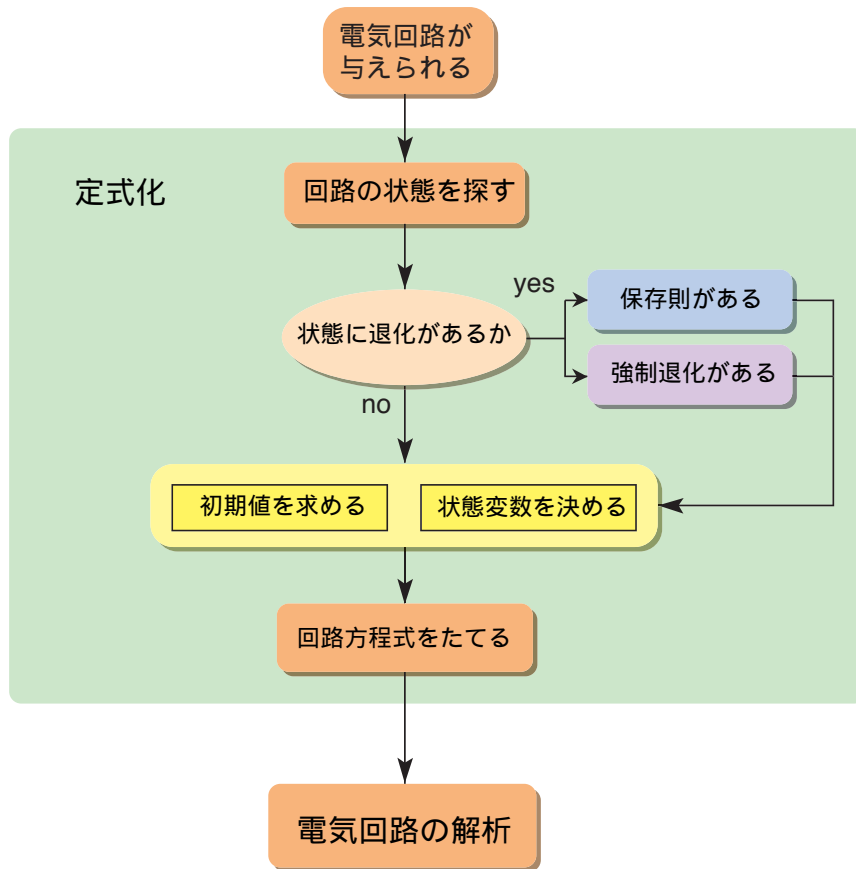


電気回路の状態方程式

系統的に求めるには



1998

川上 博

目次

1	電気回路のグラフ	1
1.1	回路とそのグラフ	1
1.2	グラフの木と補木	2
1.3	基本カットセットと基本ループ	3
1.4	キルヒホッフの法則の記述	5
2	状態の拘束条件と接続の関係	7
2.1	接続による状態の拘束	7
2.2	カットセットの電荷保存則とループの磁束保存則	8
2.2.1	キャパシタのみからなるカットセットがある場合	8
2.2.2	インダクタのみからなるループがある場合	9
2.3	強制退化と速い過渡現象	10
2.3.1	キャパシタのみからなるループがある場合	10
2.3.2	インダクタのみからなるカットセットがある場合	12
2.4	状態の拘束条件を調べるためのグラフの木	14
3	状態方程式—その 1—	19
3.1	標準木を持つ回路の状態方程式	19
3.2	保存則を持つ回路の状態方程式	23
3.3	強制退化を持つ回路の状態方程式	23
3.4	保存則と強制退化を持つ回路の状態方程式	23
3.5	LC 回路の状態方程式	23

第1章

電気回路のグラフ

この章では、回路の接続関係を調べるために必要なグラフの性質について、さし当たり知っておくと便利な事柄について述べる。グラフの理論はそれ自体非常におもしろい。状態方程式を導くためには、キルヒッホフの法則をうまく記述し、回路の微分方程式が1階連立微分方程式をなすよう工夫することが大切な事柄となる。グラフの「木」と「補木」の概念はそのために本質的な役割を果たすことになる。

1.1 回路とそのグラフ

回路図は、実に多くの情報を表現している。このうち素子の接続から導かれる性質にのみ着目するとどうなるか考えてみよう。

有限個の回路素子を、端子どうし目的に応じてつなぎ合わせると、1つの回路ができる。回路が構成されると、各素子の電流・電圧は、独立に変わることができなくなる。すなわち、つなぎ方に依存した拘束条件のもとで変化することとなる。この条件式がキルヒッホフの法則 (Kirchhoff's Law) にほかならない。

さて回路の接続関係のみに着目する場合は、回路を線分と点からなるグラフ (graph) と考えると便利である。たとえば図 1.1(a) に描いた回路のグラフが同図 (b) である。回路が与えられると、それに対応したグラフは、自然求めることができる。すなわち、各素子を線分に、素子間の接続点を点にすればよい。得られたグラフの線分を枝 (branch)、接続点に対応した点を節点 (node) と呼ぶ。

こうすると元の回路に対応させて、グラフの上でも枝電流、枝電圧 (枝の両端の節点間に加わる電圧) などを自然に定義できる。必要に応じて、たとえば枝電流の方向と同じ方向を枝に付けた、向きの付いたグラフ (有向グラフ (directed graph) という) を考えればよい。

回路には、枝電流や枝電圧を適当に組み合わせた閉路電流 (loop current) (網目電流 (mesh current) と呼ぶこともある)、節点電圧 (node voltage) なども定義できる。たとえば図 1.1(c), (d) などに描いた例がこれにあたる。閉路や節点間にも適宜向きを付けるとよい。なお回路は、対応するグラフが連結な場合、連結しているという。以下主に有向連結グラフとなる回路を考える。

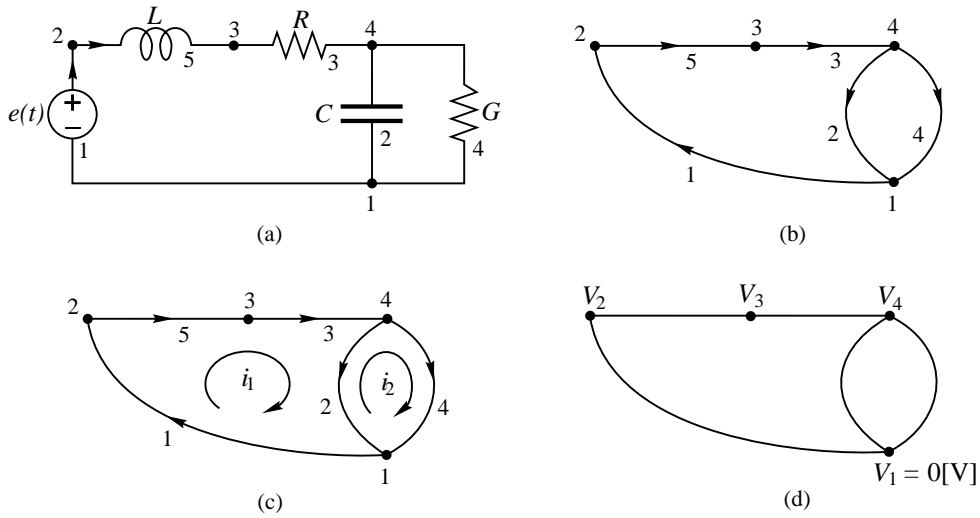


図 1.1. 回路例 (a) とそのグラフ (b), 閉路電流 (c), 節点電圧 (d) .

