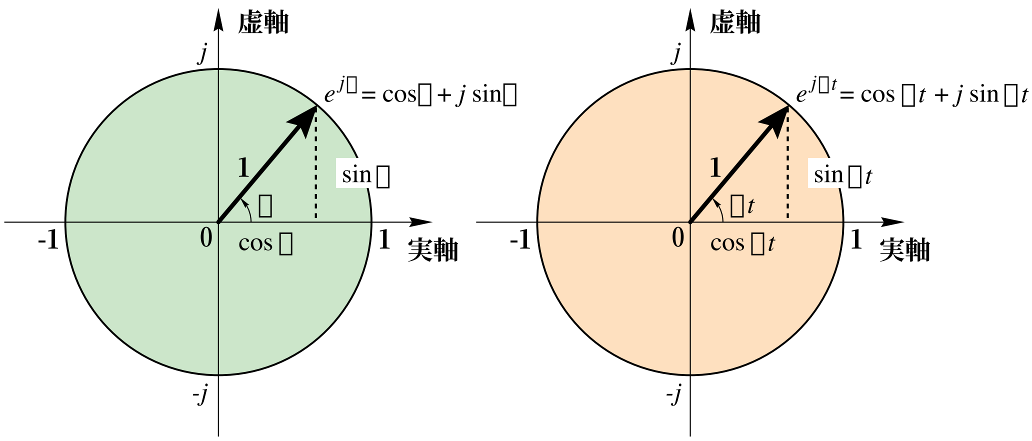
電気数学演習・講義ノート

―連立方程式と複素数になじもう―



2003.04.01

徳島大学工学部
電気電子工学科

川上　博

はじめに

この講義は，高校で習った数学をおおざっぱに復習し，後期から始まる「電気回路」へ橋渡しをしようとするものです．このノートは，この講義・演習のために取り合えず作った「試作ノート」です．

高校で習ったが忘れた，習ったが分からなかった，習わなかったなど，みなさん一人一人状況は違うでしょうが，まあ，今から勉強するのだと思ってお付き合いください．

数学をどうして勉強するのか？それは，工学（特に電気工学はそうなのですが）を語るには，数学なしで語れないからです．自然の現象を説明する「言語」，すなわち言葉，として数学があるのです．ひらがなや漢字を知らずして，日本語の小説を読めないのと同じです．ベクトルや連立方程式を知らずして電気は理解できないのです．そんな訳で必要となりそうな事柄を整理してみました．

さて，この講義で勉強し理解してほしい目標は，まず

- 連立方程式が解けるようになること
- 複素数の計算が自由にできるようになること

です．その上で

- 複素数を係数にもつ連立方程式が解ける
- 複素三角関数（指数関数）を使いこなせる

ようになってほしいと思います．これらは，このノートの第 2 章から述べてあります．

第 1 章は，関数とその微分・積分についての復習です．直接上で述べた目標には必要ないのですが,「なぜ連立方程式なんか解かなければいけないの？」と言うような疑問に応えるには背後で必要となるでしょう．

各章の内容と高校数学の対応は次のページの表 0.1 のようになっています．大抵の内容は，高校の教科書にありますが，どこがどう違うのか比較してみるのもおもしろいでしょう．

実は，このノートを作っていて盛り込みたい事柄はいっぱいありました．でも,「消化不良より教えない方がよい」と考えて，書いた項目をどんどん削除しました．これまでの経験から，多くの皆さんが勉強って “何かを覚えること” と勘違いしています．“何かを覚えること” なんかではなく “何かを分かるること” なのです．覚えているだけでは，少しちがった応用にも適用することができませんが，分かっていればどんな局面に遭遇してもうまく使うことができます．分かってしまえば，ゴヂャゴジャした知識をきれいさっぱり忘れて，頭の中をクリーニングして清潔に整頓しておくこともできます．受験勉強からのできるだけ早い脱却が望まれます．

もう一つの悩みは，英語に慣れるということです．最近は，インターネットや各種マニュアルを読みこなすにはどうしても数カ国語に馴染んでおいた方が便利です．事始めに，少し手元のテキストから “無断借用” した文章の端くれを付録に載せておきました．著者の方々には借用を感謝致します．無料配布の教育用テキストなのでお許しください．

表 0.1. このノートの内容と高校数学との対応表

このノートの内容		高等学校の数学の教科書						
章節	内　容	I	II	III	A	B	C	
1.1	2 次方程式の解	◯						3
1.2	関数とグラフ	◯						
1.3	関数の微分と積分		◯	◯				
1.4	集合演算と論理演算				◯			
2.1	1 次関数					◯	◯	5
2.2	連立 1 次方程式						◯	
2.3	ベクトルと行列の幾何学的意味					◯	◯	
2.4	連立 1 次方程式の解の重ね合わせ							
3.1	複素数はどこから生まれたのか					◯		4
3.2	複素平面					◯		
3.3	複素係数の連立 1 次方程式							
3.4	複素関数							
3.5	指数関数と三角関数	◯	◯	◯		◯		
4.1	正弦波		◯	◯				3
4.2	複素正弦波							

◯ の無い行は，高校では習っていない項目を意味する．

外国語を学ぶ一つのそしてあまり語られていない利点は，言語を変えてみると “考え方（概念）” がみえてくることがあることです．特に，自然科学の勉強にはヨーロッパ原産の概念で固められている事柄を彼らの立場に立って考えることが大切です．少し馴染みにくいことでしょうが努力してみてください．

最後に，一言．人生は長いのです．これからは自分に合った勉強のスタイルを見付けて，そのスタイルで勉強しましょう．たとえば，このノートには，正解が与えられていません．どんな解答が正しいって？そう，自分でこれが正しいのだと思った解答が正しいのです.「自分に合った勉強のスタイル」なんて，言うは易しく行うは難しかも知れませんね？

では，よいご旅行を

2003 年 4 月 1 日

「さよなら」と，キツネがいいました.「さっきの秘密をいおうかね．なに，なんでもないことだよ．心で見なくちゃ，ものごとはよく見えないってことさ．かんじんなことは，目に見えないだよ」「かんじんなことは，目に見えない」と，王子さまは，忘れないようにくりかえしました．

“Le Petit Prince” par Antoine de Saint-Exupéy

目 次

第 1 章

高校数学のおさらい

　この章では，高等学校で学んだ数学のうち，これから必要となるであろう幾つかの事柄をおさらいしておく．忘れてしまった人は，適当に必要となった時に復習なり勉強し直すなりしてほしい．

1.1　2 次方程式の解

1.1.1　2 次方程式の解の公式

　方程式のすべての項を左辺に移項して整理したとき，次の形で表される方程式を，x についての **2 次方程式**という．

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.1.1}$$

ここに a, b, c は**定数**であり，$a \neq 0$ とする．
　たとえば，

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \tag{1.1.2}$$

は x についての 2 次方程式である．また，

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \tag{1.1.3}$$

も λ についての 2 次方程式である．式 (1.1.2) と式 (1.1.3) は，**未知変数**が x と λ のように異なっているが，同じ方程式である．したがって，解はどちらの方程式も同じとなるであろう．実際，

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) \tag{1.1.4}$$

と**因数分解**できるので，答えは

$$x = \lambda = -1,\ \text{または}\ 3 \tag{1.1.5}$$

となる．

一般に 2 次方程式 (1.1.1) の**解の公式**[1] は次式となる.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.1.6}$$

以上の事柄は，ある数学 I の教科書をみながら要点を書き写したものである．そこで，幾つかの注意を述べておこう.

注意 1　式 (1.1.1) では x が未知変数，その他の文字変数 a, b, c はパラメータ（助変数，または経数ともいう）である．パラメータとは,「定数あつかいにする」変数という意味である．したがって「定数」なのであるが，いつ何時「変えられる」かも知れない．実際，解の公式 (1.1.6) をみると右辺の $a \neq 0, b, c$ はどんな実数を代入してもいい，すなわちこの段階では変数扱いになっている，ことに注意しよう.

何が変数で，何がパラメータかは，その場その場で問題を考える立場によって変化する．たとえば,

$$x^2 + ax + a^2 = 0$$

は，x を未知変数と考え，a をパラメータと考える場合と，その逆に a を未知変数と考え，x をパラメータと考える場合の 2 種類が考えられる．更に，x も a も未知変数と考え 2 つの未知変数の式と見ることもできる.

結局，文字を含む式では，未知変数と考えた変数以外の文字変数はパラメータである.

注意 2　これからは，数式を表すために「英語」,「ドイツ語」「フランス語」「ロシア語」「ギリシャ語」などのアルファベット文字を使用する．特にギリシャ語のアルファベット文字には慣れておく必要がある．表 1.1 を参照.

注意 3　解の公式 (1.1.6) の右辺の根号の中の式

$$D = b^2 - 4ac$$

は，**判別式**と呼ばれている.

- $D > 0$ の場合は，相異なる 2 実根,
- $D = 0$ の場合は，重根,
- $D < 0$ の場合は，共役複素根 [2]

となる.

注意 4　2 次方程式 (1.1.1) の解の公式 (1.1.6) は，パラメータ a, b をうまく選んでやると少し簡単になる.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

---

[1] 2 次方程式の解を「解」と言わず「根」と呼ぶことが自然と考えるかどうかは，育った世代による．ひと昔前までは，根であった．したがって先生の世代は，2 実根，重根，複素根などと呼び，2 実解，重解，複素解ということにいささか抵抗を感じる.

[2] 複素数については第 3 章で考える．ここでは，複素解となる場合があることに注意するだけれよい.

表 1.1. ギリシャ文字 (Greek alphabet)

	大文字 (Upper case)	小文字 (lower case)	よみかた pronunciation		Note
1	A	α	アルファ	alpha	A
2	B	β	ベータ	beta	B
3	Γ	γ	ガンマ	gamma	G
4	Δ	δ	デルタ	delta	D
5	E	ϵ, ε	イプシロン	epsilon	E
6	Z	ζ	ゼータ	zeta	Z
7	H	η	イータ	eta	H
8	Θ	θ, ϑ	シータ、テータ	theta	
9	I	ι	イオタ	iota	I
10	K	κ	カッパ	kappa	K
11	Λ	λ	ラムダ	lambda	L
12	M	μ	ミュー	mu	M
13	N	ν	ニュー	nu	N
14	Ξ	ξ	クシー	xi	
15	O	o	オミクロン	omicron	O
16	Π	π	パイ	pi	P
17	P	ρ, ϱ	ロー	rho	R
18	Σ	σ	シグマ	sigma	S
19	T	τ	タウ	tau	T
20	Υ	υ	ユプシロン	upsilon	
21	Φ	ϕ, φ	ファイ	phi	
22	X	χ	カイ	chi	X
23	Ψ	ψ	プサイ	psi	
24	Ω	ω	オメガ	omega	

だから，方程式

$$x^2 + 2Bx + C = 0$$

の解の公式を考えれば十分となる．ここに，$B = \dfrac{b}{2a}$, $C = \dfrac{c}{a}$ とおいた．この方程式の解の公式は

$$x = -B \pm \sqrt{B^2 - C}$$

となる．

注意 5　公式を丸覚えして，いつでも ?? の一つ覚え的に使う人がいる．簡単な 2 次方程式は，その都度，因数分解などによってサーと計算するクセをつけてほしい．

$$x^2 - 1 = 0,\ x^2 + 1 = 0$$

などの解は因数分解して $x = \pm 1$, $x = \pm\sqrt{-1}$ と直ちに知ることができる[3]．

【問題 1.1.1】 2 次方程式の解の公式 (1.1.6) を導け．

1.1.2　2, 3 の例題

【例題 1.1.1】

2 次方程式

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1.1.7}$$

の 2 つの解が α, β となったという．このとき， α, β と p, q の関係式を求めよ．

【解】式 (1.1.7) の解が α, β となることから，式 (1.1.7) は次のように因数分解できるはずである．

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta) = 0 \tag{1.1.8}$$

そこで

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

より

$$p = -(\alpha + \beta),\ q = \alpha\beta \tag{1.1.9}$$

を得る．この関係式を**解と係数の関係式**という．

解と係数の関係を利用すると，一つの解 $x = \alpha$ が分かっているとき，他の一つの解 β は，式 (1.1.9) を用いて

$$\beta = -p - \alpha,\ \text{または}\ \beta = \frac{q}{\alpha} \tag{1.1.10}$$

のように求めることができる．

[3] $\sqrt{-1}$ は数学では，i と書き，電気工学では j と書く習慣となっている．いずれの場合も虚数単位という．これらについては第 3 章で考える．

【例題 1.1.2】

2 次方程式の解の公式 (1.1.6) を機械的に用いると，間違った答えを出してしまうことがある．このことを体験するために次の方程式の解を 10 進 3 桁切り捨てで求めなさい．

$$x^2 - 303x + 42 = 0 \tag{1.1.11}$$

【解】解の公式 (1.1.6) より計算すると

$$x = \frac{303 \pm \sqrt{303^2 - 4 \times 42}}{2} = \frac{303 \pm 302}{2} = 302,\ 0.5$$

次に，$x = 302$ は解の公式 (1.1.6) を用いて計算し，もう一つの解は式 (1.1.10) を用いて求めると

$$x = \frac{42}{302} = 0.139 \neq 0.5$$

となる．正解は

$$x_1 = 302.861\cdots,\ x_2 = 0.1387\cdots$$

であるから，解の公式から求めた 0.5 は正しくない．

これを調べるには，解が求められた時点でその解と式 (1.1.9) を使って再び方程式を作ってみるとよい．$x = 302,\ 0.5$ の場合は

$$(x - 302)\,(x - 0.5) = x^2 - 302.5x + 151 = 0$$

また，$x = 302, 0.139$ の場合は

$$(x - 302)\,(x - 0.139) = x^2 - 302.139x + 41.978 = 0$$

となって，後者の方が正しいことが分かる．

一般に解の公式 (1.1.6) は，$b^2 \gg |4ac|$ の場合，どちらかの式の分子の有効桁数が減少して誤差を生じる．これを**桁落ち** (cancellation) という．桁落ちは，数値計算をするとき最も気を付けなければならない事柄である．

【例題 1.1.3】

2 次方程式に含まれるパラメータの数が多くなると，解の公式の計算が煩雑になることがある．こんな場合にもめげずに「式の計算」を誤り無く遂行できるようになりたいものである．さて，次の 2 次方程式の解が負の 2 実根となることを証明しなさい．

$$L_1L_2\lambda^2 + \{L_1R_2 + (L_1 + L_2)\,R_1\}\,\lambda + R_1R_2 = 0 \tag{1.1.12}$$

ここに，すべてのパラメータは正数と仮定する．

【解】解の公式 (1.1.6) より計算すると[4]

$$\lambda = \frac{-\left\{L_1R_2 + (L_1+L_2)\,R_1\right\} \pm \sqrt{\left\{L_1R_2 + (L_1+L_2)\,R_1\right\}^2 - 4L_1L_2R_1R_2}}{2L_1L_2} \tag{1.1.13}$$

