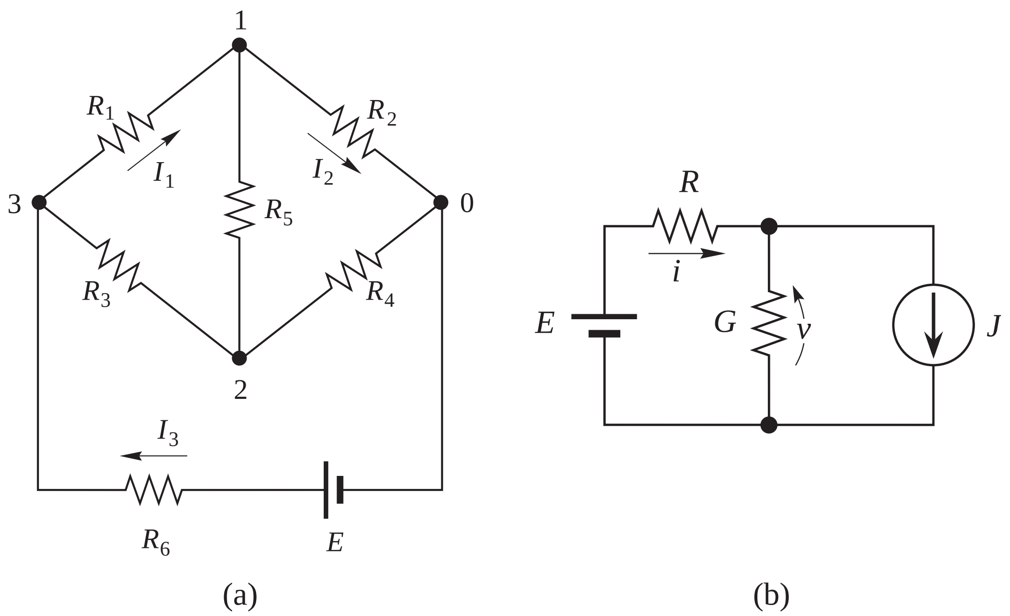


図 A.2　直流回路の例.

- 定常状態と過渡状態

などの概念を理解する必要がある．その後,

- 交流回路の定常状態の解析は，**抵抗を複素数と考えた直流回路**の解析に帰着できる

ことが分かる．その意味で直流回路の解析は基本的と考えられる．

一般に，どのような「からくり」で，交流理論がそのように展開してゆくのか？その理論展開の手法は，魅力的な探求課題といえよう．

A.4　ギルバートからアインシュタインまで

古典的な電気と磁気の理論は，ほぼ 18, 19 世紀の 200 年間で完成された．この理論を作るために参加した数学者や物理学者の名前は，今も種々の物理量の名前として称えられている．図 A.3 参照.

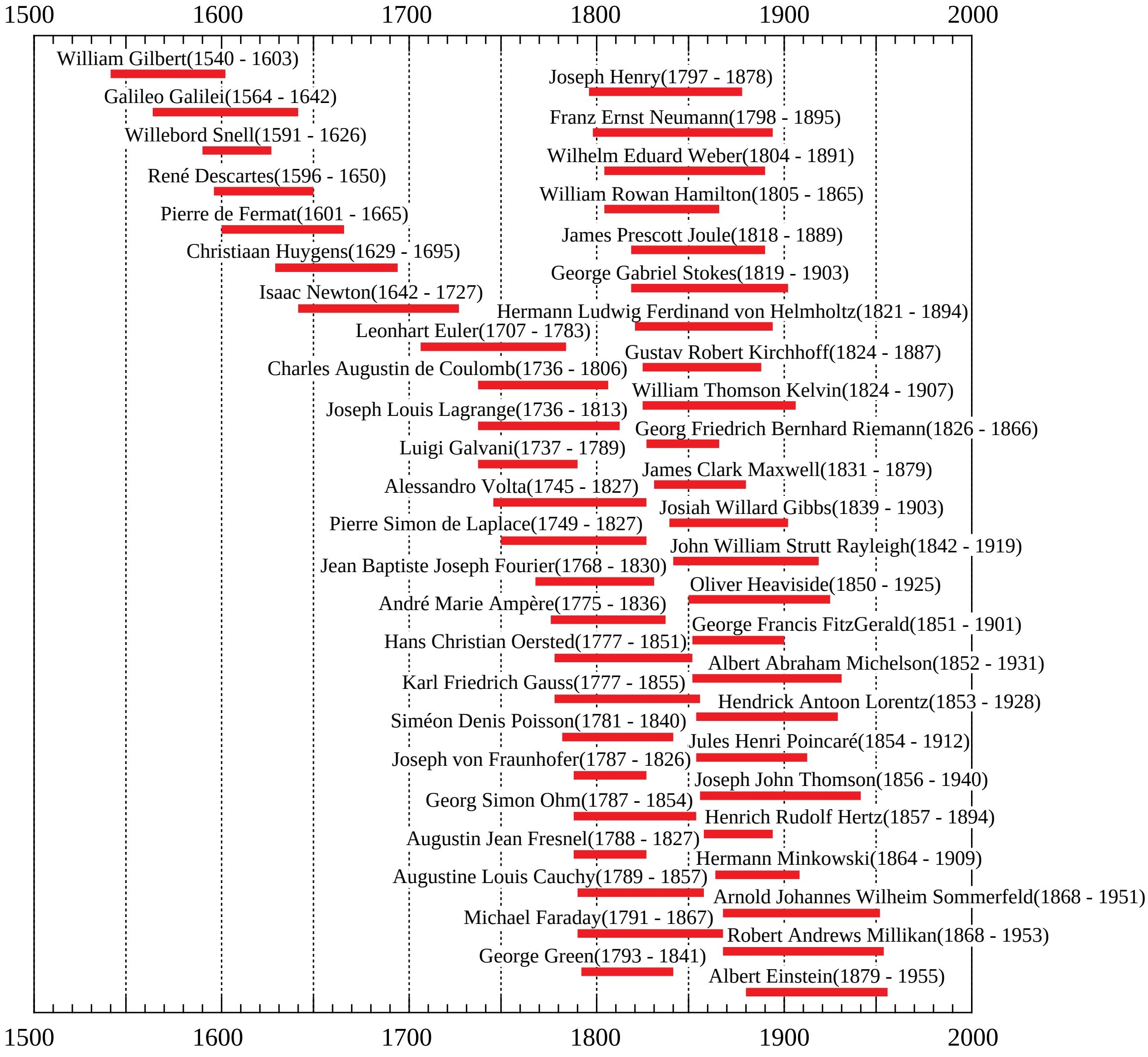


図 A.3　電気と磁気の理論に携わった人たち．

付録 B

おためし回路論

この付録の章では，交流理論で学ぶ回路方程式とそっくりの回路方程式を導くために必要な最小限の回路理論を展開する．名づけて「おためし回路論」という．これは，近頃よくあるコンピュータ・ソフトの「おためし版」に類似している．

B.1 おためし回路論って何なの

A「おためし回路論って，聞いたことがないですねえ」

K「おためし回路とは，素子値に複素数を許した直流回路のことと定義します」

A「それじゃー，記号法を使った交流理論ではないですか」

K「その通りです．ただ，素子値に複素数を許したことの意味とか，交流とのかかわりは一切説明しません．その点が「おためし」の意味と思ってください」

A「で．また何でそんなにまでして「おためし回路」が必要なんですか」

K「一口に言ってしまえば，例題を生産する適当なモデルがほしかったからです．例題としては，複素係数の連立方程式を作りたいのです．そこで，おためしのアイデアにたどりつきました」

A「連立方程式を教えて，係数を複素数に置き換えれば，それでいいのでは無いでしょうか」

K「例題といえども，本物であってほしかったのです．それに，「おためし」と言いながら「気が付いてみると，実は本物の本質を突いていた」なんてことも期待したい気持ちがありました」

A「ちょっと，話題ははずれますが，このノートはもう少し図を増やしてビジュアルにした方がいいように思いますが…」

K「それはそのとおりでしょうね．ただ，最近になって「手取り足取り型教育の必要性」を痛感する傍ら次の疑問に悩んでいます．

- 「文章の多い本を読む力を付けさせる」にはどうすればいいのか
- 「マニュアル型」から「非マニュアル型」への移行には何が必要か

これらは教育方法 FD で検討してみることが必要ではないでしょうか．今回は，試みに文章を増やして図を故意に省略しました」

A「その分，やっぱり分かりにくくなっていますよ」

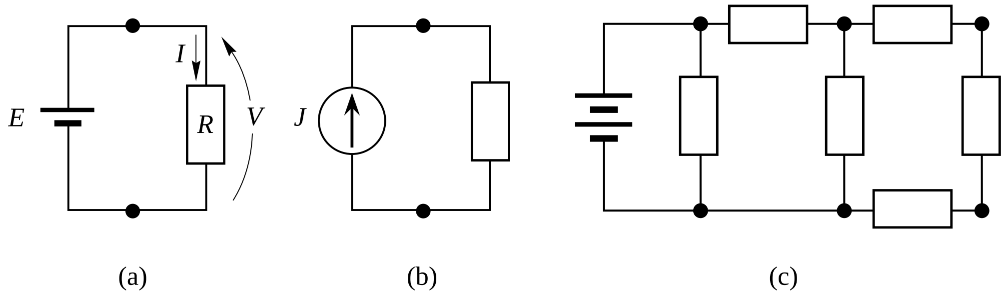


図 B.1　電気回路の例.