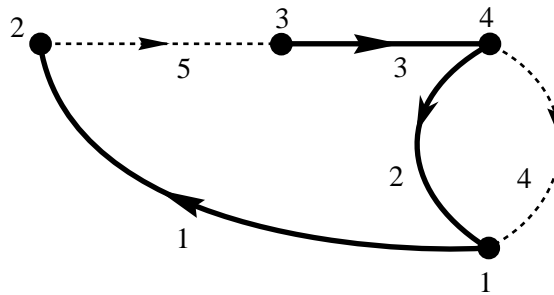


図 1.2. グラフの木枝集合 (太い実線) と補木枝集合 (点線) の例 .

1.2 グラフの木と補木

さて, 話を具体的にするために, 1 つの連結した回路を考え, この回路には n_b 個の枝と n_n 個の節点があるとしよう. 枝と節点に適当な番号を付けて, 枝 1, ..., 枝 n_b , 節点 1, ..., 節点 n_n , のように呼ぶことにする. また各枝を流れる電流を $i_k(t)$ ($k = 1, \dots, n_b$), 各枝電圧を $v_k(t)$ ($k = 1, \dots, n_b$), と仮定する.

まず始めに, グラフの木と補木を定義しよう. n_n 個の節点を, 最も少ない個数の枝を使って結ぶ. 植木算から分かるように, $(n_n - 1)$ 本の枝で十分である. この枝集合のことをグラフの木 (tree) という. 残った枝のことを補木 (cotree) と呼ぶ. 補木枝の数は $(n_b - n_n + 1)$ 本となることに注意しよう. 図 1.2 参照.

次に, グラフの枝にハサミを入れ, 節点の集合を 2 つの部分集合に分割する. このときハサミを入れた枝集合をカット・セット (cut-set) と呼ぶ. 図 1.3 参照.

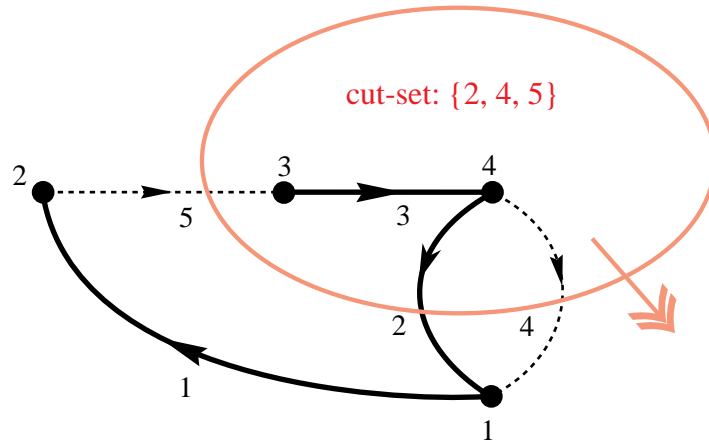


図 1.3. グラフのカットセットの例 .

1.3 基本カットセットと基本ループ

回路とそのグラフが与えられたとき、このグラフの木を 1 つ選んで固定すると次の事実が言える .

1. 木の枝を 1 本だけ含み、他の枝はすべて補木枝からなるカットセットを考えると、このようなカットセットの数はちょうど $\rho = n_n - 1$ 個存在する . 図 1.4 参照 .
2. 補木枝を 1 本選んで木に加えると、加えた補木枝を含み他の枝はすべて木枝からなるループができる . このようなループの数はちょうど $\mu = n_b - n_n + 1$ 個である . 図 1.5 参照 .

上の操作で作ったカットセットやループはすべて独立である . このことは直感的にも明らかであろう . これらをそれぞれ、基本カットセット (fundamental cut-set) および基本ループ (fundamental loop) という . 勿論、始めにどのような木を選んで考えるかによって基本カットセットおよび基本ループは違ったものとなる .

準備ができたので、基本カットセットや基本ループを行列表現することを考えよう . まず、基本カットセット行列 (fundamental cut-set matrix) とは次式で定義する要素を持つ行列 $\mathbf{Q} = (q_{ij})$, $i = 1, \dots, \rho; j = 1, \dots, n_b$ のことである .

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 : \text{枝 } j \text{ が基本カットセット } i \text{ に属し, 方向が同じ,} \\ -1 : \text{枝 } j \text{ が基本カットセット } i \text{ に属し, 方向が逆,} \\ 0 : \text{枝 } j \text{ が基本カットセット } i \text{ に属していない.} \end{cases} \quad (1.3.1)$$

ただし、基本カットセットの方向は、このカットセットに含まれる木枝の方向とする . たとえば、図 1.4 の基本カットセット行列は次式となる .

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.3.2)$$

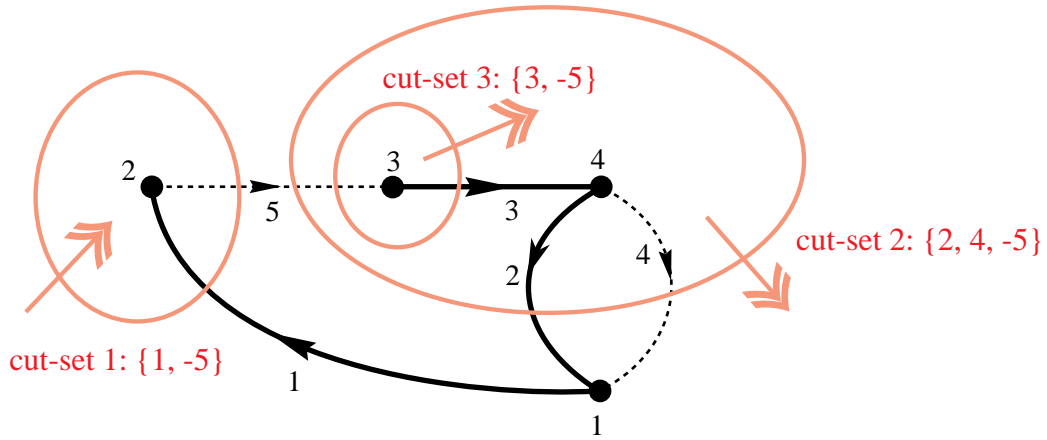


図 1.4. 基本カットセットの番号付け . - 枝はカットセットと逆向き枝を表す .

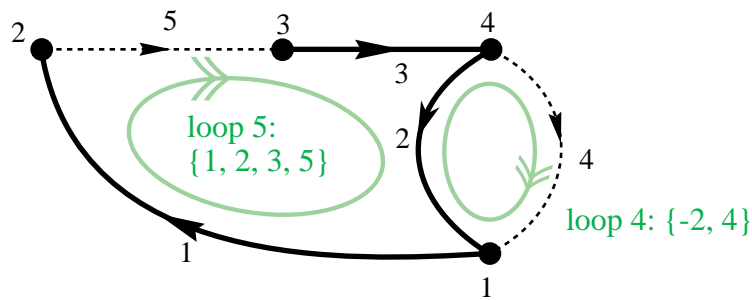


図 1.5. 基本ループの番号付け . - 枝はループと逆向き枝を表す .