そこで

$$\begin{aligned} D &= \left\{L_1R_2 + (L_1+L_2)\,R_1\right\}^2 - 4L_1L_2R_1R_2 \\ &= (L_1R_2 - L_2R_1)^2 + 2L_1R_1\,(L_1R_2 + L_2R_1) + (L_1R_1)^2 > 0 \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

と

$$-\left\{L_1R_2 + (L_1+L_2)\,R_1\right\} + \sqrt{\left\{L_1R_2 + (L_1+L_2)\,R_1\right\}^2 - 4L_1L_2R_1R_2} < 0$$

より題意が言える．

【問題 1.1.2】次の x についての 2 次方程式を解け．

1. $x^2 + x - 1 = 0$
2. $x^2 + 100x + 1 = 0$
3. $x^2 + 2\zeta x + \left(\zeta^2 + \omega^2\right) = 0$

【問題 1.1.3】2 つの 2 次関数：

$$f(x) = ax^2,\ \ g(y) = by^2 \tag{1.1.15}$$

を組み合わせた関数：

$$h(x,\ y) = ax^2 + by^2 \tag{1.1.16}$$

は，2 つの独立変数 $x,\ y$ のいずれの変数についても 2 次関数となっている．一般に，

$$k(x,\ y) = ax^2 + 2cxy + by^2 \tag{1.1.17}$$

を変数 $x,\ y$ についての 2 次形式という．

さて，関数 (1.1.15) と (1.1.16) は，次の性質を持っている．

- $a > 0$ の場合，$f(x)$ は，$x = 0$ を除いて，$f(x) > 0$ である．
- $b > 0$ の場合，$g(y)$ は，$y = 0$ を除いて，$g(y) > 0$ である．
- $a > 0,\ b > 0$ の場合，$h(x,\ y)$ は，$x = y = 0$ を除いて，$h(x,\ y) > 0$ である．

2 次形式 (1.1.17) が $x = y = 0$ を除いて，$k(x,\ y) > 0$ となるための係数 $a,\ b,\ c$ が満たす条件を求めよ．

[4] L_1 などと文字の右下に付けた数字や文字のことを「添字」という．添字は，右下に限らず，右上，左上，左下など場合によってあちこちに付けられるので注意が必要である．L_1^2 のように付けたりもする．この場合 L_1 の 2 乗と区別しにくくなる．特に注意が必要である．また，L_{11} 等は，L の添字が 11 ではなくて (1, 1) と 1 を 2 つ並べて書いてあることを意味することもある．いずれにせよ文脈から理解することが必要である．

1.2　関数とグラフ

1.2.1　関数とは

2 つの変数 x, y の間にある関係があって，x の値を定めるとそれに対応して y の値がちょうど 1 つ定まるとき，y は x の**関数** (function) であるという．またこのとき，x を**独立変数**，y を**従属変数**という[5]．

y が x の関数であることを，次のような記号で表す．

$$y = f(x) \tag{1.2.1}$$

たとえば，2 次関数は

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \tag{1.2.2}$$

と表される関数のことである．ここに a, b, c はパラメータであり，$a \neq 0$ とする．

【例題 1.2.1】

2 次関数

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \tag{1.2.3}$$

のグラフを描き，最小値を与える x_{min} とその時の y_{min} の値を求めよ．

【解】式 (1.2.3) は次式のように完全平方の形に変形できる．

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1 \tag{1.2.4}$$

したがって，$x_{min} = 1$ のとき，この関数は最小となり，最小値は $y_{min} = -1$ である．また，この関数のグラフは放物線であり， 図 1.1 となる．

別の考え方としては，最小値をとる x_{min} で関数の微分が 0 となることを使って[6]，

$$\frac{dy}{dx} = x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x_{min} = 1$$

したがって，関数 y の最小値は

$$y_{\min} = f(1) = -1$$

となる．

【問題 1.2.1】関数 $y = f(x)$ のグラフを $\mathbf{G}$ とする．このグラフ $\mathbf{G}$ を x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動して得られるグラフ **G'** の関数は $y = f(x-p) + q$ となることを説明しなさい．

---

[5]「…という」とか,「…と呼ぶ」という文章は，しばしば自然科学の教科書で見かける文章のスタイルである．これらの文章は「…」の部分の「単語または文の意味を定義する」場合に用いる．たとえば，ここでは関数とは「x の値を定めるとそれに対応して y の値がちょうど 1 つ定まる」と決めた（定義した）ので，x の値を定めるとそれに対応して y の値が 2 つ定まる場合は関数とは呼ばないのである．したがって円の方程式 $x^2 + y^2 = 1$ から定まる $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ はここでいう関数ではない．

[6]記号 $\Rightarrow$ は $P \Rightarrow\; Q$ のように使って，P より Q が導かれることを意味する．P ならば，Q が成り立つともいう．

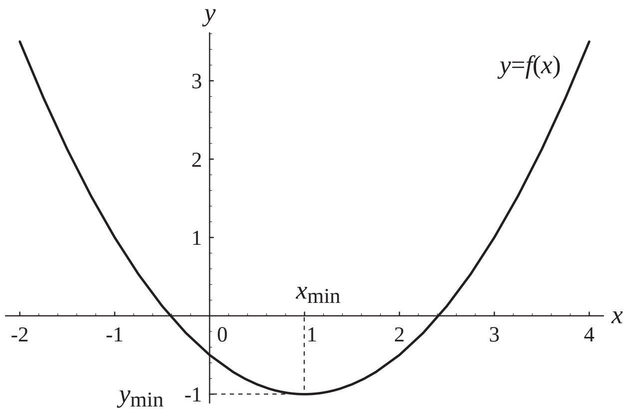


図 1.1. 式 (1.2.3) のグラフ.

【問題 1.2.2】関数 $y = f(x)$ のグラフを $\mathbf{G}$ とする．このとき，関数 $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = -f(-x)$ のグラフは $\mathbf{G}$ とどのような関係にあるか.
【問題 1.2.3】4 つの辺の長さの和が ℓ の長方形がある．この長方形はどのようなときに，その面積 S が最大となるか.
【問題 1.2.4】地上から物体を，初速度 20 $[m/sec]$ で真上に投げあげたとき，t 秒後の物体の高さ y $[m]$ は，およそ $y = -5t^2 + 20t$ で表される．物体がもっとも高い位置に達するのは，投げあげてから何秒後か．また，その高さを求めよ．更に，手元に還ってくるのは何秒後か．またその時の速度はいくらか.

1.2.2　1 次関数

関数とそのグラフの内で，最も単純でかつ最も大切なものは，**1 次関数**[7] とそのグラフである直線である． 1 次関数は

$$y = ax + b \tag{1.2.5}$$

の形やその逆関数

$$x = cy + d \tag{1.2.6}$$

あるいは，x と y のどちらが独立変数か区別できないような形[8]

$$ax + by = c \tag{1.2.7}$$

のいずれかで与えられる．これらの関係式がどのような直線となるかは十分に理解しておくことが必要である.
【問題 1.2.5】関数 (1.2.5)， (1.2.6) および (1.2.7) のグラフを描け.
【問題 1.2.6】 1 次関数 (1.2.5) と表すことができるが， 1 次関数 (1.2.6) とは表すことができない 1 次関数はどんな 1 次関数か.

[7] 1 次関数はまた，1 次形式 (linear form) あるいは線形関数 (linear function) とも呼ばれている.
[8] このように変数間の関係を $f(x,\ y) = 0$ のような形で与えることを，陰関数表示と言ったりする.

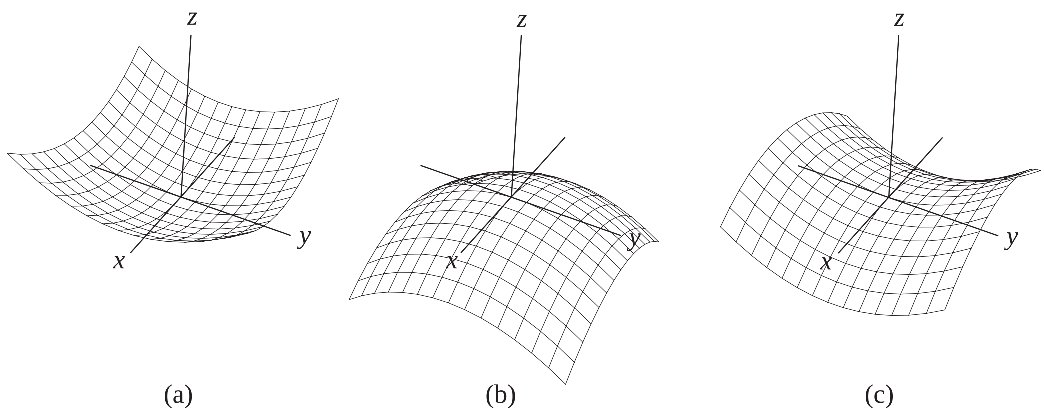


図 1.2. 2 次形式のグラフ.

1.2.3　2 次形式のグラフ

【問題 1.1.3】で考えた 2 次形式：

$$z = h(x,\ y) = ax^2 + by^2 \tag{1.2.8}$$

のグラフを考えよう．まず，二つの変数 $x,\ y$ を平面の上の点の座標 $(x,\ y)$ と考えると，式 (1.2.8) はこの平面上で定義された関数とみることができる．したがって，この関数の値を 3 番目の座標 z に対応させると，この関数のグラフは，3 次元空間の曲面となる．

さて，$y = 0$ でのグラフは，$z = h(x, 0) = ax^2$ となって放物線を表している．$a > 0$ ならば "上に開いたグラフ[9] "，$a < 0$ ならば "下に開いたグラフ" となる．

そこで，式 (1.2.8) のグラフは，x 軸と y 軸方向に上あるいは下に開いた放物面[10] となる．組み合わせとして次の 4 種類が考えられる．

1. $a > 0,\ b > 0$ の場合．上に開いた放物面．この場合，$x = y = 0$ を除いて，$h(x,\ y) > 0$ となる．2 次形式 (1.2.8) は**正定値** (posive definite) であるという． 図 1.2 (a) 参照.
2. $a < 0,\ b < 0$ の場合．下に開いた放物面．この場合，$x = y = 0$ を除いて，$h(x,\ y) < 0$ となる．2 次形式 (1.2.8) は**負定値** (negative definite) であるという．図 1.2 (b) 参照.
3. $a > 0,\ b < 0$ の場合．x 軸方向には上に開き， y 軸方向には下に開いた放物面．この場合は $h(x,\ y) > 0$ の部分も $h(x,\ y) < 0$ となる部分もあるので $h(x,\ y)$ は**不定値** (indefinite) という.
4. $a < 0,\ b > 0$ の場合．x 軸方向には下に開き， y 軸方向には上に開いた放物面．x 軸と y 軸を入れ替えると 3 番目の場合と同じとなるので，この場合も $h(x,\ y)$ は不定値である．図 1.2 (c) 参照.

[9] 下に有界ともいう.
[10] 軸に沿った面の切り口が放物線となっている曲面のこと.

1.3 関数の微分と積分

1.3.1 微分係数と導関数・微分

関数の微分や積分は，自然科学における法則の記述に欠くことのできない道具である．特に，微分は「変化の法則」を書き表すために必要である．高等学校では「数学 II」でこれらを学ぶ．すこし，教科書を引用しよう．

関数 $y=f(x)$ について，x が a から $a+h$ まで変化するときの平均変化率

$$m=\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1.3.1}$$

を考えよう．この式で，h が 0 と異なる値をとりながら 0 に限りなく近づくとき，m の値が一定の値に限りなく近づくならば，その極限値を，関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微係数**または**変化率**といい，$f'(a)$ で表す．すなわち $f'(a)$ は次のように書くことができる．

$$f(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1.3.2}$$

さて，一般に x のとる各値 a に対して微係数 $f'(a)$ を対応させると，1 つの新しい関数が得られる．この新しい関数を元の関数 $f(x)$ の**導関数**といい，記号 $f'(x)$ で表す．

次に思いつくままに幾つかの注意を述べておこう．

注意 1　微分演算は古い歴史を持っている．したがって色々な記法が色々な人々によって使われてきた．たとえば

$$f'(x),\ \frac{df}{dx},\ \frac{Df}{Dx},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \dot{f}(x),\ df,\ Df,\ \partial f \tag{1.3.3}$$

など，様々である．普通は

$$f'(x),\ \frac{df}{dx}$$

が最もよく使われている．$\dfrac{df}{dx}$ は「ディエフ・ディエッキス」と読む.「ディエッキス」分の「ディエフ」と読むと笑われる．

注意 2　電気回路や力学では，独立変数として x の代わりに時間 (time) t を使用する．そうすると $x,\ y,\ z$ などの文字を従属変数として使うことができるようになる．この場合には，関数 $x(t)$ の微分は

$$x'(t),\ \frac{dx}{dt},\ \dot{x}(t) \tag{1.3.4}$$

となる．通常は記法 $\dot{x}(t)$ を使うので注意が必要である．

注意 3　独立変数が多い関数[11] の場合の微分は，一つの独立変数に着目し，他の独立変数をあたかも定数であるかのように扱った微分を考える．この微分を偏微分という．たとえば，2 個の変数に依存する関数 $f(x,\ y)$ は y の値を固定す

[11] 多変数関数という．

ると x のみの関数になるから，x についての微分を考えることができる．これを $f(x,\ y)$ の x についての**偏微分** (partial derivative) といい，

$$f_x(x,\ y),\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

などで表す．偏微分を用いた法則は電気磁気学で多用される．

注意 4 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の導関数は

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

と書く．これを $f(x)$ の 2 階微分という．r 階微分を

$$f^{(r)}(x),\ \left(\frac{d}{dx}\right)^r f(x),\ \frac{d^r f(x)}{dx^r}$$

などと記す.

注意 5 関数 $y = f(x)$ を考えていたとき，実は x が独立変数 t の関数 $x = g(t)$ であった，と言うような場合がおこる．この場合 y は t の関数とも考えられる．これを**合成関数**という.

$$y = f(x) = f(g(t)) \tag{1.3.5}$$

合成関数の微分は次式となる.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dg}{dt} \tag{1.3.6}$$

1.3.2 幾つかの微分の公式

幾つかの有用な関数の微分をあげておこう.