B.2　直流回路のお話

引き続く幾つかの節で直流回路ってどんな回路かを説明します．必要のない人は，ぱらぱらっと見て先にお進みください．高校で習ってない人は，とりあえず「すこし真面目に」読んでみましょう．

まずは，ここでいう電気回路の実例を見ていただきましょう．

図 B.1 (a) では，左側に描いた**電池**から 2 本の線が出て，**黒丸の点**で右側の長方形状に描いた**抵抗**から出た線の結ばれている．これが最も簡単な回路の例である．図 (b) では電池が丸の中に矢印のある**電流源**に置き換えられている．図 (c) では，抵抗の数が増え，つなぎ方が複雑となった回路が示されている．

これらの回路を更に説明するために，図の特徴を述べておこう．

1. 電圧を発生する電池，電流を持続させる電流源，それに長方形の箱で示した抵抗を**回路の素子** (circuit element) という．電池は電圧源とも呼ばれ，電池と電流源を合わせて**電源**という．したがって，我々がこれから考える回路は，電源と抵抗の 2 種類の素子から組み立てられる．
2. 素子には 2 本の線が出ており，それらの端の点（**端子** (terminal point) という）でのみお互いにつながっている．これは，素子をどうつなぐかのルールを与える．すなわち，素子は端子でのみ接続される．
3. 各素子には，**電圧** (voltage) と**電流** (current) と呼ばれる 2 つの量がくっついている．図 B.1 (a) の抵抗にその例を示した．V が電圧を，また I が電流を示している．電池では電圧が E である．電流もあるがこの図には示してない．

さて，このような回路で何を問題にするのかを明らかにしておこう．

- 回路に含まれるすべての素子の電圧と，
- 回路に含まれるすべての素子の電流を

求めることを問題とする．たとえば，「この回路で，ここの抵抗に流れる電流は幾ら？」といっ

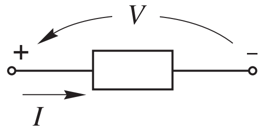


図 B.2　電流と電圧の向き．

表 B.1　電流・電圧とその記法の例

物理量	単位 (physical units)	記法の例
電流	A　アンペア (Ampère)	$I,\ i$
電圧	V　ボルト (Volt)	$V,\ v$

たことを問題とする．

これらの量を求めるためには，回路図が示している電圧と電流についてのルールをはっきりさせておく必要がある．そこで,「素子の性質」と「素子の接続」から決まるルールを与えて電圧・電流の満たす方程式を導こう．

B.3　回路の法則—素子の性質—

B.3.1　素子の電流と電圧の向き

回路素子の性質を表すためには，素子の電圧と電流に**向き** (orientation) を与えておくと都合がよい．この「方向づけ」について，最初に考えておこう．

どの素子についても，電流と電圧の相対的な向きは，図 B.2 に示したように互いに逆方向に測ることとする*1.

B.3.2　電流と電圧の単位

素子の電流・電圧の単位と記法を表 B.1 に示した．記法としては，小文字と大文字どちらを使ってもいいことにしよう．大抵の教科書では大文字を使っている．

B.3.3　抵抗素子の性質—オームの法則—

抵抗 (resistor) とは，電圧と電流の関係が

$$V = RI \tag{B.1}$$

*1 この向き付けについては，簡単なように思われるかも知れないが以外と理解しにくい事柄である．もちろん，電流と電圧を同じ向きに選んで話をすすめる教科書もある．向き付けを変えると，回路の法則を表す方程式の符号がかわる．電気回路では圧倒的多数の人々が図 B.2 に示したような向きを採用している．

表 B.2　抵抗・コンダクタとその記法の例

素　子	単位 (physical units)	素子値の記法の例
抵　抗	Ω　オーム (Ohm)	R　抵抗
コンダクタ	S　ジーメンス (Siemens)	G　コンダクタンス

で表される素子をいう．また，この関係式を**オームの法則** (Ohm's law) という．式 (B.1) の電流と電圧の関係を逆にして

$$I = GV \tag{B.2}$$

と表す場合もある．この場合 $G = \dfrac{1}{R}$ となっている．式 (B.2) の電流と電圧の関係で表された抵抗のことを，区別して使うときは**コンダクタ** (conductor) という．抵抗とコンダクタはいずれも，図 B.2 に示したような長方形の箱で表す．通常，この箱の中あるいは側に素子値を書いておく．

それぞれの式の比例定数[*2]は表 B.2 の呼び名で呼ばれている[*3]．

B.3.4　電圧源と電流源

素子の電圧を固定して一定とする素子が**電圧源** (voltage source) である．電圧源の例に電池がある．また，素子を流れる電流を固定し，一定とする素子のことを**電流源** (current source) という．これらを総称して電源という．電圧源の記号は B.1 (a) に示した電池の記号を使う．また，電流源の記号は B.1 (b) に示した記号を使う．

B.4　回路の法則—接続の性質—

B.4.1　回路と向きのついたグラフ

抵抗と電源をいくつか用意して，その端子どうしを接続すると，1 つの**回路** (circuit) が構成できる．こうして出来上がった回路は，幾何学的には素子をつなぎ合わせて作った網のようになっている．このことから，回路はまた**回路網** (network) とも呼ばれている．

さて，接続の性質だけをみるのであるから，各素子を 1 本の線分に置き換えても差しつかえない．こうして，もとの回路より，接続点と線分からなる図形が得られる．接続点を**節点** (node)，線分を**枝** (branch) と呼ぶ．節点と枝からなる図形を**グラフ** (graph) という．図 B.3 参照．グラフは，対応する回路の素子のつながり具合を与えている[*4]．この幾何学的性質を回路の**トポロ**

[*2] “ 抵抗 ” という単語は，素子としての “ 抵抗器 ” と素子値としての “ 抵抗値 ” の両方の意味で，通常は区別せずに使用している．

[*3] 表は国際単位系の呼び名である．ジーメンスは，ohm を逆にしたモー ℧ とも呼ばれている．

[*4] 「素子がつながっているかどうか」，「どんな風につながっているのか」という情報が，素子の電圧と電流を決める．したがって回路素子の接続を表す情報，すなわちグラフから得られる情報は大切である．

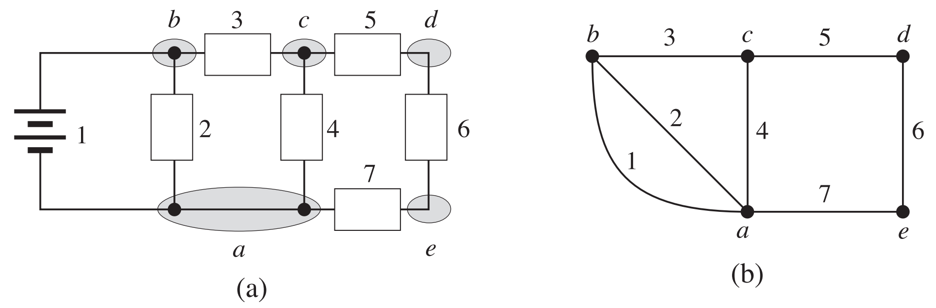


図 B.3 (a) 回路と (b) そのグラフ.

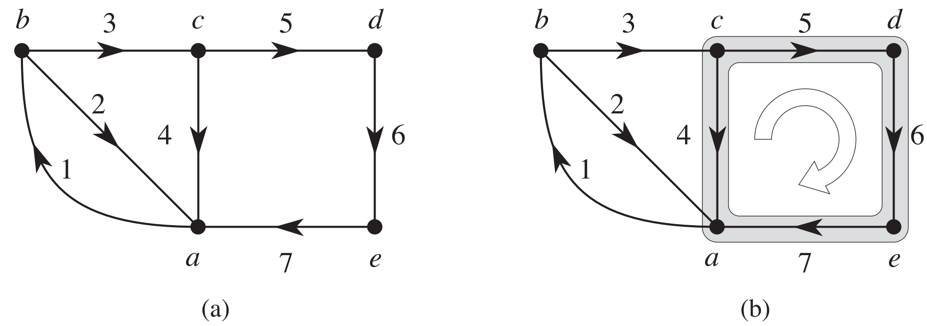


図 B.4 有向グラフ (a) と，ループの例 (b).

ジー (topology) という.

そこで，回路から得られたグラフにおいても，各枝に枝電流，枝電圧（枝の両端に接続された節点間の電圧）を考えておく．枝の向きは，たとえば素子電流にあわせて選んでおこう．図 B.4 (a) 参照．枝に向きのついたグラフを**有向グラフ** (oriented graph) という.