同様に, 基本ループ行列 (fundamental loop matrix) とは次式の要素を持つ行列 $\mathbf{B} = (b_{ij})$, $i = 1, \dots, \mu; j = 1, \dots, n_b$ のことである .

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 : \text{枝 } j \text{ が基本ループ } i \text{ に属し, 方向が同じ,} \\ -1 : \text{枝 } j \text{ が基本ループ } i \text{ に属し, 方向が逆,} \\ 0 : \text{枝 } j \text{ が基本ループ } i \text{ に属していない.} \end{cases} \quad (1.3.3)$$

ただし, 基本ループの方向は, このループに含まれる補木枝の方向とする .
たとえば, 図 1.5 の基本ループ行列は次式となる .

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3.4)$$

1.4 キルヒホッフの法則の記述

そこで、枝電流と枝電圧のベクトルを次式としよう。

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_{n_b} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n_b} \end{bmatrix} \quad (1.4.1)$$

すると、キルヒホッフの電流法則 KCL は次式と表すことができる。

$$\mathbf{Q}\mathbf{i} = \mathbf{0} \quad (1.4.2)$$

また、キルヒホッフの電圧法則 KVL は次式となる。

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (1.4.3)$$

たとえば、図 1.4 と図 1.5 の場合は KCL および KVL は次式となる。

$$\mathbf{Q}\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 - i_5 \\ i_2 + i_4 - i_5 \\ i_3 - i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.4.4)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2 + v_4 \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.4.5)$$

次に、基本カットセット行列 \mathbf{Q} と基本ループ行列 \mathbf{B} の間に成り立っている重要な関係式をみておこう。これらの各行列の列を「木枝列」と「補木枝列」に分けて書くと次式となる。

$$\mathbf{Q} = \left[\overbrace{\mathbf{I}_\rho}^{\text{tree}} : \overbrace{\mathbf{F}}^{\text{cotree}} \right] \quad (1.4.6)$$

$$\mathbf{B} = \left[\overbrace{-\mathbf{F}^T}^{\text{tree}} : \overbrace{\mathbf{I}}^{\text{cotree}} \right]$$

ここで、行列 \mathbf{F}^T は行列 \mathbf{F} の転置行列を表す。また、それぞれの行列に現れた \mathbf{F} と \mathbf{F}^T は基本カットセット行列 \mathbf{Q} と基本ループ行列 \mathbf{B} の主要部という。このことから、関係式

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (1.4.7)$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

が成り立つ。これを基本カットセット行列 \mathbf{Q} と基本ループ行列 \mathbf{B} は直交するという。この性質を積極的に利用すると次の事実を得る。

まず, 電流ベクトル \mathbf{i} と電圧ベクトル \mathbf{v} を木枝成分と補木枝成分に分けて表す.

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_{n_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_t \\ \cdots \\ \mathbf{i}_\ell \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_t \\ \cdots \\ \mathbf{v}_\ell \end{bmatrix} \quad (1.4.8)$$

すると, KCL を表す式 (1.4.2) は次式と書ける.

$$\mathbf{i}_t = -\mathbf{F}\mathbf{i}_\ell \quad (1.4.9)$$

したがってまた, 電流ベクトル \mathbf{i} は補木枝電流を用いて

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F} \\ \mathbf{I}_\mu \end{bmatrix} \mathbf{i}_\ell = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_\ell \quad (1.4.10)$$

と表すことができる. 同様に KVL を表す式 (1.4.3) は次式と書ける.

$$\mathbf{v}_\ell = \mathbf{F}^T \mathbf{v}_t \quad (1.4.11)$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_\rho \\ \mathbf{F}^T \end{bmatrix} \mathbf{v}_t = \mathbf{Q}^T \mathbf{v}_t \quad (1.4.12)$$

これらの関係から次のテレヘンの定理 (Tellegen's theorem) を得る.

【テレヘンの定理】

$$\mathbf{i}^T \mathbf{v} = 0 \quad (1.4.13)$$

【証明】

$$\mathbf{i}^T \mathbf{v} = (\mathbf{B}^T \mathbf{i}_\ell)^T \mathbf{Q}^T \mathbf{v}_t = \mathbf{i}_\ell^T \mathbf{B} \mathbf{Q}^T \mathbf{v}_t = 0 \quad (1.4.14)$$

この定理の物理的な意味は, 枝電圧と枝電流の積すなわち電力がいつも零となっている (つまり保存される) ということである. これを電力保存則 (あるいはエネルギー保存則) という.

また幾何学的には, 電圧ベクトルと電流ベクトルが互いに直交することを表している.

【系】

接続関係が同一である以外はまったく任意の 2 つの回路 N と \tilde{N} を考える. (\mathbf{v}, \mathbf{i}) を N の変数, $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{i}})$ を \tilde{N} の変数とすると

$$\mathbf{i}^T \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad \tilde{\mathbf{i}}^T \mathbf{v} = 0 \quad (1.4.15)$$

が成り立つ.

第2章

状態の拘束条件と接続の関係

この章では、回路の状態が素子のつなぎ方によっていかに拘束されるかという問題を取りあげる。状態に拘束が生じると、回路の状態方程式はそれだけ低い次元の方程式となり、扱いやすくなる。すなわち、回路の状態は状態空間内の拘束条件によって決まる部分空間に押し込められることとなる。そのため、スイッチの開閉などにより急に回路の接続関係が変えられると、状態の速い動きである「状態の跳び」が生じることがある。拘束条件はグラフの特別な木を定義することによって系統的に調べることができる。この結果を用いて、状態の拘束条件からみた回路を分類を行う。

2.1 接続による状態の拘束

回路の状態はインダクタ電流とキャパシタ電圧で定まる。このことから、これらリアクタンス素子を不用意に接続するとキルヒホッフの法則によって状態が拘束¹されることになる。すなわち、次の4種類のいずれかの接続があると、回路の状態は拘束される。

1. 保存則
 - (a) キャパシタのみからなるカットセットがある。このカットセットに関する電荷が保存される。
 - (b) インダクタのみからなるループがある。このループに関する磁束が保存される。
2. 強制退化
 - (a) キャパシタのみ(あるいはキャパシタと電圧源のみ)からなるループがある。キャパシタ電圧の線形拘束が生じる。
 - (b) インダクタのみ(あるいはインダクタと電流源のみ)からなるカットセットがある。インダクタ電流の線形拘束が生じる。

そこで、これらの接続のある回路で状態がどのように拘束されるのか、その関係式を具体例でみることにしよう。

¹拘束とは、キャパシタ電圧やインダクタ電流の間に関係式が生じることをいう。関係式の個数が多くなる程、拘束条件が多くなる。

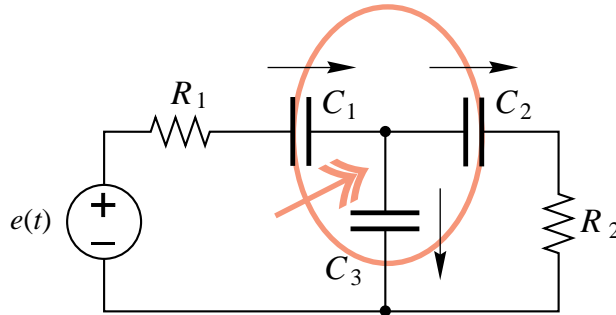


図 2.1. キャパシタのみからなるカットセットがある回路の例 .