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \tag{1.3.7}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \tag{1.3.8}$$

$$\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x} \tag{1.3.9}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \tag{1.3.10}$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \tag{1.3.11}$$

次の公式も知っておいてほしい.

$$\frac{d}{dx}af(x) = a\frac{d}{dx}f(x) \tag{1.3.12}$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) \tag{1.3.13}$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\,g(x)\} = g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x) \tag{1.3.14}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} \tag{1.3.15}$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d}{dg}(f(g))\frac{d}{dx}g(x) \tag{1.3.16}$$

【問題 1.3.1】次の微分を計算せよ．

1. $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^r x^n$
2. $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^r \left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n\right)$
3. $\dfrac{d}{dx}e^{ax}$
4. $\dfrac{d}{dx}\sin ax$

【問題 1.3.2】次の微分を計算せよ．

1. $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^2 \{f(x)\,g(x)\}$
2. $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^3 \{f(x)\,g(x)\}$
3. $\left(\dfrac{d}{dx}\right) \{f(x)\,g(x)\,h(x)\}$
4. $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^2 \{f(g(x))\}$

1.3.3　積分

微分すると関数 $f(x)$ となるような関数，すなわち関数 $f(x)$ を導関数とする関数 $F(x)$ を，$f(x)$ の**不定積分**という．したがって不定積分とは微分の逆演算である．$f(x)$ の不定積分を

$$\int f(x)\,dx$$

と記す．不定積分は任意定数 C を加えても不定積分である．

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{1.3.17}$$

関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とするとき，2 つの実数 a，b に対して，$F(b) - F(a)$ の値が考えられる．この値は，関数 $f(x)$ と 2 つの実数 a，b のみによって定まり，不定積分の選び方（すなわち積分定数 C ）には関係しない．

そこで，この値 $F(b) - F(a)$ を，関数 $y = f(x)$ の a から b までの**定積分**といい

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \tag{1.3.18}$$

と表す．

つぎの公式が成り立つ．

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx = f(x) \tag{1.3.19}$$

$$\int_a^b \{hf(x)+kg(x)\}\,dx = h\int_a^b f(x)\,dx + k\int_a^b g(x)\,dx \tag{1.3.20}$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{1.3.21}$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{1.3.22}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{1.3.23}$$

x 軸の区間 $[a,\ b]$ で $f(x) \geq 0$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x = a,\ x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1.3.24}$$

となる．

合成関数の微分 (1.3.6) を不定積分すると次式を得る．

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt \quad \text{ここに} \quad x = g(t) \tag{1.3.25}$$

ただし，右辺は得られた不定積分である t の関数に，$x = g(t)$ を t について逆に解いた x の関数を代入する．この積分を**置換積分**という．

積の微分の公式 (1.3.14) を不定積分すると

$$f(x)\,g(x) = \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

となる．これを移項して，次の**部分積分**の公式を得る．

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx \tag{1.3.26}$$

【問題 1.3.3】次の積分を計算せよ．

1. $\displaystyle\int x^n dx$
2. $\displaystyle\int e^{ax} dx$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx$
4. $\displaystyle\int \sin x dx$
5. $\displaystyle\int \cos ax dx$
6. $\displaystyle\int e^{-at}\sin(bt)\,dt$

1.4　集合演算と論理演算

この節は，最初読み飛ばしでもいい．電気屋さんが数学の本を読む時，知っていたら誤解が少なくなるであろう文章の「スタイル」についての初歩的事項が述べられている．

L. シュワルツ[12] も書いているように，物理学者や技術者のための「涙なしの数学」は存在しない．現代の物理学者や技術者は，莫大な量の，しかも広大な領域にわたっての数学的知識を必要とする．この知識を理解するためには，数学独特の「言い回し」や「記法」にある程度慣れておく必要がある．

1.4.1　集合とその演算

ものの集まりを**集合**という．たとえば,

- 電気電子工学科 1 年生全部の集合
- 平面上の点全部の集合
- 0 以上の整数全部の集合 $\mathbf{N} = \{0,\ 1,\ 2, \cdots\}$
- 整数全部の集合 $\mathbf{Z} = \{\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2, \cdots\}$
- 有理数全部の集合 $\mathbf{Q} = \{m/n \mid m, n \in Z,\ n \neq 0\}$
- 実数全部の集合 $\mathbf{R}$
- 複素数全部の集合 $\mathbf{C}$

などは集合の例である．数の集合は，しばしば使われるのでこの例にあげたような特別の記号で表す.「…全部の集合」と言うかわりに「…の全体」と言ってもよい.

部分集合

記号 $x \in \mathbf{E}$ は「x は集合 $\mathbf{E}$ の要素[13] である」を意味する[14]．集合 $\mathbf{A}$ がもう一つの集合 $\mathbf{E}$ の要素だけから成るとき，$\mathbf{A}$ は $\mathbf{E}$ の**部分集合**であるという.

集合を表すには

1. 要素を書き並べて表す．たとえば，三つの要素 $a,\ b,\ ,c$ から成る集合を $\{a,\ b,\ ,c\}$ と書く.
2. ある性質 P をもつ要素全部の集合を

   $$\{x \mid x \text{ は性質 } P \text{ を持つ }\}$$

   のように書く．たとえば,

   $$\{x \mid x \in \mathbf{R},\ x \geq 0\}$$

   は 0 以上の実数全部の集合を意味する.

[12] シュワルツ著，斎藤正彦訳：解析学 I，東京図書，1970．以下の事項は部分的にこの本から引用した.
[13]「要素」は element の訳語である.「元」ともいう．なお，電気回路では element は「素子」と訳されている.
[14] 集合はまた空間と呼ばれることも多く，そのときにはその要素はふつう点と呼ばれている.

などの方法が用いられる．

集合 $\mathbf{E}$ の部分集合には $\mathbf{E}$ 自身もあり，空集合[15] $\emptyset$ もある．また，一点 a からなる部分集合 $\{a\}$ もある．$\mathbf{E}$ の要素 a と $\mathbf{E}$ の部分集合 $\{a\}$ とを混同してはならない．

包含関係・補集合

$\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ を $\mathbf{E}$ の部分集合とする．$\mathbf{X}$ の要素がすべて $\mathbf{Y}$ の要素であるとき，$\mathbf{X}$ は $\mathbf{Y}$ に含まれる，または $\mathbf{Y}$ は $\mathbf{X}$ を含むと言い，$\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$ または $\mathbf{Y} \supset \mathbf{X}$ と書く．

$$\emptyset \subset \mathbf{X} \subset \mathbf{E},\ \emptyset \subset \emptyset,\ \mathbf{E} \subset \mathbf{E}$$

また，

$$\mathbf{X} \subset \mathbf{Y},\ \mathbf{Y} \subset \mathbf{Z} \text{ ならば } \mathbf{X} \subset \mathbf{Z}$$

が成り立つ．

$\mathbf{A}$ が $\mathbf{E}$ の部分集合であるとき，$\mathbf{A}$ に属さない $\mathbf{E}$ の要素全部の集合を $\mathbf{A}$ の**補集合**といい，$\bar{\mathbf{A}}$ と書く．このとき，$\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$ が成り立つ．また，$\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ ならば，$\bar{\mathbf{A}} \supset \bar{\mathbf{B}}$ となる．なお，$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ が $\mathbf{E}$ の部分集合で $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ のとき，$\mathbf{A}$ の要素で $\mathbf{B}$ に属さない要素全体の集合を $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ と書くことがある．

和集合・共通部分

集合 $\mathbf{E}$ の部分集合の集まりからなる集合を集合の族という．$\mathbf{E}$ の要素で，それらの部分集合の少なくとも一つに属するような要素全部の集合のことを**和集合**という．たとえば，三つの部分集合 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ の場合，それらの和集合を $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$ と書く．

ある添字集合 I によって添字づけられた部分集合 $\mathbf{A}_i$ の族の場合には，その和集合 $\bigcup_{i \in I} \mathbf{A}_i$ と書く．

集合 $\mathbf{E}$ の部分集合の集まりの共通部分とは，$\mathbf{E}$ の要素で，それらの部分集合のどれにも属するような要素全部の集合のことである．上と同様に，$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}$, $\bigcap_{i \in I} \mathbf{A}_i$ と書く．二つの部分集合の共通部分が空集合となるとき，この二つの部分集合は共通要素を持たないという．

部分集合の族の共通部分の補集合は，各部分集合の補集合の和集合である．部分集合の族の和集合の補集合は，各部分集合の補集合の共通部分である．すなわち，

$$\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}} = \bar{\mathbf{A}} \cup \bar{\mathbf{B}},\ \overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}} = \bar{\mathbf{A}} \cap \bar{\mathbf{B}} \tag{1.4.1}$$

が成り立つ．したがって，$\mathbf{E}$ の各部分集合にその補集合を対応させる操作により，

1. $\subset$ は $\supset$ に，
2. $\supset$ は $\subset$ に，
3. $\cup$ は $\cap$ に，
4. $\cap$ は $\cup$ に，

移る．

[15] 要素のない空っぽの集合のことを空集合という．

積集合

二つの集合 $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ に対し，$\mathbf{E}$ の要素 x と $\mathbf{F}$ の要素 y との順序のある組 $(x,\ y)$ 全部の集合を $\mathbf{E}$ と $\mathbf{F}$ の**積集合**といい，$\mathbf{E}\times\mathbf{F}$ と書く．$x \neq y$ ならば，$(x,\ y)$ と $(y,\ x)$ は違う要素であることに注意しよう．特に，$\mathbf{E}$ と $\mathbf{F}$ が同じ集合のときは混同しないようにしなければならない．

同様に，もっと多くの集合の積や集合の族の積を定義することができる．このとき，$(\mathbf{E}\times\mathbf{F})\times\mathbf{G}$, $\mathbf{E}\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G})$, $\mathbf{E}\times\mathbf{F}\times\mathbf{G}$ は，たがいに同一視することができる．これが集合の乗法の結合性である．

$\mathbf{E}\times\mathbf{E}$, $\mathbf{E}\times\mathbf{E}\times\mathbf{E}$ 等は，それぞれ $\mathbf{E}^2$, $\mathbf{E}^3$ 等と記す．したがって，実数全部の集合 $\mathbf{R}$ の n 個の積は $\mathbf{R}^n$ と書かれる．$\mathbf{R}^n$ の点は，n 個の任意の実数の順序づけられた組 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ である．

1.4.2　論理とその演算

命題 (proposition)

真 (true) か**偽** (false) かのどちらか一方にはっきり決めることのできる文を**命題**という．命題の集合 $P=\{A,\ B,\ ,\cdots\}$ から, {真，偽} への関数を f とすると，

$$f(A) = \text{真} \tag{1.4.2}$$

となる命題を “真の命題”

$$f(A) = \text{偽} \tag{1.4.3}$$

となる命題を “偽の命題” という．

命題の和と交わり

ある対象が命題 A または命題 B を特つということを，命題『 A または B 』を持つと言い，命題 $A\vee B$ と書く．数学では『または 』という言葉や記号 $\vee$ は，どちらか一方に限るという意味はない.『 A または B 』と言っても，同時に A かつ B である場合を除外しない．たとえば，A が $x\leq 0$ という性質，B が $x\geq 0$ という性質のとき，実数 x に対して『 A または B 』は必ず成立つ．この場合，A でも B でもある $x=0$ の場合も含まれている．

命題 A, B を同時に両方持つことを，命題『 A かつ B 』を持つと言い，命題 $A\wedge B$ と書く．

性質 1　命題『A または B 』は,『A が偽』で，かつ『 B が偽』のときのみ偽である．
性質 2　命題『A かつ B 』は,『A が真』で，かつ『 B が真』のときのみ真である．

性質 A の否定は普通『否 A』とか,『$\neg A$』とか書かれる．また，x が集合 $\mathbf{E}$ に属さないことを $x\notin\mathbf{E}$ と書く．$\mathbf{E}$ の部分集合 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ に対して $\mathbf{X}$ が $\mathbf{Y}$ に含まれないことを $\mathbf{X}\not\subset\mathbf{Y}$ と書く[16]．

つねに

[16] これはもちろん $\mathbf{X}$ が $\mathbf{Y}$ を含むことを意味するものではない．

性質 3　$\neg(\neg A) = A$

性質 4　A または $\neg A$ [17]

が必ず成り立つ.

定理の文脈

定理と名づけられた文章のかたまりは，通常，仮定と呼ばれるある命題 A から，結論と呼ばれるある命題 B が導かれることを主張している文章群である．普通これを簡単に,『A は B を導く』,『A は B を意味する』,『A ならば B である』などと言い,『$A \Rightarrow B$』等の記号で示す.

性質 5　定理『$A \Rightarrow B$』は，A が真で B が偽であるときにのみ偽となる.

【問題 1.4.1】 この性質 5 は，仮定 A が偽の場合は，結論 B が真あるいは偽いずれの場合であっても「定理『$A \Rightarrow B$』は真である」ことを言っている.

徒然草の第 209 段には，以下のような意味の事柄が述べられている．下男たちの主張を性質 5 と照らし合わせて，おもしろい理由を考えよ.

> 他人の田を（自分のものだと言って）訴訟で争っていた者が，その訴訟に負けてしまった．くやしさのあまり「その田の稲を刈り取ってこい」といって，下男たちをその田に向かわせた.
>
> 下男たちは，まず相手の田へ行く途中の田まで刈ながら行くので,（人が見て）,「これは訴訟のなされた場所ではない．どうしてこのように別の場所の稲まで刈り取るのか」と尋ねたところ，刈っている下男たちは,「その訴訟した田だって，刈ってよいという理由はないのだ．どっちみち我々は間違ったことをしようと思って出かけている者なのだから，どこの田だって刈らないことがあろうか，どこだって刈り取ってよいのだ.」といった.
>
> この理屈はたいそうおもしろい.

定理『$A \Rightarrow B$』の逆の定理は必ずしも真ではないが，それは『$B \Rightarrow A$』を主張するものである.

定理 $A \Rightarrow B$ とその逆とが共に真であるとき，二つの性質 A, B は同値であるといい,『$A \Leftrightarrow B$』あるいは『A iff B』[18] と書く．これは,『A であるためには B であることが必要十分である』と表現される.

性質 6　命題 $A \Rightarrow B$ が真であるためには，命題 $\neg B \Rightarrow \neg A$ が真であることが必要十分である.

性質 6 の命題 $\neg B \Rightarrow \neg A$ は，命題 $A \Rightarrow B$ の対偶と呼ばれる.

[17] 排中律という.

[18] iff は if and only if を縮めた単語である.

量称

数学の定理では,『任意の…に対して 』,『…であるような…が存在する 』という表現がよく使われる．これらを **量称**と言い，それぞれ量称記号 ∀, ∃ で表わす.

『A であるような x が存在する 』というかわりに,『適当な x を取ると x は性質 A を持つ 』と言うこともある.

『任意の… 』とか『…存在する 』とかいう表現は，何等かの制限を伴うことが多い．それらの制限は，括弧 ( ) の中に書き表わす.

【定理】

ある命題がいくつかの量称記号 ∀, ∃ を含み，そのあとに一つの性質 P が来るようなものであるとき，その命題の否定は，各量称記号 ∀ を ∃で，∃ を ∀ で置き換え，さらに P をその否定 $\neg P$ で置き換えることによって得られる.