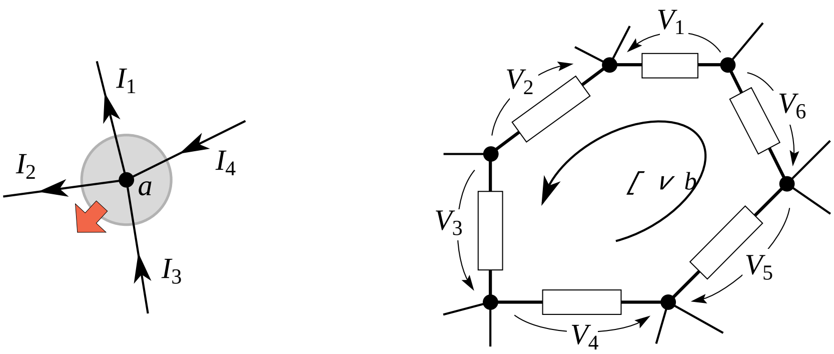
回路中のある節点から，枝を次々と経由して節点をたどってゆき，一周りして最初の節点にもどるとき，経由した枝の集合を**閉路**または**ループ** (loop) という．たとえば，図 B.4 (b) における枝の集合 $\{4, 5, 6, 7\}$ はループである．ループにも，一巡する方向によって向きを与えておく．たとえば，閉路 $\{4, 5, 6, 7\}$ の向きを時計回りが正とすると，枝 5, 6, 7 は正の向き，枝 4 は逆の向きとなる.

B.4.2 キルヒホッフの電流則

任意の回路を考えよう．この回路の各節点に対して，この節点から流出する電流の総和は零に等しい．これを**キルヒホッフの電流則** (Kirchhoff's current law，略して **KCL**) という．この法則は，各節点において電流が連続である，すなわち流出量だけ流入量がある，ことを言い表わしたものである．たとえば，図 B.5 (a) の節点 a では，次式が成り立つ.

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0 \tag{B.3}$$

が成り立つ.



(a)　　(b)

図 B.5　節点 a の KCL: $I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$ (a) と，ループ b の KVL: $V_1 - V_2 + V_3 + V_4 - V_5 - V_6 = 0$ (b).

B.4.3　キルヒホッフの電圧則

任意の回路を考えよう．この回路中の各ループに対して，ループを一巡する電圧の総和は零に等しい．たとえば図 B.5 (b) のループでは

$$V_1 - V_2 + V_3 + V_4 - V_5 - V_6 = 0 \tag{B.4}$$

が成り立つ．これを**キルヒホッフの電圧則** (Kirchhoff's voltage law，略して **KVL**) という．

B.5　回路方程式

B.5.1　方程式の個数について

回路が 1 つ与えられたとしよう．回路は連結*5しているものを考える．このとき関係した方程式は何個立てられるであろうか．この問題を簡単にみておこう．いま，この回路の素子の数（したがって対応するグラフの枝の数）を b 個，節点の数を n 個としよう．式の数はつぎのとおりとなる．

- b 個の各枝について，オームの法則あるいは電源の性質から 1 つづつ式が得られる．これらは合わせて b 個となる．
- n 個の各節点について，キルヒヒッホフの電流則が成り立つ．したがって n 個の電流に関する一次同次式が得られる．ただし，ちょっと考えると 1 つの方程式は，他の $n-1$ 個の式から導けることが分かる．したがって，互いに独立した式の個数は $n-1$ 個である．
- キルヒヒッホフの電圧則から，電圧に関する一次同次式が得られる．独立な式の個数は

*5 対応するグラフがつながっている回路を連結した回路という．ばらばらに離れた回路は，それぞれの離れた回路 1 つ 1 つは連結しているので，それぞれについて考えるとよい．

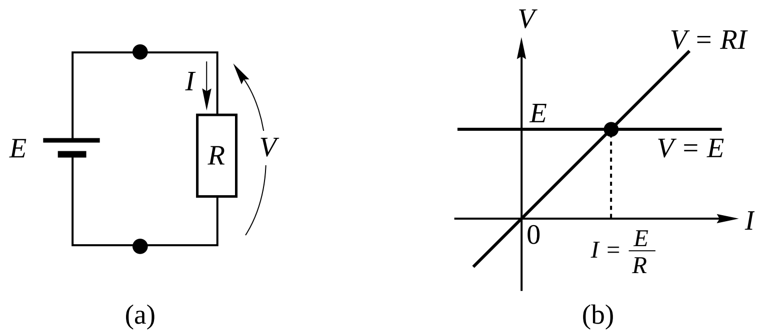


図 B.6　電源と抵抗からなる回路 (a) と，解 (b).

$b-(n-1)=b-n+1$ 個である[*6].

したがって，式の総数は $b+(n-1)+(b-n+1)=2b$ 個となることが分かる．

他方，変数である枝電圧と枝電流の個数は，1 つの枝につき 2 個あるから全体で $2b$ 個である．

したがって，未知数の個数と式の個数が等しいので，解は一般にただ一つに決定される．

例 5.1

図 B.6(a) の回路において，抵抗 R を流れる電流を求めよ．

解　電圧源 E[V] が接続されているので，抵抗 R の電圧は E[V] となる．このことからオームの法則は

$$E=RI \tag{B.5}$$

となる．したがって，抵抗を流れる電流 I は

$$I=E/R \tag{B.6}$$

である．この電流は，電圧源を流れる電流でもある．一般に回路の構成が定まると，任意の値であった電圧源を流れる電流が一意的に定まる．

式 (B.6) の電流は，抵抗特性 $V=RI$ と電圧源を与える式 $V=E$ を連立させた連立方程式の解と考えられる．これを VI 平面上のグラフとして描くと，図 B.6(b) となる．特性を表わす 2 直線の交点が解 (B.6) を与えている．

さて，上で考えたことでこの問題は解けたのであるが，もう少し詳しく調べてみよう．この回路では素子の数が $b=2$，節点の数が $n=2$ の回路である．

各素子の特性を表す 2 つの式は，図 B.7 の電圧・電流を使って次式となる．まず，抵抗についてオームの法則より

$$V_1=RI_1 \tag{B.7}$$

を得る．また，電池の特性は

$$V_2=E \tag{B.8}$$

[*6] この個数を見出すことはすこし難しいかもしれない．いずれ分かるときがくると思う．それまで答えは保留しておこう．

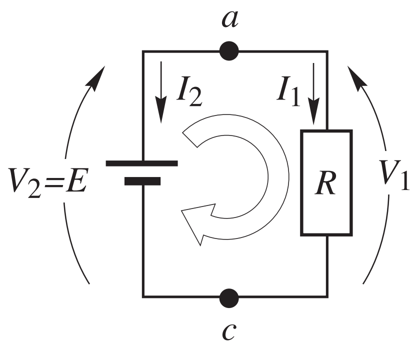


図 B.7　電源と抵抗からなる回路．

である．

キルヒッホフの電流則は，節点 a において次式となる．

$$I_1 + I_2 = 0 \tag{B.9}$$

なお，節点 c においては $-I_1 - I_2 = 0$ となり，これは上式の符号を変えた式に他ならないから，電流則からは $n-1=2-1=1$ 個に式が導かれることも分かる．

次に，電圧則はループが 1 つしかないので[*7]図に示した矢印に沿った電圧則は次式となる．

$$-V_1 + V_2 = 0 \tag{B.10}$$

以上，式 (B.7) から式 (B.10) までの 4 つの式を連立させると，先に求めた解を得る．このことから，最初の解法では式 (B.8) を式 (B.10) に代入し，その結果を式 (B.7) に代入して式 (B.5) を得たことが分かる．使わなかった式 (B.9) は，電池を流れる電流が問題となった時点で使えばよい．このように最初の解法は，変数を I_1 のみとし，1 変数の方程式としているところが，うまい解き方であると言える．

B.5.2　網目解析

ループ電流と KVL を使って回路方程式を簡単に導出する方法がある．これを紹介しておこう．

まず，**ループ電流** (loop current) を定義しよう．これは，単にループに沿って流れる電流である．ループ電流を仮定すると，任意の節点において KCL は自動的に満足され，したがってループに沿って KVL を使って方程式を求めればよい．

手順は，次のようにまとめることができる．

1. 互いに独立なループのループ電流を回路の未知変数に選ぶ．
2. 各枝の枝電流は，この枝を流れるループ電流の代数和として表わすことができる．このことと抵抗特性を使って，各枝電圧をループ電流で表わしておく．