2.2 カットセットの電荷保存則とループの磁束保存則

2.2.1 キャパシタのみからなるカットセットがある場合

図 2.1 の回路を考えよう . 薄い色の楕円と交わる 3 個のキャパシタはカットセットを作っている . 2 重の矢印方向をこのカットセットの方向と定め , キルヒホッフの電流法則を求めると次式となる .

$$i_{C1} - i_{C2} - i_{C3} = 0 \quad (2.2.1)$$

すなわち

$$C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} - C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} - C_3 \frac{dv_{C3}}{dt} = 0 \quad (2.2.2)$$

式 (2.2.2) はキャパシタ電圧の微分のみからなる関係式なので , ただちに積分できて , 次の関係式を得る .

$$C_1 v_{C1}(t) - C_2 v_{C2}(t) - C_3 v_{C3}(t) = Q \quad (2.2.3)$$

ここに , Q は任意積分定数を表す . キャパシタに蓄えられる電荷をそれぞれ , $q_{C1}(t) = C_1 v_{C1}(t)$, $q_{C2}(t) = C_2 v_{C2}(t)$, $q_{C3}(t) = C_3 v_{C3}(t)$ とすれば式 (2.2.3) はまた次式とも書ける .

$$q_{C1}(t) - q_{C2}(t) - q_{C3}(t) = Q \quad (2.2.4)$$

これは , 3 個のキャパシタの電荷から式 (2.2.4) の左辺の一次式を作ると一定 Q となることを示している . これを今考えているカットセットの電荷と考え , このカットセットに蓄えられる電荷が保存されることを表している .

一方 , この回路の状態は 3 つのキャパシタ電圧であり , これらは 3 次元の状態空間を作る . 式 (2.2.3) はこの空間内の 2 次元平面の族を与える . すなわち , 右辺の一定値を変化させると状態空間内に重なった平面の層状集合ができる . 図 2.2 参照 .

では , 実際の回路ではどの平面が具体的に回路の状態の乗っている平面となるのだろうか . それを定めるのは , 回路に最初与える初期値である . なぜなら

$$C_1 v_{C1}(t) - C_2 v_{C2}(t) - C_3 v_{C3}(t) = C_1 v_{C1}(t_0) - C_2 v_{C2}(t_0) - C_3 v_{C3}(t_0) \quad (2.2.5)$$

となり , 右辺の一定値が初期値によって定まるからである .

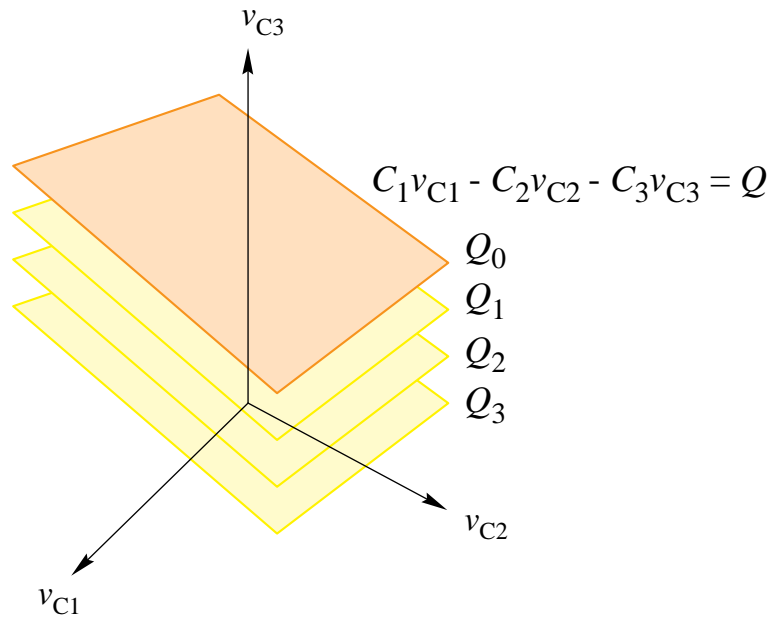


図 2.2. 状態空間内に重なった平面の層状集合 .

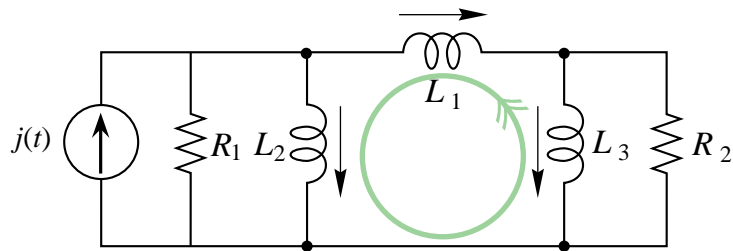


図 2.3. インダクタのみからなるループがある回路の例 .

2.2.2 インダクタのみからなるループがある場合

図 2.3 の回路を考えよう . この回路では , インダクタのみからなるループが存在する . このループに沿ったキルヒホッフの電圧法則は次式となる .

$$v_{L1}(t) - v_{L2}(t) + v_{L3}(t) = 0 \quad (2.2.6)$$

したがって , インダクタ電流で表すと次式となる .

$$L_1 \frac{di_{L1}}{dt} - L_2 \frac{di_{L2}}{dt} + L_3 \frac{di_{L3}}{dt} = 0 \quad (2.2.7)$$

この式を積分して , このループに関する次の磁束保存則を得る .

$$L_1 i_{L1} - L_2 i_{L2} + L_3 i_{L3} = \Phi \quad (2.2.8)$$

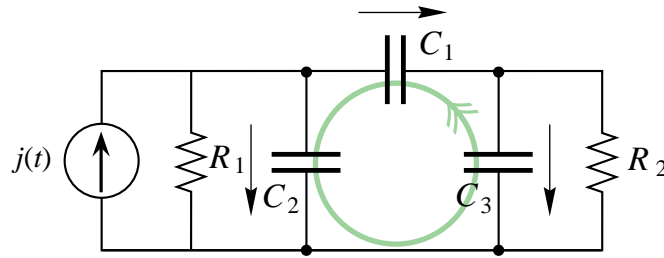


図 2.4. キャパシタのみからなるループがある回路の例 .

ここに, Φ は任意積分定数である . この拘束条件は, インダクタを流れる電流の作る 3 次元空間内の平面の族を表している . 状況は図 2.2 と同様である .

2.3 強制退化と速い過渡現象

2.3.1 キャパシタのみからなるループがある場合

図 2.4 の回路を考えよう . この回路では, キャパシタのみからなるループがある . したがってキルヒホッフの電圧法則から直ちに次式の関係を得る .

$$v_{C1} - v_{C2} + v_{C3} = 0 \quad (2.3.1)$$

これは, キャパシタ電圧空間の原点を通る平面である . 保存則と違って, この場合は一意的に状態が式 (2.3.1) の平面に拘束されることとなる . このような拘束を強制退化² と呼ぶことにしよう .

この場合, 初期値がキャパシタ電圧空間の任意の値にあったとき, どのような経路で状態は平面 (2.3.1) の上の点に移動するのだろうか . 次の例でこの様子を見ることにしよう .