【証明】

第一段階　まず，ただ一つの量称記号 ∀ を含む場合を考える．すなわち，($\forall x$, x は S を充たす) $\Rightarrow P$．この否定は，S を充たすような x で，しかも P を充たさないものが存在する，ということである．したがって ($\exists x$, x は S を充たす) $\Rightarrow \neg P$ となる.

ただ一つの量称記号 ∃ を含む場合もまったく同様に証明される.

第二段階　あとは量称記号の個数に関する帰納法による．$n-1$ 個の量称記号を含む場合には証明されたと仮定して，n 個の場合にも成立つことを示せばよい．この性質は，最初の量称記号が ∀ の場合，($\forall x$, x は S を充たす) $\Rightarrow Q$ と書くことができる．Q は $n-1$ 個の量称記号を含む性質である．したがってこの否定は ($\exists x$, x は S を充たす) $\Rightarrow \neg Q$ となる．ところが Q は $n-1$ 個しか量称記号を含まないから，帰納法の仮定により，否定 $\neg Q$ は Q に定理を適用して得られる．よってこの場合にも定理は成立つ．最初の量称記号が ∃ の場合も同様である.

この手続きは，数の掛算や括弧の取りはずしにおける符号規則のようにまったく機械的に行なわれる.

【問題 1.4.2】 次の命題の否定を考えよ.

1. ($\exists x$, x は S を充たす) $\Rightarrow P$.
2. このクラスの学生はみんな女子学生である.
3. 政治家はみんなうそつきだ.
4. このクラスに TOEIC が 700 点以上の学生がいる.
5. 「関数 $f(x)$ が点 $x = x_0$ で連続である」という連続の定義は，次のように述べられる.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |\forall x - x_0| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

「関数 $f(x)$ が点 $x = x_0$ で不連続である」定義を述べよ.

第2章

1 次関数と行列・ベクトル

比例の関係を表す 1 次関数 $y = ax$ は，最も簡単な関数と言える．同時に，この関数は我々にとって最も有用な関数でもある．簡単な関数が有用であるのは理解し易いということで幸運なことである．この章では，1 次関数を多変数の場合に拡張して，その応用を考える．

2.1 1 次関数

2.1.1 比例とその関係式

y が x に比例するとき，その関係式は

$$\frac{y}{x} = a \tag{2.1.1}$$

と表される．ここに a は比例定数と呼ばれている．式 (2.1.1) は書き直すと

$$y = ax \tag{2.1.2}$$

となり，これは y が x の 1 次関数[1] であることを意味する．

いま，$y = b$ と固定してみると，式 (2.1.2) は

$$ax = b \tag{2.1.3}$$

となり，未知数 x についての 1 次方程式となる．もちろん，式 (2.1.3) の解は $a \neq 0$ の場合

$$x = a^{-1}b \tag{2.1.4}$$

で与えられる．$a = 0$ の場合は，$b \neq 0$ の場合は解なし，$b = 0$ の場合は任意の実数が解となる[2]．

【問題 2.1.1】式 (2.1.3) の解を，式 (2.1.2) のグラフを描いて説明しなさい．

比例の関係にある物理量は，ありふれている．その一例をあげておこう．

[1]線形 (linear) 関数ともいう．

[2]つまり無限に沢山の解がある．

【例題 2.1.1 オーム (Ohm) の法則】

抵抗素子の電圧 v と電流 i の関係は

$$v = Ri \tag{2.1.5}$$

で与えられる．これをオーム (Ohm) の法則という．

さて，式 (2.1.2) の右辺を左辺に移項すれば

$$ax - y = 0$$

となる．y の係数にもパラメータをあたえると，一般に

$$ax + by = 0 \tag{2.1.6}$$

となる．この関係式は x と y の関係が比例の関係にあることをより一般的に表していると言えよう．つまり，式 (2.1.6) では独立変数 x，従属変数 y という関係がなくなって両者が対等の関係にある変数となっている．

実は，式 (2.1.6) の関係式は，関数

$$z = ax + by \tag{2.1.7}$$

の $z = 0$ の場合を表したものと考えることができる．式 (2.1.7) は 2 つの独立変数 x, y の関数である．この場合， z は 2 変数 x と y に関する 1 次関数という．

この考え方を一般化して， n 個の変数 x_1，x_2，$\cdots, x_n$ [3] についての関係式

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \tag{2.1.8}$$

を考えることができる．z は変数 x_1，x_2，$\cdots, x_n$ についての一次式と呼ばれている．これはまた，z は変数 x_1，x_2，$\cdots, x_n$ について線形であるともいう．

添字変数 x_i を使った利点の一つは，式 (2.1.8) を次のように「あいまいさ[4] を含まない式」として書き下せることである．

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \tag{2.1.9}$$

ここで独立変数を増やして n 個の変数を使った n 変数関数の考え方にたどりついた．それでは，従属変数の個数を増やした場合はどうなるのであろうか．一番簡単な場合として，独立変数が 1 個 x，従属変数が 2 個 y_1，y_2 の場合を考えてみよう．

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1x \\ y_2 &= a_2x \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

[3] このように変数の個数が多くなると，それぞれの変数を表すのにアルファベットの文字を沢山使わなければならなくなる．こんな場合には，アルファベットの文字数を少なくして，そのかわりに添字をつけた変数で表すと便利である．

[4] 式 (2.1.8) に含まれている記号 $\cdots$ は，この式をみる人が自然に推論する結果を期待した書き方といえる．

となる．これは，式 (2.1.2) の比例の関係式を 2 個同時に考えることにほかならない．しかし比例定数 a_1，a_2 は一般に違うので，同じ x に対して y_1 と y_2 は違った値をとることとなる．

次に，独立変数を 2 個に増やしてみよう．

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1x_1 + b_1x_2 \\ y_2 &= a_2x_1 + b_2x_2 \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

となる．この関係式は各比例定数を同じ文字で表し，そのかわりに添字を 2 個に増やして書き表すと分かりやすくなる．すなわち

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

と表すとよい．ここで a_{11} は a eleven ではなく，a one one を表す．すなわち添字は 2 個付いている．

【例題 2.1.2 鶴亀算】

鶴が x_1 尾，亀が x_2 匹いる．鶴と亀の個体数の和を y_1，足の数の和を y_2 とする．y_1，y_2 と x_1，x_2 との関係 式を求めよ．

【解】

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= 2x_1 + 4x_2 \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

【問題 2.1.2】　1 個 30 円のみかんを x_1 個，150 円のりんごを x_2 個，80 円のオレンジを x_3 個買った．買った果物の総数を y_1，払ったお金を y_2 として，式をたてなさい．

【問題 2.1.3】　横軸を x 軸，縦軸を y 軸とする 2 次元平面の 1 点を $(a,\ b)$ とする．この点を原点を中心にして角度 θ だけ回転させた．回転させた後の座標を $(c,\ d)$ とする．$(c,\ d)$ と $(a,\ b)$ の関係式を求めよ．

【問題 2.1.4】　ある家庭の 1 ヶ月の収入は，3 人の家族の給料 x_1，x_2，x_3 円であり，支出は 8 項目 $y_1, \cdots, y_8$ 円であったという．また，この家庭では，収支残高 z 円はすべて貯金するという．それぞれの変数の間に成り立つ関係式を求めよ．

【問題 2.1.5】　電気回路では，素子をはんだで接続した点において，流れ込む電流と流れ出す電流を足し合わせると常に零になっている．これをキルヒホッフの電流法則という．流れ込む電流を i_1，$\cdots$，i_m，流れ出す電流を j_1，$\cdots$，j_n とすると，どんな式が成り立つか．

2.1.2　行列とベクトルを使った表示

式 (2.1.12) を再び書いておこう．

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

この関係式は一組の変数 $(x_1,\ x_2)$ を他の変数 $(y_1,\ y_2)$ に写す（変換する）**写像** (mapping) [5] とみることができる．この写像を特徴づけるのは，4 個のパラメータ a_{ij} である．すなわち， a_{ij} の並び

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{2.1.15}$$

を与えると，式 (2.1.14) は完全に決定されてしまう．式 (2.1.15) は数を正方形状に並べたものである．一般に，数を長方形状に並べたものを**行列** (matrix) といい，その各々の数 a_{ij} を行列の**成分** (element) という．

行列の横の数の並びを**行** (row)，縦の並びを**列** (column) という．行は上から順に第 1 行，第 2 行，$\cdots$ といい，列は左から順に第 1 列，第 2 列，$\cdots$ という．

行列は，その行の行数と列の列数によって，その型が区別される．たとえば

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

は，それぞれ 1 行 2 列の行列，2 行 1 列の行列，2 行 2 列の行列，2 行 3 列の行列である．これらは簡単に，1×2 行列，2×1 行列，2×2 行列，2×3 行列ともいう．一般に m 行 n 列の行列を $m \times n$ 行列という．

特に，行数と列数が等しい $n \times n$ 行列を，n 次の**正方行列** (square matrix) という．式 (2.1.15) は 2 次の正方行列である．また，1 行だけからできている行列を**行ベクトル** (row vector)，1 列だけからできている行列を**列ベクトル** (column vector) という [6]．

最後に，1×1 行列は，単に通常の数である．これを行列と区別して呼ぶときは**スカラー** (scalar) という．

行列とベクトルを使って，式 (2.1.15) は次式のように表すことができる．

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2.1.16}$$

そこで，今それぞれのベクトルや行列に次のような名前をつけて表すことにしよう．

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2.1.17}$$

すると，式 (2.1.16) は簡単に次式のように表すことができる．

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{2.1.18}$$

---

[5] 写像は関数を一般化した用語で多変数間の関数関係を表す場合に用いられる．

[6] この講義では，列ベクトルつまり縦長の $n \times 1$ 行列を単に「ベクトル」，行ベクトルをくだけた言い方で「横長ベクトル」ということにする．

この式を，最初の 1 次関数の式 (2.1.2) と比較してほしい．その類似性に驚くであろう．このように n 個の変数に関する m 個の 1 次同次式を「ひとまとめに」考える道具として行列やベクトルを使い，1 次関数の性質を整理するのが**線形代数** (linear algebra) と呼ばれる数学である．

ここで問題となることは，行列やベクトルの間の計算のルールがどうなっているのかということである．次にこれを定義しよう．

2.1.3　行列の和・差と積

行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ が同じ型であって，かつ，その対応する成分がそれぞれ等しいとき，$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は**等しい**といい，$\mathbf{A} = \mathbf{B}$ と書く．

成分がすべて零の行列を**零行列** (zero matrix) という．また，n 次の正方行列で左上から右下への対角線上の成分がすべて 1 で，その他の成分がすべて 0 の行列を，n 次の**単位行列** (identity matrix, unit matrix) をいう．単位行列は通常 $\mathbf{E}$ や $\mathbf{I}$ と書く．特に n 次であることを示す必要のあるときは，$\mathbf{I}_n$ のように添字を付して書く．たとえば,

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

は，それぞれ 2 次および 3 次の単位行列である．

行列の和・差や積については，高校の「数学 C」で一通り勉強しているであろう．ここではそれらのルールを 2×2 の行列を例にして，表 2.1 にまとめておく．

【問題 2.1.6】　**例題 2.1.1** および **2.1.2** で出てきた 1 次同次式をすべて行列とベクトルを用いて書き直しなさい.

【問題 2.1.7】　次の行列の積を計算しなさい.

1. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

【問題 2.1.8】　次の行列について表 2.1 の最後の 4 つの積の関係が正しいことを計算によって確かめなさい.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

表 2.1. 行列の演算表.

演算の名前	内　容
和・差	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{bmatrix}$
スカラー倍	$k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$
積	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{bmatrix}$
積のルール	$k(\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}) = k(\mathbf{AB})$ $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

2.1.4　ブロック行列

行列のブロック行列への分解

行列

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

をよく見てほしい．この行列は，つぎの行列

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

を 4 個くりかえし使って

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

のようにして作られた行列とみることもできる．このように，行列を適切な型の行列から作られた行列[7] とみなすことを，**ブロック行列** (block matrix) に分解する，あるいはブロック行列から作られているという．

ブロック行列を考えると，通常の行列を色々なブロックに分解して扱うことができる．このことは行列の積演算を行う際に見通しをよくすることがある．したがって，ブロックで考えることに慣れておくと便利である．

特に，行列を列ベクトルや行ベクトルに分解して考えることがよくある．行列

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{2.1.19}$$

を例にとってこの分解を行ってみよう．m 個の列ベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \tag{2.1.20}$$

と n 個の行ベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^1 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}^2 &= \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \end{bmatrix} \\ &\cdots \\ \mathbf{a}^n &= \begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

[7]行列の各成分が，実は行列であったと考えてもよい．すなわち，入れ子になった行列とみることもできる．

を用いて，行列 $\mathbf{A}$ は次のようにブロック行列に分解して書くことができる．

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix} \tag{2.1.22}$$

2×2 **行列の固有値と固有ベクトル**

ブロック行列に分解して考えると整理できる例を一つあげておこう．いま，2×2 行列

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{2.1.23}$$

が 2 つのベクトル

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{bmatrix} \tag{2.1.24}$$

と 2 つの異なるスカラー λ_1, λ_1 を用いて，次の関係式を満たしていたとしよう．

$$\mathbf{A}\mathbf{h}_1 = \lambda_1 \mathbf{h}_1, \quad \mathbf{A}\mathbf{h}_2 = \lambda_2 \mathbf{h}_2 \tag{2.1.25}$$

このとき，ベクトル $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ を行列 $\mathbf{A}$ の**固有ベクトル** (eigen vector)，スカラー λ_1, λ_2 を行列 $\mathbf{A}$ の**固有値** (eigen value) という．

さて，式 (2.1.25) をブロック行列を用いて一つの式に書き直すことを考える．右辺と左辺のベクトルを並べて書くと次式となる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{h}_1 & \mathbf{A}\mathbf{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{h}_1 & \lambda_2 \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} \tag{2.1.26}$$

そこで，この式の右辺と左辺は行列の積を使って次のように書くことができる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{h}_1 & \mathbf{A}\mathbf{h}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{h}_1 & \lambda_2 \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{2.1.27}$$

したがって，式 (2.1.26) は次式となる．

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{2.1.28}$$

最後に，2 つの列ベクトルからなるブロック行列を 2×2 行列

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \tag{2.1.29}$$

と定義し，式 (2.1.28) を書き直すと次式となる．

$$\mathbf{A}\mathbf{H} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{2.1.30}$$

2.2　連立一次方程式

2.2.1　2 元連立 1 次方程式

2 つの未知数 x_1，x_2 を持つ一般の**連立 1 次方程式** (linear equation)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

を解いて，解の公式を作ろう．ここで，未知数以外の数は与えられた数とする．

まず，式 (2.2.1) の第 1 式に a_{22} を掛け，第 2 式に a_{12} を掛けて引くと次式を得る．

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \tag{2.2.2}$$

同様にして，式 (2.2.1) の第 2 式に a_{11} を掛け，第 1 式に a_{21} を掛けて引くと次式を得る．

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \tag{2.2.3}$$

したがって，$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ の場合には，これらの 2 つの方程式から解