[*7] $b-n+1=2-2+1=1$ となって独立なループは確かに 1 つであることが分かる．

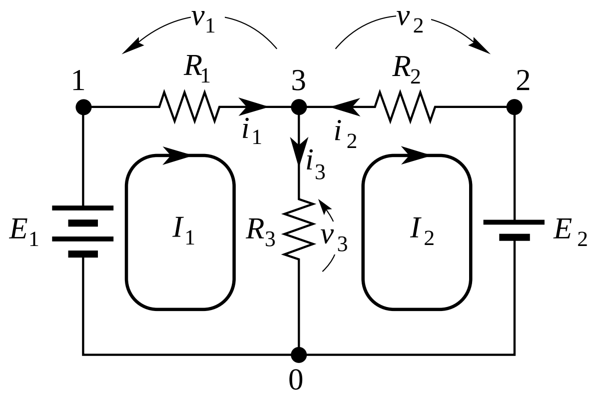


図 B.8　同じ向きの網目電流を考える．

3. KVL によって，ループに沿った枝電圧の関係式を求める．
4. 2. の枝電圧の式を 3. で求めた KCL の式に代入する．ループ電流を未知変数とした回路方程式が得られる．
5. 4. で得られたループ電流に関する連立方程式を解く．

この解法は，**網目解析法** (mesh analysis) と呼ばれている．ループと網目は同じ意味で使われている．独立な網目の向きを，すべて同じ向き（たとえば，右まわり）に選ぶと，式を自動的に導き出すことができる．

例 5.2

問題 2.2.2 で取り上げた回路について，網目電流を使って回路方程式を導け．

解　図 B.8 の 2 つの網目を考え，それぞれの網目電流を図のように I_1, I_2 とする（手順 1）．網目の向きを右まわり（時計まわり）と選んであることに注意すること．各枝電流は

$$\begin{aligned} i_1 &= I_1 \\ i_2 &= -I_2 \\ i_3 &= I_1 - I_2 \end{aligned} \tag{B.11}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 i_1 = R_1 I_2 \\ v_2 &= R_2 i_2 = -R_2 I_2 \\ v_3 &= R_3 i_3 = R_3(I_1 - I_2) \end{aligned} \tag{B.12}$$

と書ける（手順 2）．2 つのループに対して KVL は

$$\begin{aligned} E_1 - v_1 - v_3 &= 0 \\ v_2 + v_3 - E_2 &= 0 \end{aligned} \tag{B.13}$$

となる．式 (B.13) に式 (B.12) を代入して，整理すると

$$\begin{aligned} (R_1+R_2)I_1 - R_3 I_2 &= E_1 \\ -R_3 I_1 + (R_2+R_3) I_2 &= -E_2 \end{aligned} \tag{B.14}$$

を得る（手順 3）．これが網目電流に関する回路方程式である．

【注意 1】　式 (B.14) をベクトルと行列を用いて表わすと

$$\mathbf{RI} = \mathbf{E} \tag{B.15}$$

となる．ここに

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1+R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2+R_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 \\ -E_2 \end{bmatrix}$$

である．$\mathbf{R}$ は抵抗行列と呼ばれ，対称行列となる．

【注意 2】　網目方程式 (B.14) についても，回路図をみながら，次のように機械的に導くことができる．すべての網目を同じ向き（この例では時計まわり）に選び，各網目で KVL を考える．このとき，2 つの網目にはさまれた枝電流は，両網目電流の差として表される．さて，網目 1 で KVL は

$$(R_1+R_3)I_1 - R_3 I_2 = E_1 \tag{B.16}$$

となる．この式の左辺第 1 項 I_1 の係数は，網目 1 に沿って一周したとき，ループを構成する 3 本の枝の抵抗を加えた値となっている．ただし電圧源の枝の抵抗は 0 である．他方，第 2 項の係数は，抵抗 R_3 には I_1 以外に，隣接した網目電流 I_2 が逆向きに流れていることから付加されている．また，右辺はループに沿った電圧源の値の代数和であり，ループの方向と一致するときは正，一致しないときは負と考える．各網目について同様な手順で KVL を導けばよい．

B.6　回路の複素化—インピーダンス—

おためし回路の本質は，素子の値に複素数を許すことである．このことを説明しよう．図 B.9 の回路を考えよう．ここでは抵抗の値を複素数と考える．この点だけがこれまでの回路と違っている．

いま，この複素抵抗を次式とする．

$$Z = R + jX \tag{B.17}$$

ここに，これまで R と書いてきた抵抗を，改めて Z と書き，その実部を R，虚部を X と書いた．実数で表した抵抗と，複素数の抵抗を区別する意味で，Z を**インピーダンス** (impedance) と呼ぶことにしよう．したがって，インピーダンスは，その実部がこれまでの抵抗を，虚部が「新しい何物か」の抵抗を表している．この虚数部の X を**リアクタンス** (reactance) という．

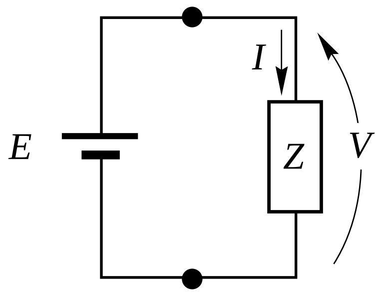


図 B.9 電源と複素抵抗からなる回路.

とりあえず，このことによって何が変わるかみてみよう．計算は，これまでの実数で行ったのと同じ計算が可能である．そこで，流れる電流は

$$E = ZI \tag{B.18}$$

を解いて，次式となる．

$$I = \frac{E}{Z} \tag{B.19}$$

このままでは何ら変わりが見えないが，もう少し計算してみよう．

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{R + jX} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + X^2}e^{j\phi}} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + X^2}}e^{-j\phi} \tag{B.20}$$

ここに，ϕ は，

$$\phi = \tan^{-1}\frac{X}{R} \tag{B.21}$$

を表す．したがって当然なのだが，電流にも実部と虚部が現れた．

ここで，インピーダンスの逆数 Y を定義しておこう．$Y = \dfrac{1}{Z}$ は，**アドミタンス** (admittance) と呼ばれ，次式となる．

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}}e^{-j\phi} \tag{B.22}$$

すると，式 (B.20) は，単に

$$I = YE \tag{B.23}$$

とも書ける．

最後に，おためし回路と通常の回路の対応の一つとしてインピーダンスが具体的に普通の回路ではどう表されているのかを見ておこう．通常の回路では，回路素子を 3 種類考え，それぞれに表 B.3 の呼び名をつけて区別している．ここで，抵抗は実数のときと同じである．インダクタとキャパシタについては，インピーダンスがいずれも純虚数の素子として定義されていることに注意しよう．そして，インダクタとキャパシタは，インピーダンスとアドミタンスが互いに逆の特性となっている．

表 B.3　複素抵抗素子の分類

素子名	インピーダンス Z	アドミタンス Y	素子値の記法の例
抵　抗	$Z = R$	$Y = G$	$R\ [ohm]$　抵抗
インダクタ	$Z = j\omega L$	$Y = \dfrac{1}{j\omega L}$	$L\ [henry]$　インダクタンス
キャパシタ	$Z = \dfrac{1}{j\omega C}$	$Y = j\omega C$	$C\ [farad]$　キャパシタンス

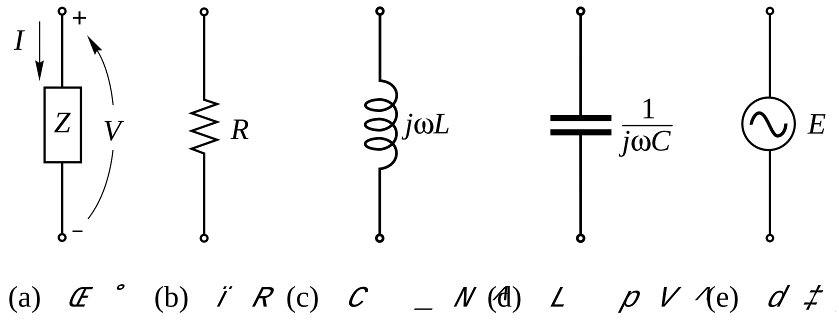


図 B.10　インピーダンスと電圧源のシンボル記号.

なお，インダクタとキャパシタのインピーダンスとアドミタンスに現れる ω はここでは説明しないが，交流回路に印加された正弦波電源の角周波数に対応していて，いつも虚数単位 j とくっ付けて $j\omega$ の形で使用する．また， $R,\ L,\ C > 0$ である．

回路図では，3 種類の素子を区別するには図 B.10 のシンボルを使っている．

例 5.3

図 B.11 の回路において，抵抗 R を流れる電流を求めよ．

解　まず，図 B.10 のシンボルに対応する素子のインピーダンスを書きこみ，電流と電圧を図中のように定める．すると，各素子の電流・電圧特性は次式となる．

$$
\begin{aligned}
V_R &= RI \\
V_L &= j\omega LI \\
V_C &= \frac{1}{j\omega C}I
\end{aligned}
\qquad \text{(B.24)}
$$

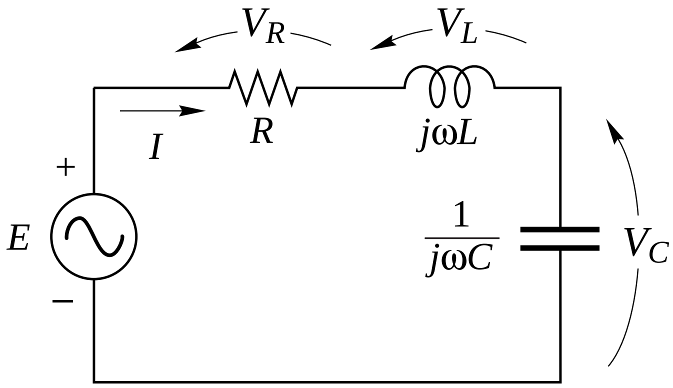


図 B.11　電源と複素抵抗からなる回路.