♡ 例 2.1 ♡

図 2.5 の回路を考えよう . ここでの問題はキャパシタの強制退化にあるのでスイッチ SW_1 は開いたままとし, 各キャパシタに初期電圧 $v_1(0) = v_{10}$, $v_2(0) = v_{20}$, $v_3(0) = v_{30}$ を与え, $t = 0$ でスイッチ SW_2 を閉じた . その後の各キャパシタ電圧を求めよ .

♡ 解 ♡ スイッチ SW_2 を閉じた後の現象は次のように考えるとよい .

1. 3 つのキャパシタによるループができるのでキャパシタ電圧の強制退化が起こる .
2. 同時にキャパシタのみからなるカットセットが 2 つあるので, このカットセットの電荷は保存される .

²この呼び名は一般的に使われているわけではない . 過渡現象の教科書ではあまり詳しく述べた本はないようだ . 強制退化 (forced degeneracy) は力学系の理論で使われている言葉を流用した .

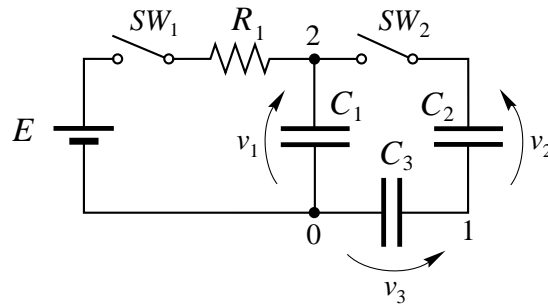


図 2.5. キャパシタのみからなるループがある回路の初期値問題 .

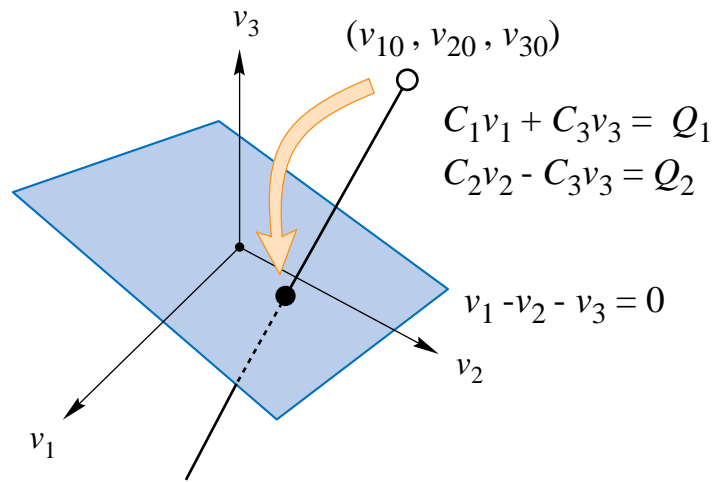


図 2.6. 初期値の拘束面への一瞬の跳びの様子 .

まず強制退化の平面を計算しよう . 式 (2.3.1) と同様にして , 次式となる .

$$v_1 - v_2 - v_3 = 0 \tag{2.3.2}$$

次に , 2 つのカットセットを節点 0, 1 に選んで , 電荷保存則を求めると , 次式を得る .

$$\begin{aligned} C_1 v_1 + C_3 v_3 &= C_1 v_{10} + C_3 v_{30} = Q_1 \\ C_2 v_2 - C_3 v_3 &= C_2 v_{20} - C_3 v_{30} = Q_2 \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

そこで , 式 (2.3.2) と式 (2.3.3) を連立させて解き , 次の解を得る .

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{(C_1 + C_3) Q_1 + C_3 Q_2}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} \\ v_2 &= \frac{C_3 Q_1 + (C_1 + C_3) Q_2}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} \\ v_3 &= \frac{C_2 Q_1 - C_1 Q_2}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

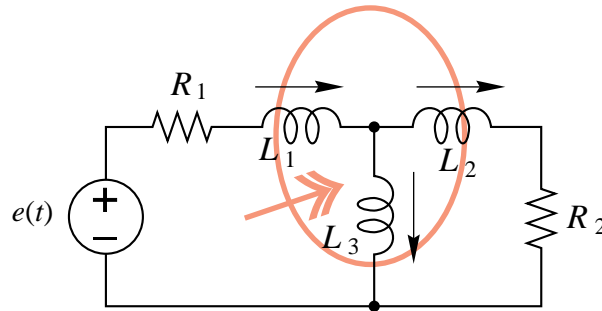


図 2.7. インダクタのみからなるカットセットがある回路の例 .

これが、拘束面上の点である . 図 2.6 参照 .

強制退化が起こると、初期値はカットセットに関する電荷保存則の直線に沿って、式 (2.3.2) の拘束面上の点まで急に变化する . この変化は一瞬にして起こる . これを「速い過渡現象」という . 「初期値の跳び」が起こると言ったりする . また、跳ぶ前の初期値を「第一種初期値」、後の初期値を「第二種初期値」と言って区別することもある .

もともとスイッチ SW_2 を閉じる前に与えた初期値 (v_{10}, v_{20}, v_{30}) は、回路が閉じていないので自由に与えることができる . すなわち、キルヒホッフの電圧法則に縛られない電圧である (図 2.6 の白丸点) . スイッチ SW_2 を閉じると、キャパシタのみからなるループができるので必然的にキルヒホッフの電圧法則に縛られることとなる . そこで、各キャパシタの電圧は式 (2.3.4) の点 (図 2.6 の黒丸点) に移動する . この電圧の変化は、ステップ関数で表される . したがってキャパシタを流れる電流は、インパルス関数となる . これが「一瞬の出来事」の数学的表現である .

以上のことは一般的に言えることで、キャパシタのみからなるループに並列にどのような素子が接続されていても、それら並列枝には関係なくこの跳びの現象がみられる . したがって、スイッチの開閉等によってキャパシタのみからなるループができる場合には、このループ以外の素子を開放除去した回路の速い過渡現象、すなわち跳びの計算をし、これによって定まる新しい初期値、すなわち第二種初期値を計算する必要がある .

通常の状態方程式に従う過渡現象は、この新しい初期値より状態が進展する . ♡

2.3.2 インダクタのみからなるカットセットがある場合

図 2.7 の回路を考えよう . この回路では、インダクタのみからなるカットセットがある . したがってキルヒホッフの電流法則から直ちに次式の関係を得る .

$$i_{L1} - i_{L2} - i_{L3} = 0 \quad (2.3.5)$$

このカットセットによる強制退化の状況は上述のキャパシタのみからなるループがある場合の強制退化と同様である .

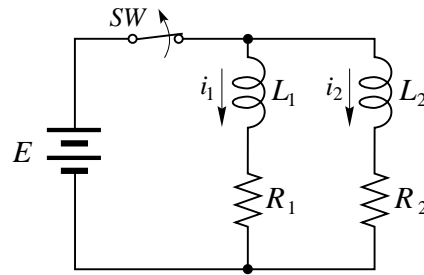


図 2.8. インダクタのみからなるカットセットができる回路の初期値問題 .