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{2.2.4}$$

が求められる．しかも，この計算から解はただ 1 つであることも分かる．これが式 (2.2.1) の解の公式である．

なお，$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ の場合には，解がなかったり，あるいは無限に多くの解があったりする．このことについては，後で考えることにしよう．

解の公式 (2.2.4) は，行列

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{2.2.5}$$

から作られる**行列式** (determinant) と呼ばれる数 $\det \mathbf{A}$ を用いるとたやすく覚えられる．すなわち，数 $\det \mathbf{A}$ は次式で定義される．

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2.2.6}$$

そこで解の公式 (2.2.4) は，行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,\ \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \tag{2.2.7}$$

を使って，次式のように表すことができる．

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{2.2.8}$$

【問題 2.2.1】　**例題 2.1.2** で出てきた鶴と亀の個体数の和，および足の総数をあなたの好きな数に定め，鶴と亀の数を計算しなさい．
【問題 2.2.2】　次の方程式は，ある電気回路の電流 I_1，I_2 に関する連立方程式である． I_1，I_2 を計算しなさい．

$$(R_1 + R_3)\, I_1 + R_3 I_2 = E_1$$

$$R_3 I_1 + (R_2 + R_3)\, I_2 = E_2$$

幾つかの注意を述べておこう．

注意 1　行列 (2.2.5) とベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{2.2.9}$$

を使って，最初の連立方程式 (2.2.1) は次式と書くことができる．

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.2.10}$$

注意 2　行列 $\mathbf{A}$ の**逆行列** (inverse matrix) $\mathbf{A}^{-1}$ を，性質

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_2 \tag{2.2.11}$$

を持つ行列で定義する．$\det \mathbf{A} \neq 0$ ならば，$\mathbf{A}^{-1}$ が存在し，

$$\mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{2.2.12}$$

と計算できる．

注意 3　式 (2.2.10) の両辺に左から逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ 掛けると

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = (\det \mathbf{A})^{-1} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{2.2.13}$$

となって，解の公式 (2.2.4) をベクトルで表した公式を得る．

注意 4　解の公式 (2.2.8) はクラーメル (Cramer) の公式を呼ばれている．

2.2.2　行列式

行列式は，高校の数学では習わなかった新しい考え方の一つである．もっとも 2×2 行列の逆行列を求める際に，各成分の分母に既に使ってはいた．それを行列式と教えられなかったのは，たぶん行列式の定義がややっこしいからであろう．

ここで改めて行列式について幾つかの事柄を述べておこう．まず，次のことを注意する．

注意 1　行列式は数である．行列のように「数を並べた表」ではなく，行列から「一定のルールに従って作った数」である．

注意 2　行列式は，正方行列にしか定義されていない．

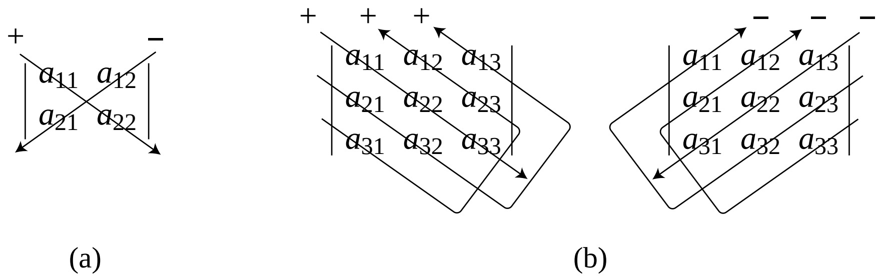


図 2.1. 積和のルール.

注意 3 2×2 や 3×3 の正方行列では，行列式は比較的簡単に計算できる．しかし，次数 n の正方行列に対応した行列式は n 個の成分の積を $n!$ 個加えたものとなり，次数 n が大きくなると計算が非常に煩雑となる．

我々の応用から考えると，2×2 と 3×3 の正方行列についての行列式が計算できれば十分であり，それ以上の次数の行列に関する行列式の計算が必要となった場合には計算機を利用すればよいであろう．したがって，ここでは 2×2 と 3×3 の正方行列についての行列式の定義を与えることで満足することにしよう．

2×2 の行列式の定義

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2.2.14}$$

3×3 の行列式の定義

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = {} & a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ & -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

この公式は，よく見ていると次のようにも書ける．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{2.2.16}$$

これらの「積和のルール」は図 2.1 のようになっている．この図のルールを覚えておくと便利である．

【問題 2.2.3】 次の行列式を計算しなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 5 & 2 & 8 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

行列式の幾つかの性質

性質 1　行と列を入れ換えても行列式の値は変わらない．すなわち

$$\left|{}^t\mathbf{A}\right| = |\mathbf{A}| \tag{2.2.17}$$

ここに，${}^t\mathbf{A}$ は行列 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ の行と列を入れ換えた行列 ${}^t\mathbf{A} = [a_{ji}]$ を表す．この ${}^t\mathbf{A}$ を行列 $\mathbf{A}$ の**転置行列** (transposed matrix) という．

性質 2　任意の 2 つの行（または列）を入れ換えると，行列式はその符号だけが変化する．たとえば

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2.2.18}$$

性質 3　2 つの行（あるいは列）の等しい行列式は 0 である．たとえば

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.2.19}$$

性質 4　行列式の 1 つの行（あるいは列）の各成分を a 倍すれば，行列式の値も a 倍になる．たとえば

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ ab_1 & ab_2 & ab_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2.2.20}$$

性質 5　行列式の 1 つの行（あるいは列）の各成分が 2 つの数の和で表されている場合，この行列式は和の各項を成分とする 2 つの行列式の和に等しくなる．たとえば

$$\begin{vmatrix} a_1+d_1 & a_2+d_2 & a_3+d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2.2.21}$$

性質 6　行列式の一つの行に a を掛けて，これを他の行に加えても行列式の値は変わらない．たとえば

$$\begin{vmatrix} a_1+ac_1 & a_2+ac_2 & a_3+ac_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2.2.22}$$

性質 7

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.2.23}$$

【問題 2.2.4】 次の行列式を計算しなさい．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

2.2.3 3 元連立 1 次方程式

3 つの未知数 x_1, x_2, x_3 を持つ一般の**連立 1 次方程式** (linear equation)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

の解は次式で与えられる．これをクラーメル (Cramer) の公式という．

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \tag{2.2.25}$$

これは，たとえば x_1 について考えると，次の行列式の計算から求められる．

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

【問題 2.2.5】 次の連立方程式を解きなさい．

1.
$$4x + y + z = 2,\ 2x + 5y + 4z = 1,\ 3x + 2y + 6z = 3 \tag{2.2.26}$$

2. 次の方程式は，ブリッジ回路を流れる電流 I_1, I_2, I_3 についての回路方程式である．恐らく手計算としては最も煩雑な計算を必要とする問題の一つでしょう．電流 I_1, I_2, I_3 を求めて下さい．

$$\begin{aligned} (R_1 + R_3 + R_5)\, I_1 - R_5 I_2 - R_3 I_3 &= 0 \\ -R_5 I_1 + (R_2 + R_4 + R_5)\, I_2 - R_4 I_3 &= 0 \\ -R_3 I_1 - R_4 I_2 + (R_3 + R_4 + R_6)\, I_3 &= E \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

2.3 ベクトルと行列の幾何学的意味

2.3.1 内積の定義

ベクトルの「長さ」や 2 つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の間の「角度」とはどのように決められるのであろうか．これらは，内積と呼ばれるベクトルどうしの関係によって定められる．そこで，まずベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積を次式で定義する．

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \tag{2.3.1}$$

この関係式は，行列の積[8] の演算を用いて書くと次式のように表すこともできる．

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = {}^t\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \tag{2.3.2}$$

内積によって定められている定義を幾つかあげておこう．

定義 1 ベクトル $\mathbf{a}$ の長さ $\|\mathbf{a}\|$ は「 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{a}$ の内積の平方根」で定義される．

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \tag{2.3.3}$$

定義 2 2 つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の間の「角度 θ」は，次式で定義される．

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \tag{2.3.4}$$

定義 3 2 つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は，内積が零：

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0 \tag{2.3.5}$$

となるとき**直交** (orthogonal) するという．

内積は，つぎの性質を持っている．

性質 1

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a} \tag{2.3.6}$$

性質 2

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \bullet \mathbf{c} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{c} + \mathbf{b} \bullet \mathbf{c} \tag{2.3.7}$$

性質 3 α をスカラーとすると

$$(\alpha\mathbf{a}) \bullet \mathbf{b} = \mathbf{a} \bullet (\alpha\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \tag{2.3.8}$$

性質 3 $\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}$ は

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 \geq 0 \tag{2.3.9}$$

であるから，零または正であり，零となるのは

$$a_1 = 0 \quad \text{かつ} \quad a_2 = 0,\ \text{すなわち}\ \mathbf{a} = 0 \tag{2.3.10}$$

のときに限られる．

[8] 行列の積には何も書かない．すなわち，行列 $\mathbf{A}$ と行列 $\mathbf{B}$ の積は，単に $\mathbf{AB}$ と書く．

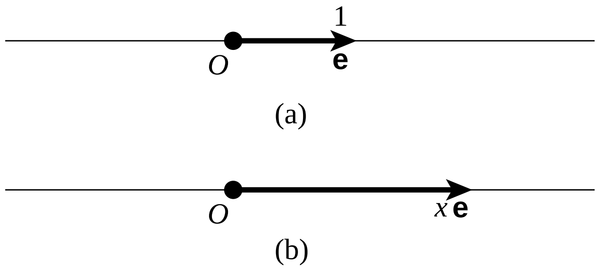


図 2.2. 直線上の基底 (a) と点 x (b).

2.3.2　ベクトルの住んでいる空間

ここでは，スカラーやベクトルそれに行列の成分はすべて実数[9] として話をする．

スカラーである実数は 1 次元の住民，成分を 2 つ持つ 2×1 の列ベクトルは 2 次元の住民である[10]．一般に，成分を n 個持つ $n\times 1$ の列ベクトルは n 次元の住民である．話を簡単にするために 2 次元の場合を考えよう．

数直線

実数 x は直線上の一点として表すことができる．これは，直線を 1 本引いて $\mathbf{R}$ と呼ぶことにし，次の基準を設定して考える．

- まず，この直線上に原点 O を定める．
- 原点から好きな方向[11] に長さ 1 の点を取り，これを基準とする．すなわち，原点から 1 に向かって長さ 1 のベクトル $\mathbf{e}$ を直線上に描く．

こうすると，任意の実数 x は，直線上の点 $x\mathbf{e}\in\mathbf{R}$ として表すことができる．図 2.2 を参照.

2 次元平面

平面上の点を指定しようとすると，2 つの実数の組が必要となる．地図を想像してほしい．現在地を中心に考えると東西方向へ x，南北方向へ y と指定すると番地が 1 点に定まる．

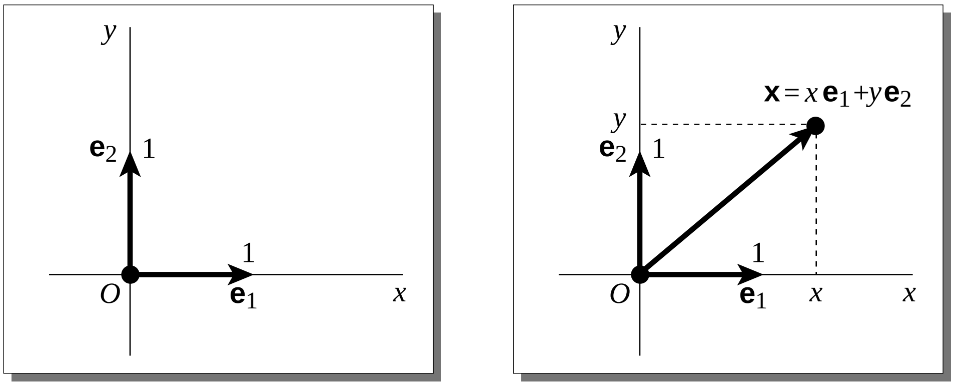
さて，平面を 1 枚用意しよう．これに，直線の時と同様に基準を 1 つ決めよう．

- まず，平面上に原点 O を定める．
- 原点から，好きな方向に長さ 1 のベクトル $\mathbf{e}_1$ を描く．ベクトル $\mathbf{e}_1$ を原点を中心に「反時計回りに 90° 回転」させたベクトルを作って，これを $\mathbf{e}_2$ と

[9]複素数については後ででてくる．

[10]成分を 2 つ持つ 1×2 の行ベクトルも 2 次元の住民であるが，ここでは列ベクトルに注目して話をすすめる．同じ話は行ベクトルについてもいえる．行ベクトルは，2 次元平面の点である列ベクトルをスカラーに写す関数達と考えるといいであろう．

[11]原点をはさんで右か左かどちらかに決める．普通は右の方に選ぶ．



(a) (b)

図 2.3. 平面上の基底 (a) と点 x (b).

する[12]．

こうすると，任意の実数の組 $(x,\ y)$ は，この平面上の 1 点として表すことができるようになる．これを示そう．いま，簡単のため，ベクトル $\mathbf{e}_1$ 方向を x 軸，ベクトル $\mathbf{e}_2$ 方向を y 軸と呼ぶことにする．図 2.3 を参照.

これだけの準備のもとに，成分を 2 つ持つ 2×1 の列ベクトルでこの平面上の点を表すことにしよう．平面を $\mathbf{R}^2$ と呼ぶことにし，

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2 \tag{2.3.11}$$

と書くと，ベクトル $\mathbf{x}$ は，x 軸方向の成分が a，y 軸方向の成分が b であることを表す．また，$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ は，$\mathbf{x}$ が平面 $\mathbf{R}^2$ の要素である（あるいは，平面に属する）ことを表す.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.3.12}$$

である．これら 2 つのベクトルの集合 $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$ を，この平面の**直交基底** (orthogonal base) という[13]．

そこで，平面上の任意の点 $\mathbf{x}$ は，次のように基底ベクトル達によって表すことができる.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \tag{2.3.13}$$

[12] 実は，この表現には数学的におおいに問題がある．したがって数学の本では，決してこんな言い方をしてない.「反時計回り」や「回転」の意味が定義されていないこと，それになぜ 90° でなければならないのか，など疑問だからである．考え方がつかめたらこれらを排除したより抽象的な言い方にチャレンジするといいであろう．ヒントは，内積を定義しておかないとこれらの議論ができないということである.

[13] $\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_2 = 0$ となっている．これは，式 (2.3.12) から確かめられる.