したがって，キルヒッホフの電圧則より

$$
\begin{aligned}
E &= V_R + V_L + V_C \\
&= RI + j\omega LI + \frac{1}{j\omega C} I \\
&= \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) I \\
&= ZI
\end{aligned}
\tag{B.25}
$$

ここに，

$$
Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \tag{B.26}
$$

とおいた．したがって，流れる電流は次式となる．

$$
I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{E}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \tag{B.27}
$$

更に，整理すると

$$
I = \frac{E e^{-j\phi}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \tag{B.28}
$$

となる．ここに

$$
\phi = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \tag{B.29}
$$

とおいた．式 (B.28) は

$$
X = \omega L - \frac{1}{\omega C}
$$

とおくと，式 (B.20) に一致する．

例 5.4

図 B.12 の回路において，図中の電流 I_L，I_C，I_G を用いて回路方程式を立てなさい．

解　まず，節点 a におけるキルヒッホフの電流則より

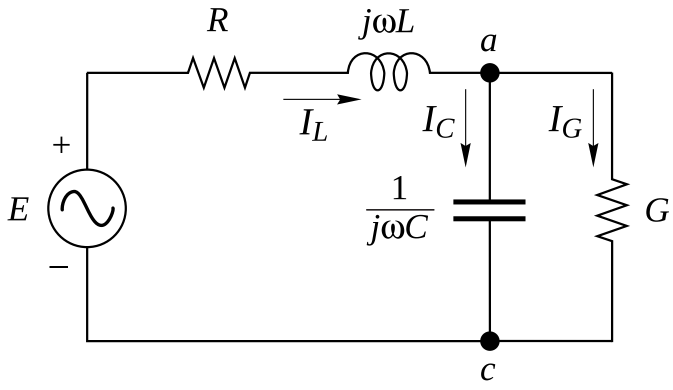


図 B.12　電源と複素抵抗からなる回路.

$$I_L = I_C + I_G \tag{B.30}$$

を得る．次に，左右 2 つのループについてのキルヒッホフの電圧則より次式を得る．

$$\begin{aligned} (R + j\omega L) \quad I_L \quad &+ \frac{1}{j\omega C} I_C = E \\ \frac{1}{j\omega C} I_C = \quad &\frac{1}{G} \quad I_G \end{aligned} \tag{B.31}$$

これで，3 つの電流に関する 3 つの方程式が得られた．これらの解については**例題 3.3.1** を参照.

付録 C

問題の解答例

この章に示されている解答は，あくまで解答の一例です．あるいは誤った解答もあるかも知れません．それを判断するのはあなた自身です．そのつもりで参考にしてください．

C.1　第１章の問題

C.1.1　２次方程式の解

【問題 1.1.1**】**

まず，$a \neq 0$ と仮定して考える．そうでなければ，２次方程式にならないから．そこで，因数分解することで解を求めることにしよう．

式 (1.1) を a で割った式を因数分解する．

$$
\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left\{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right\} \\
&= \left\{x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}\left\{x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\} = 0
\end{aligned}
\tag{C.1}
$$

この式から解の公式 (1.6) を得る．

【問題 1.1.2**】**

1. $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = -1.618,\ 0.618$　2. $x = -0.010001,\ -99.99$　3. $x = -\zeta \pm j\omega$

【問題 1.1.3**】**

$c^2 - ab < 0$

C.1.2　関数とグラフ

【問題 1.2.1】

好きなように説明してください．意外と説明は難しいのではないかなー？平行移動のような，一見明らかな事柄をどう説明したらいいのだろう．

【問題 1.2.2】

1. 関数 $y = -f(x)$ のグラフは $\mathbf{G}$ を x 軸で反転したグラフとなる．
2. 関数 $y = f(-x)$ のグラフは $\mathbf{G}$ を y 軸で反転したグラフとなる．
3. 関数 $y = -f(-x)$ のグラフは $\mathbf{G}$ を原点を中心に 180 度回転したグラフとなる．

【問題 1.2.3】

長方形の一辺を x とすると面積 S は $S = x(\dfrac{\ell}{2} - x)$ となる．このグラフを描くと，放物線の区間 $x = [0,\ \dfrac{\ell}{2}]$ の部分を見れば分かるように，$x = \dfrac{\ell}{4}$ で S は最大となり，最大値は $S_{max} = \dfrac{\ell^2}{4}$ である．

【問題 1.2.4】

そもそも，このような問題がどうしてこんなところに出題されているのだろうか．と考えると，そしてまた $y = 5t(4-t)$ であることを見ると，「なーんだ【問題 1.2.3】と同じではないか」ということになる．

最も高い位置に達するのは 2 秒後で，高さは 20 m，手元に帰るのは 4 秒後で，$y' = -10t + 20$ より，速度は -20 m/sec となる．

もちろん，正攻法で関数の最大値をちゃんと計算することも大切である．

【問題 1.2.5】

省略します．一般に，x の関数，y の関数といった場合に，xy-平面にどのようなグラフが描かれるのか，はっきりさせておきましょう．

【問題 1.2.6】

$y = b$ の場合です．これは x の関数といえない唯一の一次関数です．

C.1.3　関数の微分と積分

【問題 1.3.1】

1. とりあえず，数回微分してみよう．

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}, \quad \frac{d^2x^n}{dx^2} = n\,(n-1)\,x^{n-2}, \quad \frac{d^3x^n}{dx^3} = n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3} \qquad \text{(C.2)}$$

このことから，$n \geq r$ の場合，次式となる．

$$\frac{d^r x^n}{dx^r} = n\,(n-1)\cdots(n-r+1)\,x^{n-r} \tag{C.3}$$

2. 前問の組み合わせと考えられます．自分でやってみましょう．
3. $$\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}, \quad \frac{d^2 e^{ax}}{dx^2} = a^2 e^{ax}, \quad \cdots, \quad \frac{d^n e^{ax}}{dx^n} = a^n e^{ax} \tag{C.4}$$
4. $$\begin{aligned} \frac{d\sin ax}{dx} &= a\cos ax, \quad \frac{d^2 \sin ax}{dx^2} = -a^2 \sin ax \\ \frac{d\cos ax}{dx} &= -a\sin ax, \quad \frac{d^2 \cos ax}{dx^2} = -a^2 \cos ax \end{aligned} \tag{C.5}$$

【問題 1.3.2】

1. $$\{f(x)g(x)\}'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \tag{C.6}$$

   なので，

   $$\{f(x)g(x)\}^{(3)} = 3g'(x)f''(x) + 3f'(x)g''(x) + g(x)f^{(3)}(x) + f(x)g^{(3)}(x) \tag{C.7}$$
2. $$\{f(x)g(x)h(x)\}' = g(x)h(x)f'(x) + f(x)h(x)g'(x) + f(x)g(x)h'(x) \tag{C.8}$$
3. $$\{f(g(x))\}'' = f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x) \tag{C.9}$$

   なお，次の公式が成り立つ．

   $$\{f(g(x))\}^{(3)} = f^{(3)}(g(x))g'(x)^3 + 3f''(g(x))g''(x)g'(x) + f'(g(x))g^{(3)}(x) \tag{C.10}$$

   $$\{f(g(x))\}^{(m)} = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+mk_m=m} \frac{m!}{\prod_{j=1}^{m} (j!)^{k_j}\, k_j!} f^{(\sum_{i=1}^{m} k_i)}(x) \prod_{i=1}^{m} \left(g^{(j)}(x)\right)^{k_j} \tag{C.11}$$

【問題 1.3.3】

1. $$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \tag{C.12}$$
2. $$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \tag{C.13}$$
3. $$\int \frac{1}{x} dx = \log x \tag{C.14}$$

4.

$$\int \sin x dx = -\cos x \tag{C.15}$$

5.

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax \tag{C.16}$$

6.

$$\int e^{-ax}\sin bx dx = -e^{-ax}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\sin bx + \frac{b}{a^2+b^2}\cos bx\right) \tag{C.17}$$

C.1.4　集合演算と論理演算

【問題 1.4.1**】**

1. まず，前提「$A=$ 他人の田の稲を刈り取ってこい」がまちがっているのだから，「$B=$ どこだって刈り取ってよい」を結論としようと，その否定 $\neg B$ を結論としようと，この命題「$A \Rightarrow B$」は正しい.
2. 「$B=$ どこだって刈り取ってよい」ということは明らかに間違った命題である.
3. 「この 1. の理屈「$A \Rightarrow B$」は正しいが，2. の結論 B は正しくない」は，たいそうおもしろいと兼好法師は結論した.

C.2　第 2 章の問題

C.2.1　1 次関数

【問題 2.1.1**】**

図 2.6(a) 参照.