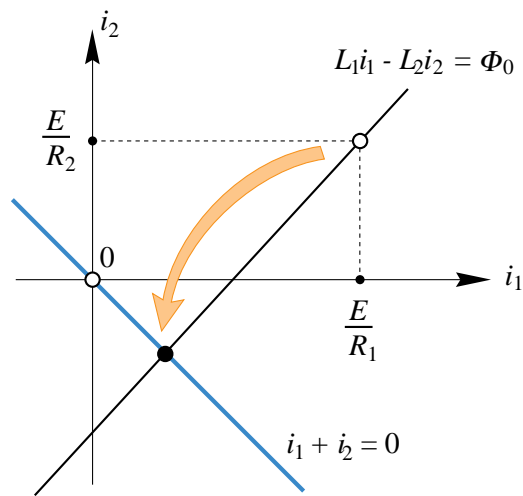


図 2.9. 相平面での初期値の動き .

♣ 例 2.2 ♣

スイッチ SW を閉じたまま定常状態になっている図 2.8 の回路がある . $t = 0$ でスイッチ SW を開いた . 速い過渡現象を解析せよ .

♣ 解 ♣ 定常状態になっているので , それぞれのインダクタを流れる電流は次式となっている .

$$i_1 = \frac{E}{R_1}, \quad i_2 = \frac{E}{R_2} \quad (2.3.6)$$

スイッチを開くとインダクタのみのカットセットができ , KCL から状態は

$$i_1 + i_2 = 0 \quad (2.3.7)$$

に移動することになる . この速い移動は , 抵抗 R_1, R_2 を無視 (短絡除去) した 2 つのインダクタからなるループの KVL より

$$L_1 \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (2.3.8)$$

であるから，これを積分して式 (2.3.6) を初期値として代入すると次式を得る．

$$L_1 i_1 - L_2 i_2 = \Phi_0 = L_1 \frac{E}{R_1} - L_2 \frac{E}{R_2} \quad (2.3.9)$$

そこで，式 (2.3.7) と式 (2.3.9) を連立して解くと，跳び先の座標が求められる．

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{(L_1 R_2 - L_2 R_1)}{(L_1 + L_2) R_1 R_2} E \\ i_2 &= \frac{(L_2 R_1 - L_1 R_2)}{(L_1 + L_2) R_1 R_2} E \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

これらの様子を図 2.9 に示した．



2.4 状態の拘束条件を調べるためのグラフの木

回路が与えられると，この回路のグラフに対して色々な木が考えられる．したがって，回路の状態方程式を導くために都合の良い木を選ぶ必要がある．更に，回路に拘束が生じる場合には，どのような拘束が何個あるか知る必要がある．そこでこの節ではこれらの要求をうまく処理できるグラフの木について考える．

まず，我々の考える回路は，条件

1. 電圧源のみからなるループはない．
2. 電流源のみからなるカットセットもない．

を満たしているものと仮定する³．

そこでこれから考える回路では，次のような木を常に選ぶことができる．

1. 電圧源はすべて木枝に含ませる．
2. 電流源はすべて補木枝に含ませる．

電源に関して上の条件は常に満たされているものとして，次の段階に進もう．すこし考えると

1. キャパシタをできるだけ多く木枝に含む木，
2. インダクタをできるだけ多く木枝に含む木．

をうまく利用すると，状態の拘束条件を調べることができることが分かる．基準木 (normal tree) と呼ばれている木はこの観点から考えられた木のことである．木を定めると，その木に関する基本カットセットおよび基本ループを求めこれを用いてキルヒホッフの法則を表すことができる．したがって，そのあとは機械的に拘束条件を検出できることとなる．

³ 相デルタ型に接続された電圧源のモデルがあるが，これは例外中の例外といえる電源である．電圧源のループは一般に KVL と両立しない．同様に，電流源のみからなるカットセットがあれば， KCL と両立しない．

【 C 基準木】

キャパシタを基準とした C 基準木とは、次のように選んだ木のことである。

1. 電圧源は木枝に，電流源は補木枝に含ませる。
2. キャパシタをできるだけ多く木枝に，インダクタをできるだけ多く補木枝に入れる。

【 L 基準木】

インダクタを基準とした L 基準木とは，次のように選んだ木のことである。

1. 電圧源は木枝に，電流源は補木枝に含ませる。
2. インダクタをできるだけ多く木枝に，キャパシタをできるだけ多く補木枝に入れる。

これらの木は次の性質を持っている。

1. C 基準木の補木に属するキャパシタの個数だけ，キャパシタのみ（あるいはキャパシタと電圧源のみ）からなるループがある。すなわち，キャパシタ電圧の強制退化が起こる。
2. C 基準木の木に属するインダクタの個数だけ，インダクタのみ（あるいはインダクタと電流源のみ）からなるカットセットがある。すなわち，インダクタ電流の強制退化が起こる。
3. L 基準木の補木に属するインダクタの個数だけ，インダクタのみ（あるいはインダクタと電流源のみ）からなるループがある。すなわち，これらのループの磁束は保存される。
4. L 基準木の木に属するキャパシタの個数だけ，キャパシタのみ（あるいはキャパシタと電圧源のみ）からなるカットセットがある。すなわち，これらのカットセットの電荷が保存される。

したがって， C 基準木と L 基準木をうまく組み合わせることによって，状態に拘束を持つ回路のすべての拘束条件を数え上げることが可能となる。このためには次の性質を持つ一対の木を構成すればよい。

1. C 基準木を一つ作る。
2. 次に， L 基準木を以下の性質を持つように選ぶ。
 - (a) C 基準木の木枝インダクタは，そっくり L 基準木の木枝に含ませる，
 - (b) C 基準木の補木枝キャパシタは，そっくり L 基準木の補木枝に含ませる。

この様に選んだ一対の C 基準木と L 基準木を用いて，キルヒホッフの法則を書き下すとすべての拘束条件を陽に表現することができる。以下簡単のために，このようにして選んだ木のことを CL 基準木対 (CL normal tree pair) と呼ぶことにする。

以上の準備から，拘束のある回路とそうでない通常の回路を区別し分類することが可能となる。そこで，改めて回路を状態に拘束があるか無いかによって分類しよう。また，この分類を CL 基準木対の言葉で行おう。

表 2.1. 回路素子とその個数

素子名	個数
独立電圧源	n_V
キャパシタ	n_C
抵抗	n_R
インダクタ	n_L
独立電流源	n_I

表 2.2. CL 基準木の木枝・補木枝に属する各素子の数

素子	C 基準木				素子の総数
	木枝		補木枝		
独立電圧源		n_V			n_V
キャパシタ	n_{C1}	n_{C1}		n_S	$n_C = n_{C1} + n_{C2} + n_S$
抵抗	n_{G1}	n_{G2}	n_{R1}	n_{R2}	$n_R = n_{G1} + n_{G2} + n_{R1} + n_{R2}$
インダクタ		n_Γ	n_{L1}	n_{L2}	$n_L = n_\Gamma + n_{L1} + n_{L2}$
独立電流源				n_I	n_I
	補木枝	木枝	補木枝		
	L 基準木				

いま、与えられた回路は表 2.1 に示した素子から構成されているとしよう。この回路の CL 基準木対を一つ選ぶ。このとき、各基準木（木枝および補木枝）に属するそれぞれの種類の素子数は、 CL 基準木対の選び方によらず一定となる。この個数を表 2.2 のように定めよう。

こうすると、各基準木について先に述べた性質から次のことが分かる。

1. この回路の拘束を受けていない独立な状態の個数は $n_{C1} + n_{L1}$ 個である、
2. この回路の保存則の個数は $n_{C2} + n_{L2}$ 個である、
3. この回路の強制退化のおこる個数は $n_S + n_\Gamma$ 個である。

この性質を用いて、回路を次のように分類しよう。

1. 通常の回路。保存則も強制退化もない回路をこう呼ぶことにする。すなわち、

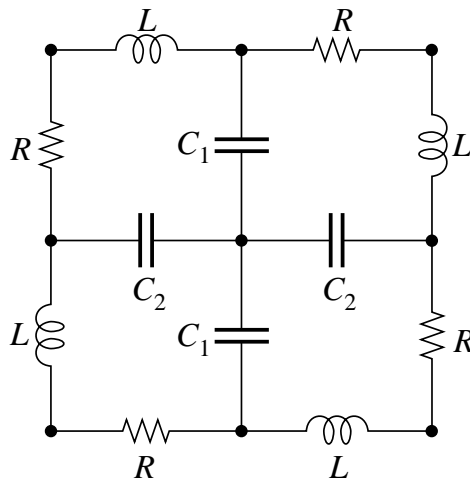


図 2.10. 回路の例 .