2.3.3　ベクトルの独立性

平面 $\mathbf{R}^2$ の任意の点 $\mathbf{x}$ は原点から $\mathbf{x}$ に引かれたベクトルで表される．このベクトルも $\mathbf{x}$ で表される．さて，スカラー $\alpha \in \mathbf{R}$ を用いてベクトル $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ を考えると，ベクトル $\mathbf{y}$ は $\mathbf{x}$ 方向に正負に延びるベクトル達の集合となる．この事実を色々な言い方で説明することがあるので，それらの幾つかをあげておこう．

注意 1　ベクトル $\mathbf{x}$ からベクトル $\alpha\mathbf{x}$ を作ることを，$\mathbf{x}$ の**スカラー倍** (scalar product) という[14]．

注意 2　ベクトル $\mathbf{x}$ と，$\mathbf{x}$ のスカラー倍で作ったベクトル $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ は，互いに**線形従属** (linear dependent) あるいは一次従属の関係にあるという．

- 「ベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ が線形従属にある」$\Leftrightarrow$ 「$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \mathbf{0}$ を満たす，零ではない $\alpha,\ \beta$ がある」
- 「ベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ が線形従属にある」$\Leftrightarrow$ 「$\det[\mathbf{x}\quad\mathbf{y}] = 0$」[15]

注意 3　次に，互いに線形従属にないベクトルを 2 つ考える．これらをベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ としよう．このとき，次のような言い回しに注意しよう．等価な条件が色々あることにも注意しよう．

- 「 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は線形従属でない」$\Leftrightarrow$ 「 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は**線形独立**である」
- 「 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は線形独立である」$\Leftrightarrow$ 「$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0,\ \beta = 0$ 」
- 「$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0,\ \beta = 0$ 」$\Leftrightarrow$ 「$\det[\mathbf{x}\quad\mathbf{y}] \neq 0$」
- 「 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は線形独立である」$\Leftrightarrow$ 「 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は，平面 $\mathbf{R}^2$ を張る」
  すなわち，平面 $\mathbf{R}^2$ の任意の点 $\mathbf{u}$ は，ベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ を使って

$$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$$

  と表すことができる．ここに，$\alpha,\ \beta \in R$ である．$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ のスカラー倍の和から新しいベクトルを作ることを $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ を線形結合するという．

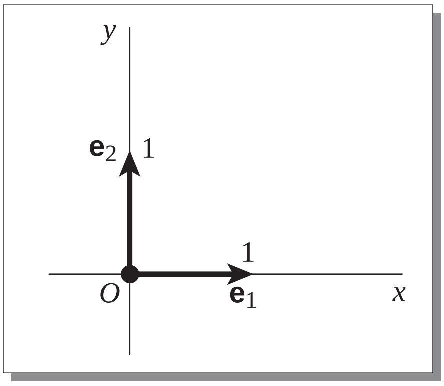
2.3.4　2 次元平面の表と裏

一般に**空間の向き** (orientation) を理解することはやっかいである．2 次元平面の向きは，表あるいは裏などとも呼ばれる．また，3 次元空間では，右手系とか左手系とか呼ばれたりする．空間は，一つの基底を定義し，これによる座標系を与えた瞬間に向きが定義されたことになる．

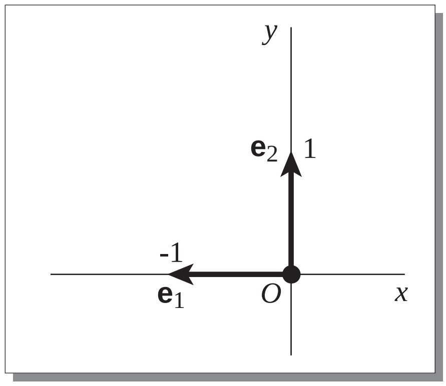
ここでは，最も常識的に，先に定義した直交基底 (2.3.12) を用いて平面の向きを考えることにする．今，図 2.4(a) の基底を定めて，これを平面の「表」と考える．すると，この平面を「裏」からみると図 2.4(b) の基底となる．つまり，裏は図 2.4(b) の基底を持つ．あるいは，基底を図 2.4(b) のように取った平面は，基底を図 2.4(a) のように定めた平面に対して，裏であると言える．また別の言い方をすれば，図 2.4(a)

[14] スカラー倍，すなわち,「積」という言葉がでてくるので注意しよう．演算としての積を考える場合，どういうオブジェクトを掛け合わせてどういうオブジェクトが生成されるかに注意しなければ,「積」の違いが理解できない．

[15] この条件は 2 次元特有の条件である．



(a)



(b)

図 2.4. 平面上の基底・表 (a) と裏 (b).

の y 軸上に鏡を垂直に立てて鏡に映った平面をみると基底は図 2.4(b) の基底となっている．したがって，鏡に映すと裏がみえるといえる．一般に，鏡に映す変換を鏡映という．ある基底の鏡映変換した基底は裏となる．なお，図 2.4(b) の基底ベクトル $\mathbf{e}_1$ に -1 を付したのは，裏を表からみると -1 となるということを意味する．

以上の話をまとめると次のように言える．

基底の分類 1　直交基底 (2.3.12) で用いたベクトル $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ を用いて考えられる基底としては次の 2 種類が考えられる．

- 集合 $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$ および集合 $\{-\mathbf{e}_1,\ -\mathbf{e}_2\}$ ：これらは「表」を表す基底を意味する．いずれも $\det[\mathbf{e}_1\quad \mathbf{e}_2]=1$ および $\det[-\mathbf{e}_1\quad -\mathbf{e}_2]=1$ となって，行列式が正となっている．
- 集合 $\{-\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$ および集合 $\{\mathbf{e}_1,\ -\mathbf{e}_2\}$ ：これらは「裏」を表す基底を意味する．いずれも $\det[-\mathbf{e}_1\quad \mathbf{e}_2]=-1$ および $\det[\mathbf{e}_1\quad -\mathbf{e}_2]=-1$ となって，行列式が負となっている．

基底の分類 2　基底は順序のついた一次独立なベクトルで表される．順序の付いた集合 $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$ を「表」の基底と考えると，集合 $\{\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1\}$ を基底とする座標系は「裏」となる．この場合も $\det[\mathbf{e}_1\quad \mathbf{e}_2]=1$ および $\det[\mathbf{e}_2\quad \mathbf{e}_1]=-1$ となっている．集合 $\{\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1\}$ は，集合 $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$ と鏡映の関係にあることに注意しよう．

2.3.5　直線を直線に写す 1 次関数

さて，式 (2.1.2)

$$y = ax \tag{2.3.14}$$

を幾何学的にみてみよう．独立変数 x は 1 次元直線上の点であり，従属変数 y は，別の直線上の点と考えられる．点 x を与えると a 倍して点 y が決まる．図 2.5(a) 参照．

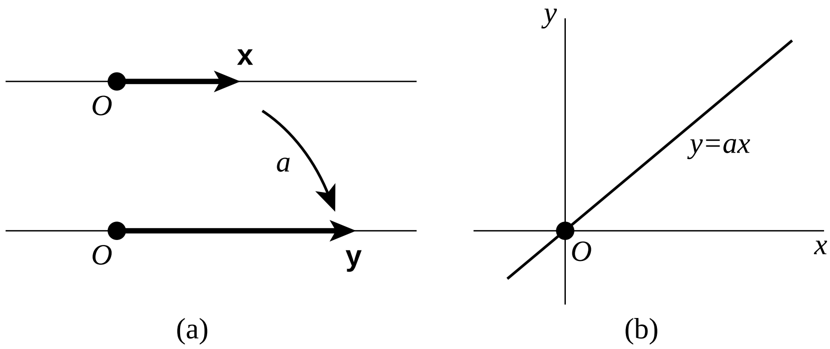


図 2.5. 関数 a (a) とそのグラフ (b).

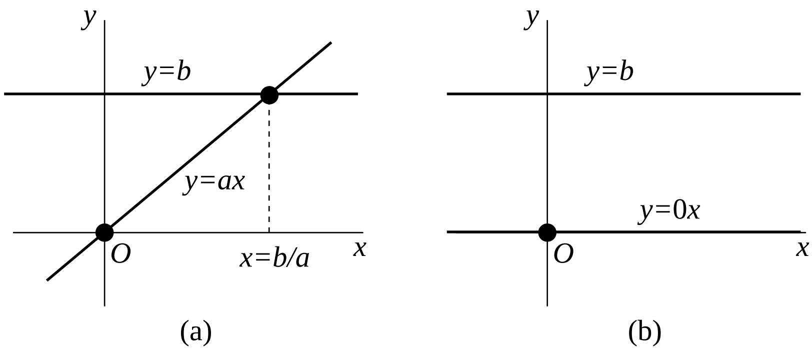


図 2.6. 2 つの 1 次関数 (a) と a=0 の場合 (b).

2 つの直線を別々に描くと関係が見えないので，2 つの直線を直交させて描いた平面を作る．すると図 2.5(b) のように 1 次関数は「関数のグラフ」としてみえてくる．

次に，方程式

$$ax = b \tag{2.3.15}$$

を解く問題を，このグラフを使って考えよう．式 (2.3.15) の解は， 2 つの直線

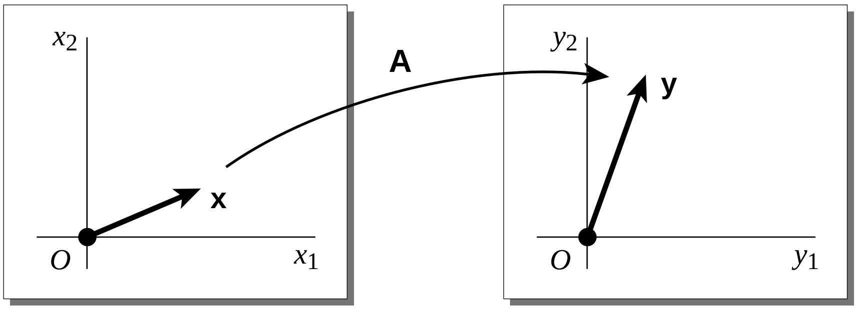
$$y = ax, \quad y = b \tag{2.3.16}$$

の交点として求められる．図 2.6(a) 参照．$a \neq 0$ ならば確かに答えはただ一つ $x = \dfrac{b}{a}$ となる．

では，例外の $a = 0$ の場合はどうであろうか．直線 $y = 0x$ は，x 軸である．直線 $y = b$ が「 x 軸に平行な直線」なので

- $b \neq 0$ ならば，交点は無く，したがって解は存在しない．
- $b = 0$ ならば，2 直線は共に x 軸となり，重なってしまうので，任意の x は解となる．つまり，無限に多くの解がある．

ことが分かる．図 2.6(b) 参照．



(a)　(b)

図 2.7. 平面から平面への写像 A.

このように，幾何学的にみると解の存在する条件や解の様子が鮮明にみえてくる．

2.3.6　平面を平面に写す 1 次写像

さっそく，式 (2.1.18) を考えよう．もう一度書いておくと

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{2.3.17}$$

ここで，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は，別々の 2 次元平面のベクトルを表す．すると，$\mathbf{A}$ は 2 次元平面から 2 次元平面への 1 次写像を与える．たとえば，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

を図 2.7 に示す．この写像のグラフは，4 次元空間にしか描けないのでイメージすることは難しい．

$$y_1 = x_1 - x_2, \ y_2 = x_1 + x_2$$

の 1 つづつは，3 次元空間 $(x_1, \ x_2, \ y_1)$ や $(x_1, \ x_2, \ y_2)$ での平面として描くことができる．図 2.8 参照．

そこで，連立方程式 (2.2.1):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

の解の様子を幾何学的にみてみたい．2 つの 2 次元平面 $(x_1, \ x_2)$，$(y_1, \ y_2)$ を同時にみることはできないので 2 次元平面 $(x_1, \ x_2)$ 内で式 (2.3.18) の 1 つ 1 つの式が満たす集合をみることにしよう．

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

は，いずれも直線となる．図 2.9 参照．この 2 つの直線の交点として解が求められ

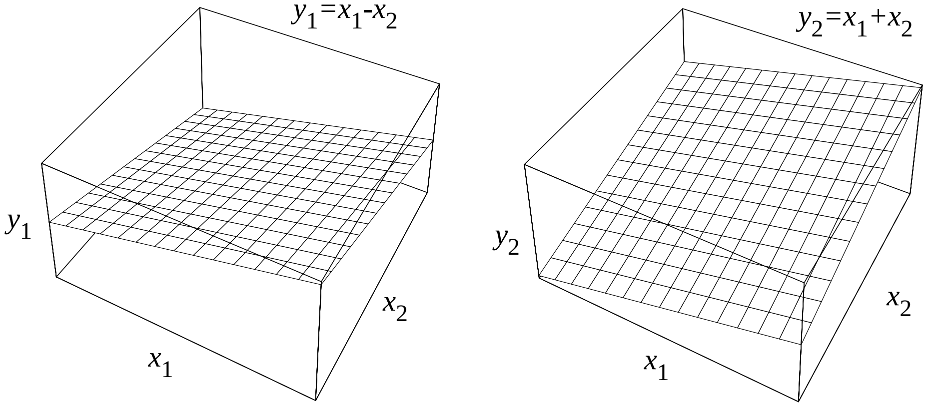


図 2.8. 1 次関数の作る関数平面.

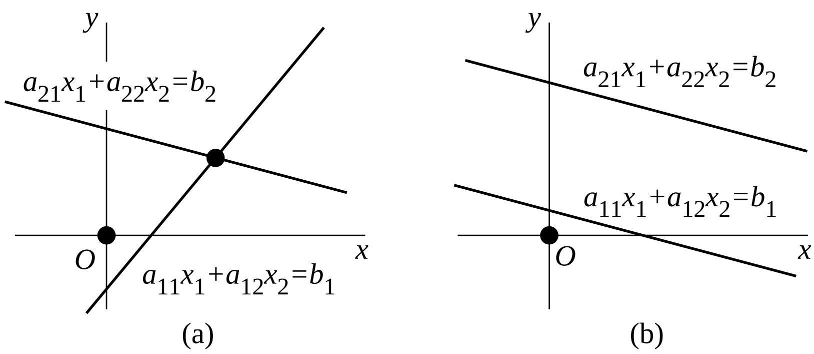


図 2.9. 2 つの関数の満たす集合.