【例題 2.1.1**】**

抵抗の特性については，高校物理からなじみのある事柄である．付録 A, B を参照．電気回路に抵抗素子が組み入れられていることは，回路モデルのひとつの特長と考えられる．機械力学では，抵抗は「まさつ」に対応し，速度に比例した力を生じ，運動を減衰させる効果がある．電気振動についても同様に，減衰させる働きがある．このことが回路の動的性質に，安定な定常状態があるなど，定性的な特長をもたらしている.

【問題 2.1.2**】**

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 &= 30x_1 + 150x_2 + 80x_3 \end{aligned} \tag{C.18}$$

【問題 2.1.3**】**

式 (3.44) から求めなさい.

【問題 2.1.4】

$$z = \sum_{k=1}^{3} x_k - \sum_{k=1}^{8} y_k \tag{C.19}$$

【問題 2.1.5】

付録 A, B の Kirchhoff 法則の項を参照.

$$0 = \sum_{k=1}^{m} i_k - \sum_{k=1}^{n} j_k \tag{C.20}$$

【問題 2.1.6】

例題 2.1.1 の場合がスカラー方程式なのでそのままでよい．逆に，式 (2.5) をベクトル方程式と考えると，

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & & R_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & R_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} = Ri \tag{C.21}$$

と書ける．ところで，この場合，式 (2.5) における $R > 0$ の条件（抵抗は正値である）はどう考えたらいいのだろうか.

例題 2.1.2 の場合は，式 (2.13) より，次式と表すことができる．

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{C.22}$$

【問題 2.1.7】

$$1.\quad \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 0 & 22 \end{bmatrix},\quad 2.\quad \begin{bmatrix} 1 & s+t \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad 3.\quad \begin{bmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{bmatrix}$$

$$4.\quad \begin{bmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix}\quad 5.\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

特に，4 と 5 の行列については，行と列の入れ替えルールの具体的な例となっている．このルールを見抜いてほしい.

【問題 2.1.8】

たとえば，行列の積に関する $(AB)C = A(BC)$ をみるには，計算例として

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

としたとき，両辺を計算すると次式となる．互いに等しいことがわかる．

$$(AB)\,C =$$
$$\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})\,c_{11} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})\,c_{21} & (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})\,c_{12} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})\,c_{22} \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})\,c_{11} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})\,c_{21} & (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})\,c_{12} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})\,c_{22} \end{bmatrix}$$

$$A\,(BC) =$$
$$\begin{bmatrix} a_{11}\,(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{12}\,(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{11}\,(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{12}\,(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \\ a_{21}\,(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{22}\,(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{21}\,(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{22}\,(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \end{bmatrix}$$

C.2.2　連立 1 次方程式

【問題 2.2.1】

鶴と亀の個体数の和を 10 匹，足の総和を 28 本とするとどうなるでしょうか．鶴が 6 匹，亀が 4 匹となります．

【問題 2.2.2】

この問題にある回路方程式が得られる回路例については，付録 A【回路例 1.1】を参照．

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)\,E_1 - R_3E_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}, \quad I_2 = \frac{(R_1 + R_3)\,E_2 - R_3E_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \tag{C.23}$$

【問題 2.2.3】

$-47, \quad a_{11}a_{22}a_{33}, \quad -a_{13}a_{22}a_{31}$

【問題 2.2.4】

$0, \quad 0, \quad 1, \quad a^2\,(c-b) + b^2\,(a-c) + c^2\,(b-a)\,, \quad a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$

$aef + 2bcd - ad^2 - ec^2 - fb^2, \quad 0, \quad ab + bc + ca + abc$

【問題 2.2.5】

1.　$x = \dfrac{37}{77},\ y = -\dfrac{3}{11},\ z = \dfrac{27}{77}$

2.　この問題にある回路方程式が得られる回路例については，付録 A【回路例 1.2】の図 A.2(a) を参照．回路方程式の導出には，付録 B.5.2 のあみめ解析の方法を用いるとよい．

$$\begin{aligned} \Delta \;=\; & R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4 + R_1R_3R_5 + R_2R_3R_5 + R_1R_4R_5 + R_2R_4R_5 \\ & + R_1R_2R_6 + R_2R_3R_6 + R_1R_4R_6 + R_3R_4R_6 + R_1R_5R_6 + R_2R_5R_6 + R_3R_5R_6 + R_4R_5R_6 \end{aligned} \tag{C.24}$$

と置くと，解は次式となる．

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\Delta}(R_2R_3 + R_3R_4 + R_3R_5 + R_4R_5)E \\
I_2 &= \frac{1}{\Delta}(R_1R_4 + R_3R_4 + R_3R_5 + R_4R_5)E \\
I_3 &= \frac{1}{\Delta}(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_4 + R_3R_4 + R_1R_5 + R_2R_5 + R_3R_5 + R_4R_5)E
\end{aligned}
\tag{C.25}
$$

C.2.3　ベクトルと行列の幾何学的意味

C.2.4　連立 1 次方程式の解の重ね合わせ

【問題 2.4.1**】**

【問題 2.2.5】の 1. と同じ解となる．

【例題 2.4.1**】**

この例題にある回路方程式が得られる回路例については，付録 A 【回路例 1.2】の図 A.2(b) を参照.

C.3　第 3 章の問題

C.3.1　複素数はどこから生まれたのか

【問題 3.1.1**】**

$z = a+bj$, $w = c+dj$ としよう．$\bar{z} = a-bj$ であるから，$z\bar{z} = (a+bj)(a-bj) = a^2-b^2j^2 = a^2+b^2$ となる．一方，$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ であるから，$z\bar{z} = |z|^2$ となる．

$|zw|^2 = (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = |z|^2|w|^2$

$|z+w| \le |z| + |w|$ は，複素平面でベクトル z と w のそれぞれの長さの和は $z+w$ のそれより長いという，いわゆる 3 角形の 2 辺の和は他の一辺の長さより大きいという事実を述べている．$|z+w| = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ と $|z|+|w| = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$ を 2 回ほど平方して両式を比較すれば結果が得られる．

【問題 3.1.2**】**

$-3+5j, \quad -2+2j, \quad -j, \quad \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}j, \quad \dfrac{5}{13}-\dfrac{12}{13}j$

【問題 3.1.3**】**

$-4, \quad \sqrt{5}, \quad -j\sqrt{3}, \quad \dfrac{1}{\sqrt{2}}+j\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

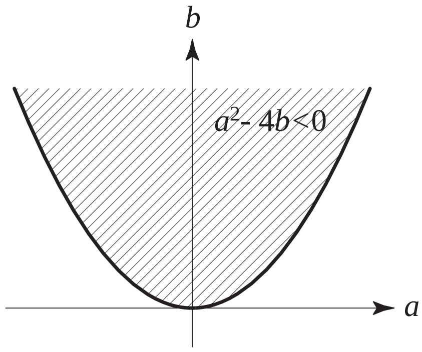


図 C.1 複素解となる ab 平面の領域（斜線の領域）.

【問題 3.1.4】

この問題は最初に復習した高校の問題なので省略する．意外とこんな問題の中にあなたには気づかないおもしろい事実があったりして，見過ごしがちであることを付記しておこう．たとえば，$x^3+1=0$ から $x^2-x+1=0$ が導かれるので，この解は -1 の 3 乗根の 2 つの複素解である．

【問題 3.1.5】

図 C.1 参照.

C.3.2 複素平面

【問題 3.2.1】

$45°$，$-45°$，$-135°$，$135°$

C.3.3 複素係数の連立 1 次方程式

【例題 3.3.1】

この方程式は，付録 B 例題 5.4 の図 B.12 に示した回路から得られた.

C.3.4 複素関数

C.3.5 指数関数と三角関数

【問題 3.5.1】

たとえば $\sin x$ の例で手順を説明しよう.

$$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{C.26}$$

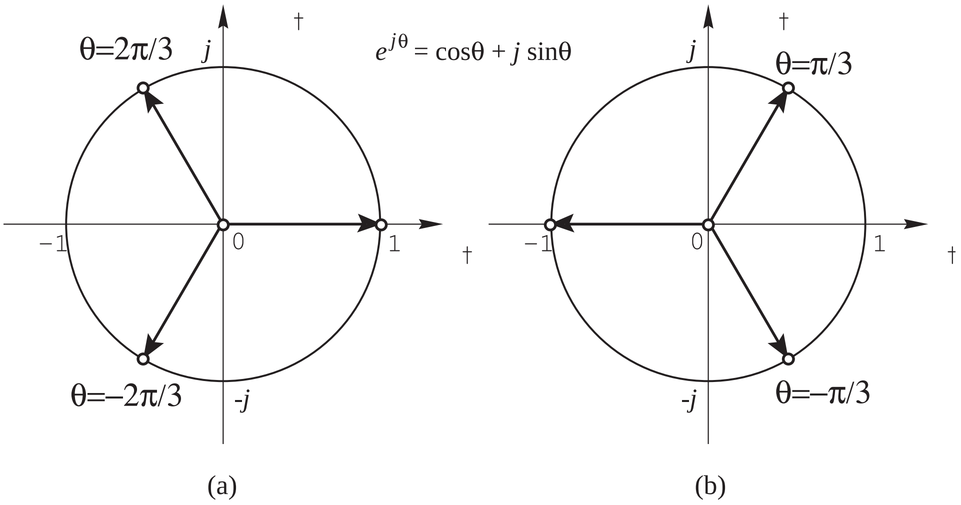


図 C.2　$z^3 = 1$ の解 (a), と $z^3 = -1$ の解 (b).