$n_{C2} = n_{L2} = n_S = n_\Gamma = 0$ の回路である . なお , この場合の C 基準木を特に C 標準木 (C proper tree) と呼ぶことがある .

2. 保存則を持つ回路 . $n_S = n_\Gamma = 0$ であるが $n_{C2} \neq 0$ and/or $n_{L2} \neq 0$ の回路 .
3. 強制退化を持つ回路 . $n_{C2} = n_{L2} = 0$ であるが $n_S \neq 0$ and/or $n_\Gamma \neq 0$ の回路 .
4. 保存則も強制退化も持つ回路 . $n_{C2} \neq 0$ and/or $n_{L2} \neq 0$ かつ $n_S \neq 0$ and/or $n_\Gamma \neq 0$ の回路 .

この分類を用いて , 次の章で具体的に状態方程式の導出方法を考える .

♣ 例 2.3 ♣

図 2.10 の回路の CL 基準木対を求めよ .

♣ 解 ♣ 図 2.11 参照 . この回路では , C 基準木は一意的に定まるが , これに対応する L 基準木は一意的ではなく何個かの木が存在する . たとえば , どのキャパシタを木枝に選んでもよい . 図 2.11(b) はその一例である .

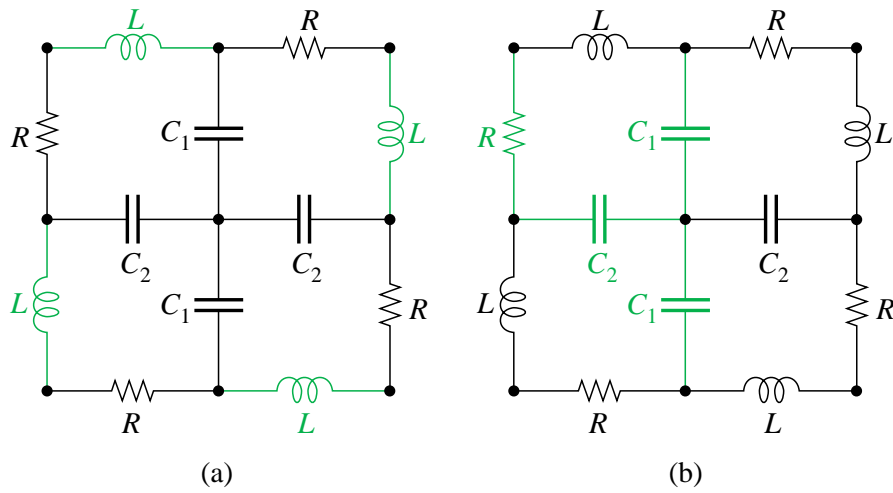


図 2.11. 図 2.10 の回路の C 基準木 (黒い実線の枝集合) (a) と L 基準木 (黒い実線の枝集合) (b) .

第3章

状態方程式—その 1 —

この章では、回路方程式を 1 階連立微分方程式として系統的に求める方法について述べる。この章を学んだ後では、簡単な回路で直感的に導出していた回路方程式が、理論的にはどのような手順で導き出されるのかははっきりと理解できるようになるであろう。

3.1 標準木を持つ回路の状態方程式

通常の回路，すなわち状態に拘束のない回路では， C 標準木が存在する．この木を使って回路の状態方程式を系統的に求めることができる．この手順を述べよう．回路のグラフには n_b 個の枝と n_n 個の節点があるものと仮定する．

1. C 標準木を選ぶ．すべての枝に方向をつける．次の優先順位に従って枝に番号を振る．
 - (a) 木枝独立電圧源
 - (b) 木枝キャパシタ
 - (c) 木枝抵抗
 - (d) 補木枝抵抗
 - (e) 補木枝インダクタ
 - (f) 補木枝独立電流源
2. 木枝を 1 本だけ含むカットセット(向きは木枝の方向を正に選ぶ)を $\rho = n_n - 1$ 個考え，これを基本カットセットとする．このカットセットについてキルヒホッフの電流則 KCL を書き下す．
3. 補木枝を 1 本含み，他はすべて木枝からなる閉路を $\mu = n_b - n_n + 1$ 個考え，これを基本ループとする．閉路の向きは補木枝に合わせておく．この閉路についてキルヒホッフの電圧則 KVL を書く．
4. 各素子特性をこれら KCL, KVL の式に代入する．
5. 抵抗枝に関係した電流・電圧は，素子特性と KCL, KVL の抵抗枝の式を用いて，すべて消去する．
6. キャパシタ枝の KCL ，インダクタ枝の KVL の式から回路の状態方程式を得る．

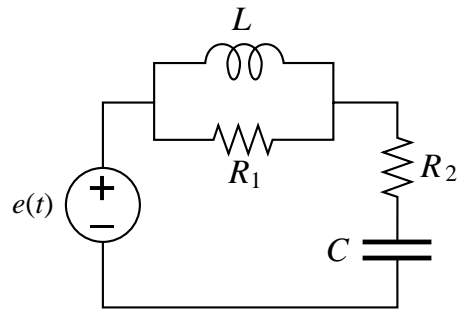
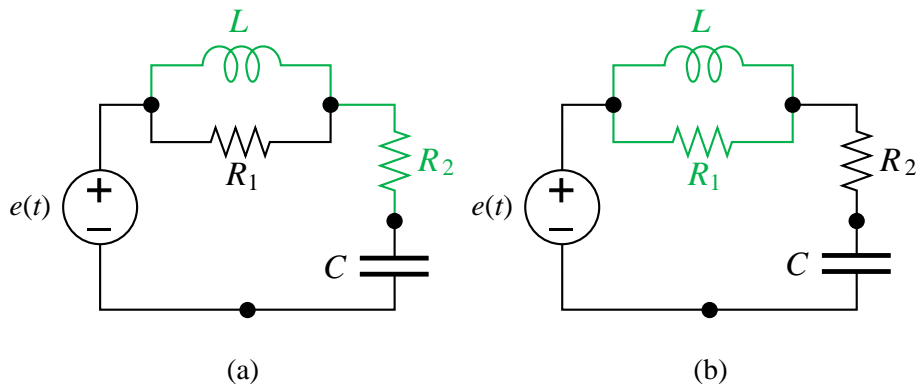


図 3.1. 回路の例 .