る．次の場合が考えられよう．ここで

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_2 = 0 \ \Leftrightarrow [\, a_{11} \quad a_{12} \,] = k\,[\, a_{21} \quad a_{22} \,]$$

という性質に注意しよう．

- $\det \mathbf{A} \neq 0$ ならば，2 直線は傾きが異なるので 1 点で交わる．つまり，解はただ一つである．図 2.9(a) 参照.
- $\det \mathbf{A} = 0$ ならば，
  - $b_1 \neq kb_2$ ならば，2 本の平行な直線となるので，解は存在しない．図 2.9(b) 参照.
  - $b_1 = kb_2$ ならば，2 つの直線は重なって 1 本になるので，解は無限個存在する．

ここでの話は，おおざっぱであったが

- ベクトルは空間の点，
- 行列は「ベクトルの住む1つの空間からもう1つのベクトル空間」への写像

を表すと考えると，おもしろくなる．行列が正方行列の場合，1つのベクトル空間から自分自身のベクトル空間への写像と考えることもできる．この場合は，写像と言わずに**変換** (transformation) という．ベクトルと写像の物語が「線形代数」と言える．

2.3.7 2×2 行列の固有値と固有ベクトル—再考—

2.1.4 で考えた 2×2 行列 $\mathbf{A}$ の固有値と固有ベクトルの問題を再び考えよう．いま，

$$\mathbf{A}\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h} \tag{2.3.19}$$

を満たす，ベクトル $\mathbf{h}$ とスカラー λ があると考えて，まずこれらを求めよう．式 (2.3.19) を書き直すと次式となる．

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2)\,\mathbf{h} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.3.20}$$

この方程式が零でない解をもつためには，

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{2.3.21}$$

でなければならない．したがって，λ はつぎの2次方程式の解でなければならない．

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \tag{2.3.22}$$

そこで，ここでは最も簡単な場合として，この2次方程式が相異なる2実解 λ_1，λ_2 をもつ場合を考えよう．λ_1 を式 (2.3.20) に代入して，$\mathbf{h}_1$ として，たとえば次のベクトルを得る[16]．

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} \end{bmatrix} \tag{2.3.23}$$

同様にして，λ_2 についても次の固有ベクトル $\mathbf{h}_2$ を得る．

$$\mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \lambda_2 - a_{11} \end{bmatrix} \tag{2.3.24}$$

これらの固有ベクトルを用いて，行列

$$\mathbf{H} = [\,\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2\,] = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} & \lambda_2 - a_{11} \end{bmatrix} \tag{2.3.25}$$

を定義し，座標変換

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{y} \tag{2.3.26}$$

[16]固有ベクトルは唯一のベクトルとして定めることはできない．ある固有ベクトルをスカラー倍したベクトルは，すべて固有ベクトルとなる．

を考えると，

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{AHy} = \mathbf{H}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\mathbf{y}$$

より，次の関係を得る．

$$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{AHy} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\mathbf{y} \tag{2.3.27}$$

そこで，元々ベクトル $\mathbf{y}$ はどんなベクトルでもよいので

$$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{AH} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{2.3.28}$$

の関係を得る．すなわち，ベクトル $\mathbf{y}$ の住んでいる空間では行列 $\mathbf{A}$ は $\mathbf{H}^{-1}\mathbf{AH}$ となり，対角行列となる．行列 $\mathbf{A}$ を行列 $\mathbf{H}$ を用いて $\mathbf{H}^{-1}\mathbf{AH}$ と変換することを，行列の**相似変換** (similar transformation) という．

以上の結果は，行列を対角行列に相似変換するには固有ベクトルを用いるとよいことを示している．

2.4　連立一次方程式の解の重ね合わせ

連立方程式

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{2.4.1}$$

を考え，この方程式の解を $\mathbf{x}_b$ としよう． すなわち

$$\mathbf{Ax}_b = \mathbf{b} \tag{2.4.2}$$

さて，右辺の定数ベクトルを適当に 2 つのベクトルに分解したとしよう．すなわち

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \tag{2.4.3}$$

とする．そして，この分解されたそれぞれの定数ベクトルを右辺に持つ方程式

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b}_2 \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

を考え，それぞれの方程式の解を $\mathbf{x}_{b1}$，$\mathbf{x}_{b2}$ としよう．すなわち

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax}_{b1} &= \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{Ax}_{b2} &= \mathbf{b}_2 \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

このとき，3 つの解 $\mathbf{x}_b$，$\mathbf{x}_{b1}$，$\mathbf{x}_{b2}$ の間には次の関係がある．

$$\mathbf{x}_b = \mathbf{x}_{b1} + \mathbf{x}_{b2} \tag{2.4.6}$$

これを，**解の重ね合わせ** (superposition) あるいは**重ね合わせの理** (law of superposition) という．

実際，

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{x}_{b1}+\mathbf{x}_{b2}\right)=\mathbf{A}\mathbf{x}_{b1}+\mathbf{A}\mathbf{x}_{b2}=\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2=\mathbf{b} \tag{2.4.7}$$

となって，$\mathbf{x}_{b1}+\mathbf{x}_{b2}$ は確かに元の方程式 (2.4.1) の解となっている．

【例題 2.4.1】

ある回路から次の方程式を得た．

$$\begin{aligned} Ri+v &= E \\ i-Gv &= J \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

ただし，i, v が未知数であり，他の記号はすべて既知の値であるものとする．i, v を求めよ．

【解】クラーメルの公式を使って解くことにしよう．

$$\Delta=\begin{vmatrix} R & 1 \\ 1 & -G \end{vmatrix}=-\left(1+RG\right) \tag{2.4.9}$$

より，解は次式となる．

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} E & 1 \\ J & -G \end{vmatrix}=\frac{GE+J}{1+RG} \\ v &= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} R & E \\ 1 & J \end{vmatrix}=\frac{E-RJ}{1+RG} \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

次に，方程式 (2.4.8) を

$$\begin{aligned} Ri+v &= E \\ i-Gv &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

と

$$\begin{aligned} Ri+v &= 0 \\ i-Gv &= J \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

に分解して解いてみよう．式 (2.4.11) の解は

$$i=\frac{GE}{1+RG},\ v=\frac{E}{1+RG} \tag{2.4.13}$$

また，式 (2.4.12) の解は

$$i=\frac{J}{1+RG},\ v=\frac{-RJ}{1+RG} \tag{2.4.14}$$

となって，確かに重ね合わせができることが分かる．

【問題 2.4.1】　次の連立方程式を重ね合わせの理を使って解きなさい．

$$4x+y+z=2,\ 2x+5y+4z=1,\ 3x+2y+6z=3$$

第 3 章

複素数

複素数は高校の数学 B で学ぶことになっている．教科書に沿って復習しておこう．複素平面での複素数の表示や複素指数関数と三角関数の関係を与えるオイラーの公式は，回路理論のうち「交流理論」と呼ばれる回路の解析手法の主役を演じる．今からなじんでおこう．

3.1 複素数はどこから生まれたのか

数は人間が発明した情報伝達のための偉大な手段である．自然科学やその応用としての工学・技術は数なしに語ることはできない．

1 次方程式 $x+1=0$ は，**自然数** (natural number) の範囲では解はないが，0 や負の整数を考え，数の範囲を**整数** (integer) にまで広げると，解 $x=-1$ を持つ．

また，1 次方程式 $3x=2$ は，整数の範囲では解はないが，分数を考え，数の範囲を**有理数** (rational number) にまで広げると，解 $x=\dfrac{2}{3}$ を持つ．

更に，2 次方程式 $x^2=2$ は，有理数の範囲では解はないが，**無理数** (irrational number) を考え，数の範囲を**実数** (real number) にまで広げると，解 $x=\pm\sqrt{2}$ を持つ．

しかし，どのような実数も，その平方は負にならないから，2 次方程式 $x^2=-2$ は，実数の範囲では解はない．そこで，平方すると -1 になる数を 1 つ考え，これを j [1]（すなわち $j^2=-1$）と表し，数の範囲を広げることが発明された．そうすると，$x^2=-2$ は，解 $x=\pm j\sqrt{2}$ を持つようになる．j を**虚数単位**という．

このようにして， a と b が実数のとき，$a+bj$ の形で表される数のことを**複素数** (complex number) という．たとえば，$1+j$, $2-3j$, $5j$ などは，いずれも複素数である．実数 a を $a+0j$ と同一視することによって，実数は複素数の特別なものとみなすことができる．

複素数がお互いに等しいこと（相等という），加減乗除は表 3.1 のルールに従う．これらの計算規則は，文字 j の式と考えて計算したとき，j^2 がでてくればそれを -1 と置き換えて得られる．

複素数 $z=a+bj$ に対して，$a-bj$ を z と**共役な複素数** (conjugate complex

[1] 数学では文字 i を用いるが，電気工学では i は電流を表すのに用いるので，j を用いる．

表 3.1. 複素数の相等および四則演算.

演算の名前	内　容
相　等	$a+bj=c+dj \Leftrightarrow a=c,\ b=d$ $a+bj=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0$
加　減	$(a+bj)\pm(c+dj)=(a\pm c)+(b\pm d)\,j$
乗　除	$(a+bj)\cdot(c+dj)=(ac-bd)+(ad+bc)\,j$ $\dfrac{a+bj}{c+dj}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}j,\ c+dj\neq 0$
共役複素数	$\bar{z}=\overline{a+bj}=a-bj$
共役複素数の性質	$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\ \overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$ $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2},\ \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
絶対値	$\lvert z\rvert=\lvert a+bj\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$
絶対値の性質	$\lvert z\rvert=0 \Leftrightarrow z=0$ $\lvert z\rvert=\lvert -z\rvert=\lvert\bar{z}\rvert,\ z\bar{z}=\lvert z\rvert^2$ $\lvert z_1z_2\rvert=\lvert z_1\rvert\,\lvert z_2\rvert,\ \left\lvert\dfrac{z_1}{z_2}\right\rvert=\dfrac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$
極形式	$z=a+bj \Leftrightarrow z=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta+j\sin\theta),\ \theta=\arg z=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$

number)[2] といい，$\bar{z}$ で表す．$\bar{\bar{z}}=z$ である．

また，z の絶対値 $|z|$ を $\sqrt{a^2+b^2}$ により定義する．$|z|^2=z\bar{z}$ である．

【問題 3.1.1】　$z\bar{z}=|z|^2,\ |zw|=|z|\,|w|,\ |z+w|\leq|z|+|w|$ を示せ．

【問題 3.1.2】　次の計算をしなさい．

$$(2+3j)-(5-2j),\ (1+j)^3,\ \frac{1}{j},\ \frac{j}{1+j},\ \frac{3-2j}{3+2j}$$

【問題 3.1.3】　次の計算をしなさい．

$$\sqrt{-2}\sqrt{-8},\ \frac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-5}},\ \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-9}},\ \frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}+j}$$

【問題 3.1.4】　次の 2 次方程式を解きなさい．

$$x^2-x+1=0,\ 3x^2-2x+1=0,\ -2x^2+6x-7=0$$

【問題 3.1.5】　2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解が複素数になるための条件を求めよ．また，その範囲を $ab-$ 平面内に図示せよ．

[2]共役は「きょうやく」と読む．

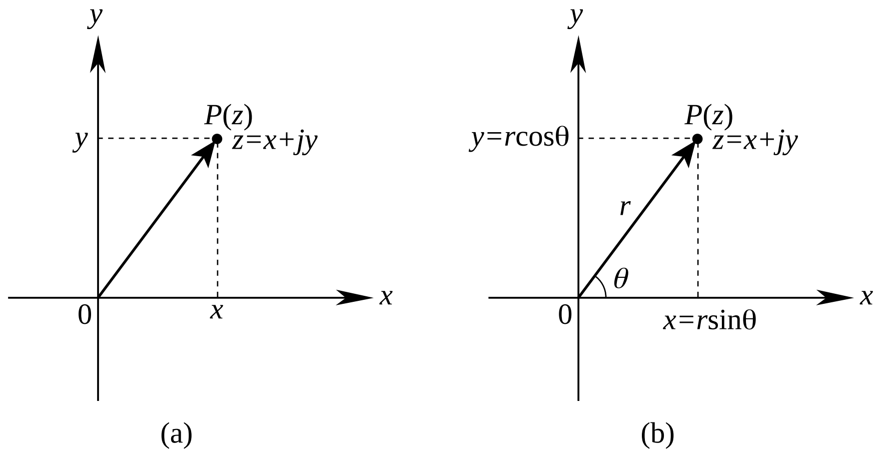


図 3.1. 直角座標表示 (a) と極座標表示 (b).

3.2　複素平面

複素数を平面上の点に対応させて考えると，複素数を幾何学的な対象として理解することができる．

3.2.1　直角座標表示と極座標表示

まず，複素数 z を 2 つの実数 x, y を用いて

$$z = x + yj = x + jy, \qquad j \text{ は虚数単位} \tag{3.2.1}$$

の形[3] に表すことを，**直角座標表示** (rectangular form) という．このとき x を z の**実部** (real part)，y をその**虚部** (imaginary part) という．これらを

$$Re\,(z) = x = \frac{z + \bar{z}}{2},\ Im\,(z) = y = \frac{z - \bar{z}}{2j}$$

と書く．

そこで，z を 2 次元平面上の点 $P(x,\ y)$ に対応させて考える．このときの 2 次元平面を**複素平面** (complex plane) という．x 軸を**実軸** (real axis)，y 軸を**虚軸** (imaginary axis) という．図 3.1 (a) 参照．

ここで，複素数の絶対値は $|z|$ は，原点から点 P までの距離 $\sqrt{x^2 + y^2}$ になっていることに注意しよう．

一般に，複素平面上で 0 でない複素数 $z = x + yj$ を表す点を P とし，原点 O から点 P までの距離を $OP = |z| = r$ とする．OP と x 軸の正の部分のなす角を θ とすると，z は次のように表すことができる．

$$z = r\,(\cos\theta + j\sin\theta) \tag{3.2.2}$$

[3]数学では，$x + yj$ と書くが，電気工学では $x + jy$ と j を虚部のはじめに書く習慣がある．

これを z の**極座標表示** (polar form) という．図 3.1 (b) 参照.

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2$$

であるから，r は実際 z の絶対値である．θ はベクトル OP と x 軸の正の部分のなす角であり，z の**偏角** (argument) といい，$\arg z$ で表す.

$$\theta = \arg z = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{3.2.3}$$

偏角 θ は $-\pi \leq \theta \leq \pi$ の範囲[4] でただ 1 通りに定まる．これを θ_0 とすると，n を整数として z の偏角は，一般につぎのように表される.

$$\theta = \arg z = \theta_0 + 2\pi n \tag{3.2.4}$$

偏角はこの式に従って計算できるが，次の点に注意しなければならない.