と仮定し，両辺を 2 回微分し，係数を比較する．漸化式

$$a_{2k} = -(2k+1)(2k+2)a_{2(k+1)},\ (k=0,2,\ldots);\ \ a_{2k-1} = -2k(2k+1)a_{2k+1},\ (k=-1,2,\ldots) \tag{C.27}$$

を得る． $\sin 0 = a_0 = 0$, $\cos 0 = a_1 = 1$ を初期値として，各 $a_{2k} = 0$, $a_{2k-1} = (-1)^{k-1}/(2k-1)!$ と決定できる．

【問題 3.5.2】

単位円上の複素数は，おもしろい性質を持っていて応用面でも大変重要である．$z^3 = 1$ の解と $z^3 = -1$ の解を複素平面の単位円上に描くと，それぞれ図 C.2 (a) と (b) となる．この問題では $1 = e^{j2\pi n}$ であること，また $-1 = e^{\pm j\pi + j2\pi n}$ であることを使うと簡単に解が求められる．$z^3 = 1$ の解は

$$z^3 = 1 \ \Rightarrow\ z^3 = e^{j2\pi n} \ \Rightarrow z = e^{j\frac{2\pi n}{3}} \ \Rightarrow z = 1(n=0),\ e^{j\frac{2\pi}{3}}(n=1),\ e^{j\frac{4\pi}{3}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}}(n=2)$$

と求められる． $z^3 = -1$ の解も同様である．

【問題 3.5.3】

1. は式 (3.40) の $\cos 2\theta$ の公式を 2 度使って示すことができる．

$$\cos^4\theta = \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left\{1 + 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right\} = \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3)$$

2. から 5. は式 (3.39) を組み合わせて導かれる．

C.4　第 4 章の問題

C.4.1　正弦波

【問題 4.1.1】

位相差の計算は，「進み」だ「遅れ」だと，時として簡単な計算なのに頭が混乱することがある．とにかく基準波形の表現に比較する波形の表現を合わせることだ．たとえば，基準波形が sin であれば，比較する波形は sin に表現を合わせる．公式

$$\cos A = \sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right), \quad \sin A = \cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right)$$

はこの作業のときに役立つ．

1. は基準波形，比較波形ともに cos だから，単に角度の引き算で計算できる．$\pi/3 - (-\pi/6) = \pi/2$ となり，位相差は $\pi/2$ である．

2. は，

$$\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

となることを使って，$y(t) = \sin(\omega t + \frac{5\pi}{6})$ と表現を $x(t)$ に合わせてから，角度を比較する．$5\pi/6 - (-\pi/6) = \pi$ となる．π の場合は遅れとも進みとも解釈できる．なお，位相差を機械的に行う方法については，4.2.2 にその計算の仕方が述べてあります．

【問題 4.1.2】

1. $\cos\omega t + \sin\omega t = \sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$, $\sqrt{3}\sin\omega t - \cos\omega t = 2\cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$,

$$\sqrt{3}\cos\omega t - \sin\omega t = 2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

2. 問題の式$= E\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\cos(\omega t - \theta)$, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R}$ を使うと計算できる．

【問題 4.1.3】

$$\frac{5}{\sqrt{2}}, \quad \frac{200}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2}$$

C.4.2　複素正弦波の満たす微分方程式

【問題 4.3.1】

本文に述べたことから，式 (4.25) の虚数部を取り出せばよい．

$$z(t) = \frac{A}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}\sin(\omega t - \varphi), \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{\omega}{a}$$

【問題 4.3.2】

式 (4.25) のの導出と同様に計算すればよい．

$$z\,(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\omega t - \varphi)}, \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

【問題 4.3.3】

まず，最初の式の解を $v\,(t) = Ve^{j\omega t}$ と仮定して，微分方程式に代入し，両辺を比較して V を求めると次式を得る．

$$V = \frac{E}{\sqrt{\left(1 - \omega^4 L^2 C^2\right)^2 + \left(\omega CR\right)^2}} e^{-j\varphi}, \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}$$

これより，第 1 番目の式の解は次式となる．

$$v\,(t) = Ve^{j\omega t} = \frac{E}{\sqrt{\left(1 - \omega^4 L^2 C^2\right)^2 + \left(\omega CR\right)^2}} e^{j(\omega t - \varphi)}, \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}$$

また，第 2 第 3 の式の解は，それぞれ上式の実部と虚部から

$$v\,(t) = \mathrm{Re}\left(Ve^{j\omega t}\right) = \frac{E}{\sqrt{\left(1 - \omega^4 L^2 C^2\right)^2 + \left(\omega CR\right)^2}} \cos\left(\omega t - \varphi\right), \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}$$

$$v\,(t) = \mathrm{Im}\left(Ve^{j\omega t}\right) = \frac{E}{\sqrt{\left(1 - \omega^4 L^2 C^2\right)^2 + \left(\omega CR\right)^2}} \sin\left(\omega t - \varphi\right), \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}$$

と計算できる．

行列・行列式の公式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{bmatrix}$$

$$k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{bmatrix}$$

$$k(\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}) = k(\mathbf{AB})$$

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

付録 D

説明できなかった２次方程式

D.1 ドラマはスイッチの動作から始まる

D.1.1 例題 1.1.3 にある２次方程式はどこから導かれたのか

付録 C で解答例を用意するにあたって，テキスト本文に出てくる回路に関係した方程式はその出所をできるだけ説明しようと考えました．

ところで，**例題 1.1.3** にある２次方程式

$$L_1 L_2 \lambda^2 + \{L_1 R_2 + (L_1 + L_2) R_1\} \lambda + R_1 R_2 = 0 \tag{D.1}$$

については，これまでの付録のどこにも説明できる資料が出てきません．あえて種明かしをすると，第４章の最後の節にある微分方程式を解く際に現れるのです．

このテキストでは，微分方程式の解法については紹介しませんでした．第４章では複素正弦波が外力として加わった微分方程式の特殊な解，すなわち複素正弦波の解，を求めることのみを述べています．この特殊解が交流理論では主役を演じることことになります．

さて，微分方程式の解にはこれら特殊解の外に，一般解と呼ばれる指数関数で表される解があります．以下，このような解の構造について，回路例を使って具体的に説明しておきましょう．

D.1.2 定常状態と過渡状態

通常，電気回路はスイッチが付いていて，このスイッチが入れられると回路が動作し始めます．実はスイッチを閉じた直後には，異常な状態が生じていて，しばらくすると正常な状態に落ち着き，望ましい動作となるのです．これは，電気回路一般についていえる性質です．

スイッチの動作直後の異常な状態を**過渡状態**，落ち着いた正常な状態を**定常状態**と呼んでいます．普通の回路では，これら２つの状態が重ね合わされた状態で観測されるのです．実は，線形回路ではこれらの状態を別々に計算して，その後で足し合わせると回路の状態の全容が解明できます．この足し合わせは**重ね合わせの原理**と呼ばれています．

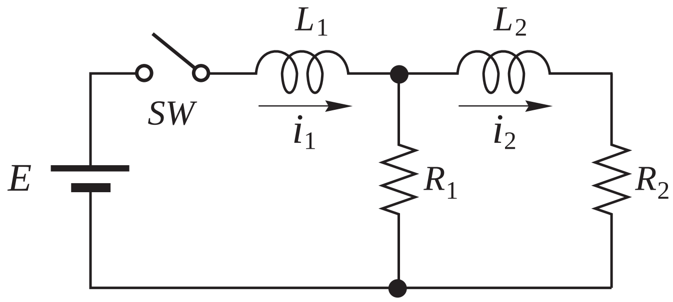


図 D.1　直流電源を加えた LR 回路.

D.2　LR 回路の例

図 D.1 に示した回路を用いて回路解析の全容を説明しましょう.

D.2.1　回路の状態と回路方程式

スイッチ SW が $t = 0$ の瞬間に閉じられるとします.

スイッチ SW が開いている $t \leq 0$ での状態

２つのコイルには電流は流れていない，すなわち

$$i_1(0) = 0, \quad i_2(0) = 0 \tag{D.2}$$

の状態にあります．これを初期状態といいます.