図 3.2. 図 3.1 の回路の C 標準木 . 黒い実線の枝集合 . この回路では 2 つの C 標準木 (a), (b) が考えられる .

7. 電圧源の木枝を含むカットセットに関する KCL , 電流源の補木枝を含む閉路の KVL は, いずれも回路の状態方程式の導出には関係しないので, 使用しない .

この手順にしたがうと, 回路方程式は, キャパシタ電圧とインダクタ電流を未知変数とする 1 階連立常微分方程式となる . KCL と KVL が混在して使われていることに注意しよう . このことから, 状態方程式を一階連立常微分方程式として求めるこの定式化を混合解析 (hybrid analysis), 方程式を混合方程式という .

♣ 例 2.1 ♣

図 3.1 の回路の C 標準木を定め, 状態方程式を求めよ .

♣ 解 ♣ C 標準木については図 3.2 参照 . 図 3.2(a) の標準木を用いて, この回路の状態方程式を求めよう . いま, 図 3.3 に示したように枝の方向 (電流の方向とする) を定めると, 基本カットセットと基本ループは, 図中に示した $CS1, CS2, CS3, LP4, LP5$ となる . これらの集合に関する KCL, KVL を求めると次式を得る .

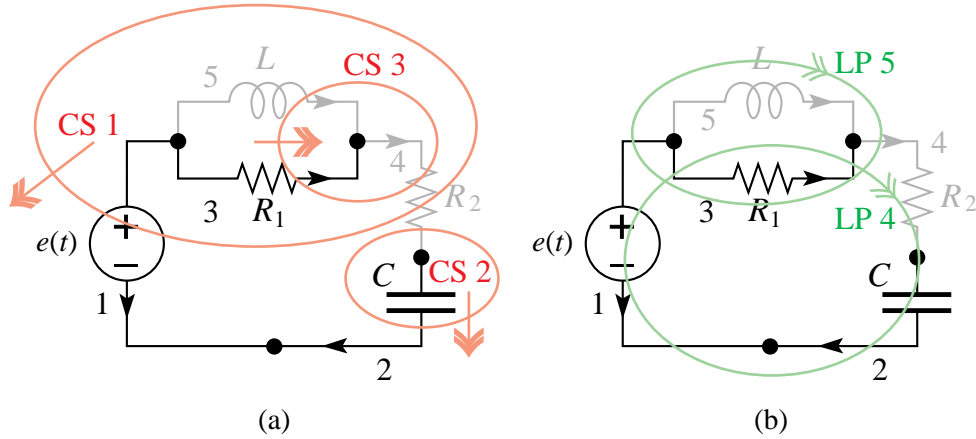


図 3.3. 図 3.2(b) の C 標準木に関する基本カットセット (a) と基本ループ (b) .

$$\begin{aligned}
 CS\ 1: \quad & i_V + i_{R2} = 0 \\
 CS\ 2: \quad & i_C - i_{R2} = 0 \\
 CS\ 3: \quad & i_{R1} - i_{R2} + i_L = 0 \\
 LP\ 4: \quad & v_{R2} + v_{R1} + v_C - e(t) = 0 \\
 LP\ 5: \quad & v_L - v_{R1} = 0
 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

そこでまず，抵抗枝の電圧と電流を状態 v_C, i_L で表してしまう．抵抗特性

$$\begin{aligned}
 v_{R1} &= R_1 i_{R1} \\
 v_{R2} &= R_2 i_{R2}
 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

を式 (3.1.1) $LP\ 4:$ に代入し， $CS\ 3:$ と連立させて

$$\begin{aligned}
 i_{R1} - i_{R2} &= -i_L \\
 R_1 i_{R1} + R_2 i_{R2} &= e(t) - v_C
 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

を解くと次式を得る．

$$\begin{aligned}
 i_{R1} &= -\frac{1}{R_1 + R_2} v_C - \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{1}{R_1 + R_2} e(t) \\
 i_{R2} &= -\frac{1}{R_1 + R_2} v_C + \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_L + \frac{1}{R_1 + R_2} e(t)
 \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

したがって，抵抗枝の電圧は次式となる．

$$\begin{aligned}
 v_{R1} &= -\frac{R_1}{R_1 + R_2} v_C - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{R_1}{R_1 + R_2} e(t) \\
 v_{R2} &= -\frac{R_2}{R_1 + R_2} v_C + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{R_2}{R_1 + R_2} e(t)
 \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

一方, この回路の主要な方程式といえるキャパシタに関するカットセット方程式 (3.1.1) $CS 2$: とインダクタに関するループ方程式 (3.1.1) $LP 5$: にそれぞれの特性を代入し, 式 (3.1.4), (3.1.5) を使うと, 次の状態方程式を得る.

$$\begin{aligned} C \frac{dv_C}{dt} &= -\frac{1}{R_1 + R_2} v_C + \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_L + \frac{1}{R_1 + R_2} e(t) \\ L \frac{di_L}{dt} &= -\frac{R_1}{R_1 + R_2} v_C - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{R_1}{R_1 + R_2} e(t) \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

以上の手順に従えば, 確実に状態方程式を求めることができる. カットセット方程式 (3.1.1) $CS 1$: はこの手順では使わなかったことに注意しよう. 電圧源を流れる電流は状態方程式の導出には関係のない方程式である. これは, 電流源を含む場合の電流源に関するループ方程式についても同じことが言える. ♣

A 「この演習問題を教室でしていたとき, 先生が v_C, i_L で式を立てるようにとおっしゃったので, カットセット $CS 3$ で

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_L + \frac{L}{R_1} \frac{di_L}{dt} \quad (3.1.7)$$

とし, 外側のループで

$$L \frac{di_L}{dt} + R_2 C \frac{dv_C}{dt} + v = e(t) \quad (3.1.8)$$

とやったら, 1 階連立方程式の整理をどうすればよいのか困ってしまいました」

K 「それでいいじゃないか. $C \frac{dv_C}{dt}$ と $L \frac{di_L}{dt}$ の連立方程式として解けばいいんだ. 式 (3.1.7) を (3.1.8) に代入して

$$L \frac{di_L}{dt} + R_2 \left(i + \frac{L}{R_1} \frac{di_L}{dt} \right) + v = e(t)$$

となるから, 整理すると式 (3.1.6) の第 2 式となる. また, 式 (3.1.8) を (3.1.7) に代入すると

$$C \frac{dv_C}{dt} = i + \frac{1}{R_1} \left(e(t) - v_C - R_2 C \frac{dv_C}{dt} \right)$$

これを整理すると式 (3.1.6) の第 1 式となる」

A 「問題となる回路が与えられたとき, どうしたらいいのが迷ってしまいます」

K 「キャパシタとインダクタの個数が数個の場合は, 大体「目の子」で君がやったようにしたほうが早いだろう. この問題で少し手間取った人はかなりいると思うけど, それは抵抗が嫌な具合つながっていたからだろう. 一般に抵抗素子が沢山含まれる回路では, 抵抗枝の電圧・電流を状態で表現するところで計算が必要になる. すなわち, 式 (3.1.3) の部分がふくれあがってくるので一見複雑に見える. こんな場合は, 標準木を考えて解けばよいだろう」

3.2 保存則を持つ回路の状態方程式

3.3 強制退化を持つ回路の状態方程式

3.4 保存則と強制退化を持つ回路の状態方程式

3.5 LC 回路の状態方程式