スイッチ SW を閉じた $t \geq 0$ での状態

まず，スイッチ SW を閉じた $t \geq 0$ での状態での回路方程式を求めます．この回路では，２つのコイルに流れる電流が回路の状態となります．これらを変数に選ぶと回路方程式は２つのループについて KVL より次式となります.

$$\begin{aligned} L_1\frac{di_1}{dt} + R_1(i_1 - i_2) &= E \\ L_2\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 &= R_1(i_1 - i_2) \end{aligned} \tag{D.3}$$

整理すると，

$$\begin{aligned} L_1\frac{di_1}{dt} &= -R_1 i_1 + R_1 i_2 + E \\ L_2\frac{di_2}{dt} &= R_1 i_1 - (R_1 + R_2) i_2 \end{aligned} \tag{D.4}$$

となります．i_1，i_2 に関係のない第１式の第３項 E は**外力の項**といいます．この回路では直流電圧源が加えられているので定数となっています．式 (D.4) をベクトル方程式として表すと次式

となります．

$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & R_1 \\ R_1 & -(R_1+R_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + E \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{D.5}$$

スイッチ SW を閉じて $t \to \infty$ での状態：定常状態

スイッチ SW を閉じて $t \to \infty$ での状態，すなわち定常状態では，直流電流が流れます．つまり，2つのコイルはショート（短絡）された直流回路となります．この直流回路を解くと，次の電流が求められます．

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} \\ \dfrac{1}{R_2} \end{bmatrix} \tag{D.6}$$

直流電流なので i_1，i_2 をそれぞれ I_1，I_2 のように表しておきました．この電流はまた，式 (D.5) の左辺をゼロとおいて解くと求められることに注意してください．つまり，式 (D.6) は，式 (D.5) の解となっています．この解を式 (D.5) の特殊解と呼んでいます[*1]．

D.3　線形微分方程式の解の構造

線形定係数常微分方程式

$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & R_1 \\ R_1 & -(R_1+R_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + E \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{D.7}$$

の最も一般的な解，すなわち一般解を求めましょう．このためには，外力をゼロとした同次方程式の解が必要となります．同次方程式は次式となります．

$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & R_1 \\ R_1 & -(R_1+R_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \tag{D.8}$$

この方程式を解くことを考えます．

D.3.1　同次方程式の一般解

同次方程式 (D.8) の解は，一般に指数関数となることが分かっています．したがって，この解を

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \tag{D.9}$$

とおき，λ と h_1，h_2 を求めます．式 (D.9) を式 (D.8) に代入して整理すると次式を得ます．

$$\begin{bmatrix} L_1\lambda + R_1 & -R_1 \\ -R_1 & L_2\lambda + R_1 + R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{D.10}$$

[*1] 式 (D.5) を満たす解ならば，どんな解でも特殊解といいます．特殊解は一意的には定まりません．この曖昧さは，同次方程式の一般解の部分で解消されます．

この連立方程式は，右辺がゼロなので，左辺の係数行列の行列式がゼロでなければ，ゼロでない解 h_1，h_2 を求めることができません．すなわち，h_1，h_2 がゼロ以外の解を持つためには，

$$\begin{vmatrix} L_1\lambda + R_1 & -R_1 \\ -R_1 & L_2\lambda + R_1 + R_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{D.11}$$

でなければならないのです．これは λ に関する 2 次方程式となります．第 2 章 2.3.7 を参照ください．

$$L_1L_2\lambda^2 + \{L_1R_2 + (L_1 + L_2)\,R_1\}\,\lambda + R_1R_2 = 0 \tag{D.12}$$

これが**例題 1.1.3** にある 2 次方程式だったということです．

この方程式の解は，負の 2 実根ということですから，これを λ_1，λ_2 とします．第 2 章 2.3.7 に従って固有ベクトルを計算すると，次の固有ベクトルが求められます．

$$\text{固有値 }\lambda_1\text{に対して}\quad \begin{bmatrix} R_1 \\ L_1\lambda_1 + R_1 \end{bmatrix},\quad \text{固有値 }\lambda_2\text{に対して}\quad \begin{bmatrix} R_1 \\ L_1\lambda_2 + R_1 \end{bmatrix} \tag{D.13}$$

これらの 2 つの解を足し合わせると，同次方程式 (D.8) の一般解が次式として求められます．

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = c_1e^{\lambda_1 t}\begin{bmatrix} R_1 \\ L_1\lambda_1 + R_1 \end{bmatrix} + c_2e^{\lambda_2 t}\begin{bmatrix} R_1 \\ L_1\lambda_2 + R_1 \end{bmatrix} \tag{D.14}$$

ここに，c_1，c_2 は任意定数です．式 (D.14) は過渡解とも呼ばれ，この回路の過渡状態に対応します．$t \to \infty$ でゼロに収束することに注意してください．

D.3.2　非同次方程式の一般解

非同次方程式 (D.7) の一般解は，同次方程式 (D.8) の解 (D.14) と，非同次方程式 (D.7) の特殊解 (D.6) を足し合わせた形となります．

$$\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = c_1e^{\lambda_1 t}\begin{bmatrix} R_1 \\ L_1\lambda_1 + R_1 \end{bmatrix} + c_2e^{\lambda_2 t}\begin{bmatrix} R_1 \\ L_1\lambda_2 + R_1 \end{bmatrix} + E\begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} \\ \dfrac{1}{R_2} \end{bmatrix} \tag{D.15}$$

D.4　求める回路の電流は？

D.4.1　初期値を満たす解

スイッチ SW を閉じたあとでは，2 つの電流が式 (D.15) で変化します．任意定数 c_1，c_2 を決定するには，$t = 0$ での値 $i_1(0) = 0$，$i_2(0) = 0$ を式 (D.15) に代入して c_1，c_2 についての連立方程式を解いて求められます．

初期値，$t = 0$ での値 $i_1(0) = 0$，$i_2(0) = 0$ ，から定常状態 (D.6) までの解の変化の様子を i_1i_2 平面に描くと図 D.2 となります．

解の時間的な変化は，図 D.3 となります．指数関数で表される式 (D.14) の過渡状態がゼロに

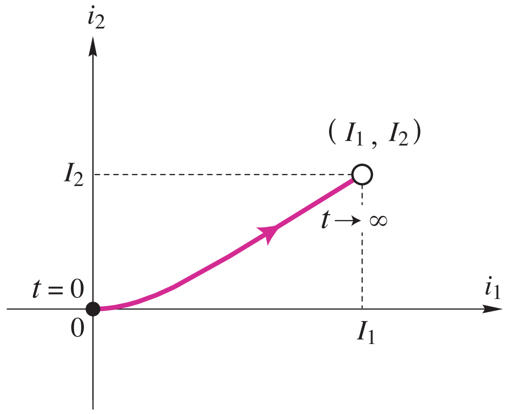


図 D.2　状態平面内での解の変化の軌跡.

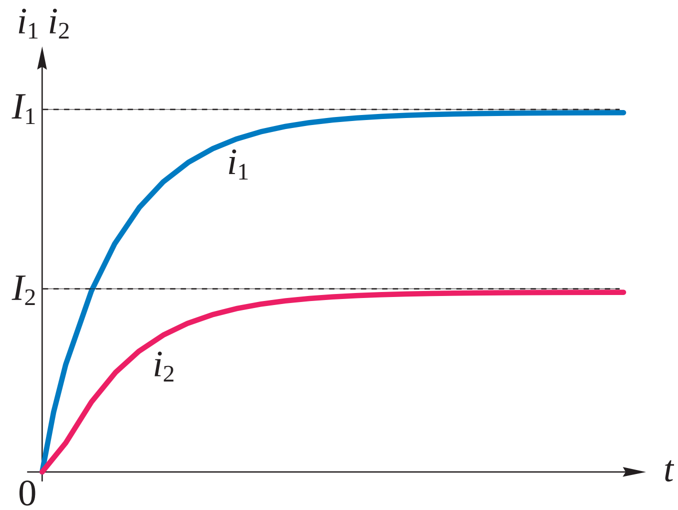


図 D.3　連流波形：状態の時間的変化.

収束すると，電流は定常状態 (I_1, I_2) に落ち着いて行きます．図からこの様子がよく分かると思います.

微分・積分の公式

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}x^{-n} = -nx^{-(n+1)}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}af\left(x\right) = a\frac{d}{dx}f\left(x\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left\{f\left(x\right) + g\left(x\right)\right\} = \frac{d}{dx}f\left(x\right) + \frac{d}{dx}g\left(x\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left\{f\left(x\right)g\left(x\right)\right\} = g\left(x\right)\frac{d}{dx}f\left(x\right) + f\left(x\right)\frac{d}{dx}g\left(x\right)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = \frac{g\left(x\right)\frac{d}{dx}f\left(x\right) - f\left(x\right)\frac{d}{dx}g\left(x\right)}{g\left(x\right)^2}$$

$$\frac{d}{dx}f\left(g\left(x\right)\right) = \frac{d}{dg}\left(f\left(g\right)\right)\frac{d}{dx}g\left(x\right)$$

$$\frac{d}{dx}f\left(y\right) = \frac{d}{dy}f\left(y\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}, \quad \int \frac{1}{x}dx = \log x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x, \quad \int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax$$

$$\int e^{-ax}\sin bx dx = -e^{-ax}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\sin bx + \frac{b}{a^2+b^2}\cos bx\right)$$

$$\int_a^b f\left(x\right)g'\left(x\right)dx = \left[f\left(x\right)g\left(x\right)\right]_a^b - \int_a^b f'\left(x\right)g\left(x\right)dx$$