1. まず，$\tan^{-1}$ は「アーク・タンジェント」と読み， $\tan$ の逆関数である．すなわち，$\tan\theta = A$ のとき，$\theta = \tan^{-1} A$ である.
2. 任意の角度 θ に対して $\tan\theta$ はただ一つ定まるが，逆に $\tan$ の値が同じでも，角度はただ一つとは限らない．偏角 θ を $-\pi \leq \theta \leq \pi$ の範囲に制限しても，$\tan^{-1} A$ は必ず 2 つの値を持つ．そこで，通常は $\tan^{-1}$ の値域を $-\dfrac{\pi}{2} \leq \tan^{-1} A \leq \dfrac{\pi}{2}$ に制限して値を 1 つに定めている．たとえば，関数電卓ではこの計算法に従っている.
3. そこで，複素数 $z = x + jy$ の偏角 $\arg z$ の値は，まず $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ のとき次のように書ける.

$$\arg(x+jy) = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{y}{x} & (x > 0) \\ \pi - \tan^{-1}\dfrac{y}{|x|} & (x < 0, y > 0) \\ \tan^{-1}\dfrac{|y|}{|x|} - \pi & (x < 0, y < 0) \end{cases} \tag{3.2.5}$$

4. $x = 0$ のときは，複素数は純虚数となり，偏角は虚部の符号だけで決まる.

$$\arg(jy) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (y > 0) \\ -\dfrac{\pi}{2} & (y < 0) \\ \text{不定} & (y = 0) \end{cases} \tag{3.2.6}$$

5. $y = 0$ のときは，複素数は実数となり，偏角は実部の符号だけで決まる.

$$\arg(x) = \begin{cases} 0 & (x > 0) \\ -\pi & (x < 0) \\ \text{不定} & (x = 0) \end{cases} \tag{3.2.7}$$

6. $z = 0$ ，すなわち原点，の偏角は定義しない.

[4]角度は，数学ではラジアン (radian) を使用する．これは，微分や積分を扱いやすくする．日常生活では，角度を度 (degree) で表す方がなじみやすい．状況に応じて使い分けてほしい．また，偏角を $0 \leq \theta \leq 2\pi$ で定めてもよい.

【問題 3.2.1】　次の複素数の偏角をそれぞれ求めよ．

$$5+j4,\ 5-j4,\ -5-j4,\ -5+j4$$

極座標表示では，乗除算の計算が楽にできる．一例として，絶対値が 1 の 2 つの複素数 $z_1=\cos\theta_1+j\sin\theta_1$ と $z_2=\cos\theta_2+j\sin\theta_2$ の積を計算しよう．

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (\cos\theta_1+j\sin\theta_1)(\cos\theta_2+j\sin\theta_2) \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2+j(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2)+j\sin(\theta_1+\theta_2) \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

となる．特に，$\theta_1=\theta_2$ の場合は

$$(\cos\theta+j\sin\theta)^2=\cos(2\theta)+j\sin(2\theta) \tag{3.2.9}$$

の等式を得る．一般に

$$(\cos\theta+j\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+j\sin(n\theta) \tag{3.2.10}$$

が成り立つ．これをド・モアブル (de Moivre) の定理という．

3.2.2　四則演算の図式表示

2 つの複素数の和差については，表 3.1 より，積と商については

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+j\sin(\theta_1+\theta_2)\} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+j\sin(\theta_1-\theta_2)\} \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

の関係を使って，結果を複素平面内に示すことができる．各自図 3.2 に結果を示しなさい．

積については，次のように考えてもよい．これは，おもしろいと思う．2 つの複素数を

$$z_1=r(\cos\theta+j\sin\theta),\ z_2=x+jy \tag{3.2.12}$$

と，それぞれ極形式と直角座標形式で表す．積は

$$z_1z_2=r\{x\cos\theta-y\sin\theta+j(x\sin\theta+y\cos\theta)\} \tag{3.2.13}$$

となる．そこで，複素平面の実部を u，虚部を v とおいて，できあがった点を表示すると次式を得る．

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r(x\cos\theta-y\sin\theta) \\ r(x\sin\theta+y\cos\theta) \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{3.2.14}$$

これは，z_2 ベクトルを z_1 で角度 θ だけ回転し，長さを r 倍することを意味している．特に，$z_1=j$ の場合には，z_2 を 90° 度回転させることになる．

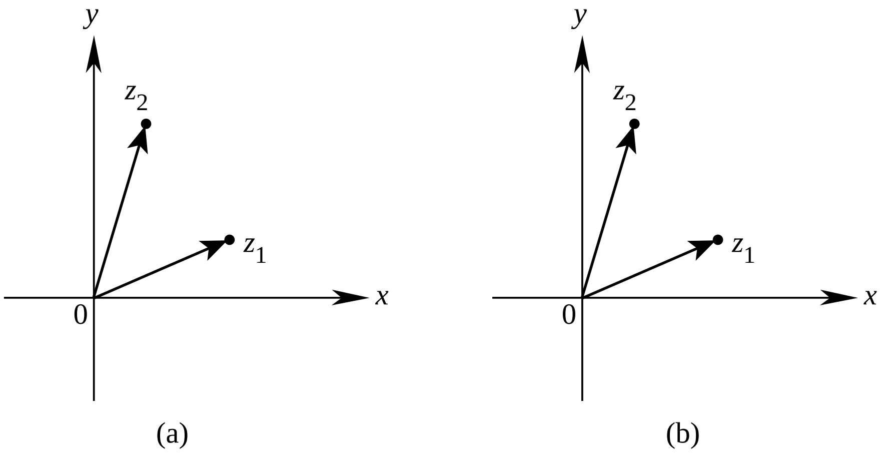


図 3.2. 2 つの複素数の和差 (a) と積商 (b).

3.3　複素係数の連立 1 次方程式

複素数は実数と同じように四則演算が可能なので，連立方程式の係数が複素数になっても，実数の場合と同様な方法で解を求めることができる．一例を示しておこう．

【例題 3.3.1】

ある回路から次の 3 つの方程式を得た．

$$\begin{aligned} I_L &= I_C + I_G \\ (R + j\omega L)\, I_L + \frac{1}{j\omega C} I_C &= E \\ \frac{1}{j\omega C} I_C &= \frac{1}{G} I_G \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

ただし，I_L，I_C，I_G が未知数であり，他の記号はすべて既知の値であるものとする．I_L，I_C，I_G を求めよ．

【解】式 (3.3.1) をそのまま，3 元連立方程式としてといてもよいが，第 1 式が簡単なので，第 2 式に代入して 2 元連立方程式にしてから解くことにしよう．代入して，整理すると次式を得る．ここでは，行列とベクトルの形にまとめておいた．

$$\begin{bmatrix} 1 - \omega^2 LC + j\omega CR & j\omega C\,(R + j\omega L) \\ G & -j\omega C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_C \\ I_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega CE \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.2}$$

この係数行列を $\mathbf{A}$ とすると

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 1 - \omega^2 LC + j\omega CR & j\omega C\,(R + j\omega L) \\ G & -j\omega C \end{vmatrix} \\ &= -j\omega C \left\{ 1 + RG - \omega^2 LC + j\omega\,(CR + GL) \right\} \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
I_C &= \frac{1}{\det \mathbf{A}}\begin{vmatrix} j\omega CE & * \\ 0 & -j\omega C \end{vmatrix} = \frac{j\omega C}{1+RG-\omega^2 LC + j\omega\left(CR+GL\right)}E \\
I_G &= \frac{1}{\det \mathbf{A}}\begin{vmatrix} * & j\omega CE \\ G & 0 \end{vmatrix} = \frac{G}{1+RG-\omega^2 LC + j\omega\left(CR+GL\right)}E
\end{aligned}
\tag{3.3.4}
$$

を得る．これより

$$
I_L = I_C + I_G = \frac{G+j\omega C}{1+RG-\omega^2 LC + j\omega\left(CR+GL\right)}E
$$

が求められる[5]．

3.4　複素関数

複素数を独立変数とし，値となる従属変数も複素数となる関数を考えると，複素関数が得られる．複素関数は優美な関数であり，深く研究がされている．第 1 章でおさらいをした多くの関数は，そのまま引数を複素数にすると複素関数となる．

たとえば

$$
w = f\left(z\right) = z^2 \tag{3.4.1}
$$

は $z = x + jy$ と考えると，複素 2 次関数である．もっとも，この関数を x, y の関数と考えると，$w = u + jv$ とおいて

$$
w = u + jv = z^2 = \left(x+jy\right)^2 = x^2 - y^2 + j\left(2xy\right)
$$

より，2 変数 x, y についての関数

$$
\begin{aligned}
u &= x^2 - y^2 \\
v &= 2xy
\end{aligned}
\tag{3.4.2}
$$

となる．これは 2 次元平面 (x, y) から 2 次元平面 (u, v) への写像を与える．このように，複素関数は簡単に見えてもその正体はつかみやすいとは限らない．したがって，ここでは深入りしない．工業数学の授業で勉強してほしい．

ただ，結果だけを述べておくと，我々が知っている初等関数は複素関数にしても，微分や積分の公式は同じである．そこで，以下必要となる指数関数についてのみ，その性質を次節で述べよう．

---

[5]電気の問題では，通常この答えのように，分母と分子をそれぞれ直角座標表示でそのままにしておいてよい．問題の問われ方によって分母を極形式にする場合がおこる．そのときになったら違った表現に直せばよい．

3.5 指数関数と三角関数

3.5.1 指数関数と三角関数のベキ級数展開

指数関数と三角関数の微分について復習し，これらの関数の新しい表現形式を見いだそう．第 1 章 **1.3.2** でおさらいした結果を再度示しておく．

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \tag{3.5.1}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \tag{3.5.2}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \tag{3.5.3}$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \tag{3.5.4}$$

ここで，指数関数は微分しても同じ指数関数となっている．言い換えると，**指数関数は微分の操作に対して不変**である．そこで，この性質を使って指数関数をつぎのように多項式を無限次数にした形に表すことを試みよう．

$$e^x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k \tag{3.5.5}$$

関数をこのように無限個の和の形に表すことを**ベキ級数** (power series) に展開するという．ここで，各項の係数 a_k を決定したい．式 (3.5.5) を微分すると次式を得る．

$$e^x = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ka_kx^{k-1} \tag{3.5.6}$$

式 (3.5.5) と式 (3.5.6) は等しいので，係数について次の漸化式を得る．

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 \\ 2a_2 &= a_1 \\ 3a_3 &= a_2 \\ &\cdots \\ ka_k &= a_{k-1} \\ &\cdots \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

そこで

$$e^0 = a_0 = 1$$

の関係から，最初の係数を決定すると，式 (3.5.7) に従って次々に係数を決定できる．すなわち

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3!},\ \cdots,\ a_k = \frac{1}{k!},\ \cdots$$

となる[6]．したがって，指数関数は，次のベキ級数に展開できることが分かった[7]．

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k \tag{3.5.8}$$

同様に，三角関数についても 2 階微分すると符号が反転することを使って，ベキ級数の各係数を決定できる．結果は，次式となる．

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \end{aligned} \tag{3.5.9}$$

【問題 3.5.1】　式 (3.5.9) のベキ級数の係数を求めよ．

3.5.2　オイラーの公式

さて，そこで指数関数 (3.5.8) の引数 x を複素数にしてみよう．すなわち

$$x = \alpha + j\theta \quad \text{ここに，} \alpha,\ \theta \text{ は実数}$$

と置いてみる．

$$e^x = e^{\alpha + j\theta} = e^{\alpha}e^{j\theta}$$

であるから，指数が純虚数の $e^{j\theta}$ の部分に興味がある．この部分をベキ級数に展開しよう．

$$\begin{aligned} e^{j\theta} &= 1 + j\theta + \frac{1}{2}(j\theta)^2 + \frac{1}{3!}(j\theta)^3 + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdots\right) + j\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots\right) \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

なんと！この最後の関係式は $\cos\theta$ と $\sin\theta$ のベキ級数の和になっているではないか．すなわち，次式を得る．

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \tag{3.5.11}$$

これを**オイラーの公式** (Euler's formula) という．

オイラーの公式は，交流理論の根幹にかかわる最重要公式である．この式があったからこそ交流の問題が簡単に解けるのである．忘れないように，大きく大きくもう一度書いておく．

オイラーの

$$\boxed{e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t}$$

電気工学では，$\theta = \omega t$ の場合を扱うことが多いので，そのように書き直しておいた．

[6] $k!$ は k の階乗（かいじょう）といい，$k! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k$ を表す．

[7] 数学的には，この級数が「収束」することを調べておく必要がある．実際指数関数は，任意の x についてこの級数は収束することが分かっている．

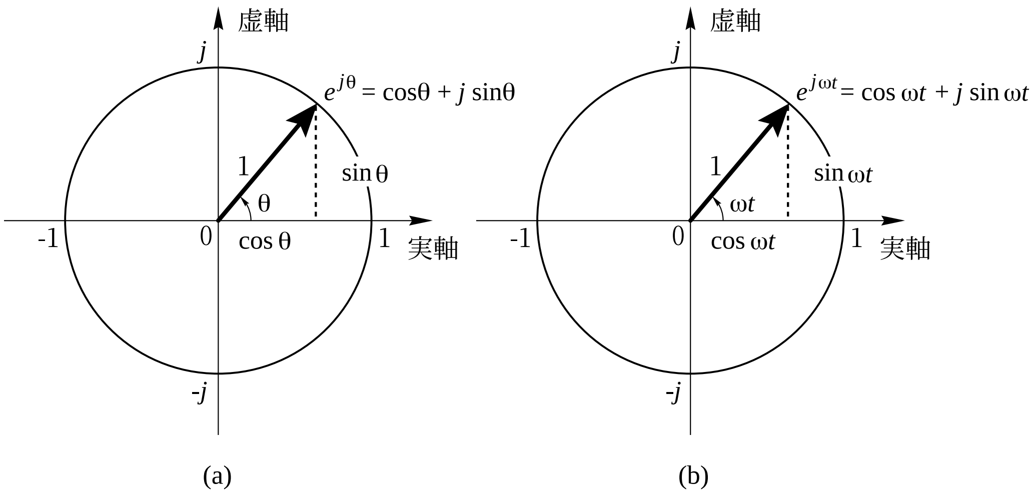


図 3.3. 単位円上の複素数.

三角関数と指数関数は，複素数の世界でこのように関係づけられているのである．複素関数を考えることがなぜ自然であり，大切であるかを示す一例といえよう．

この公式の御利益は何といっても微分演算で指数関数がその形を変えないという性質であろう．このことは，年と共に実感することとなる．

$$\frac{d}{dt}e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t} \tag{3.5.12}$$

3.5.3　単位円上の複素数

単位円上の複素数は，おもしろい性質を持っていて応用面でも大変重要である．思いつくままに幾つかの性質をあげておこう．図 3.3 (a) 参照．なお，図 3.3 (b) は同じ図であるが，角度 θ が角速度 ω で運動している場合を表している．単位円の上の複素数を考えるときには，いつもこの図を思い浮かべると役に立つであろう．

オイラーの公式をもう一度書いて置いてから色々な性質をみることにしよう．

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \tag{3.5.13}$$

なお，単位円上の複素数はその絶対値が 1 であるから，次の公式が成り立つ．

$$\left|e^{j\theta}\right| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{3.5.14}$$

また，$e^{j\theta}$ の複素共役は $\overline{e^{j\theta}} = e^{-j\theta}$ であるから

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta \tag{3.5.15}$$

となる．式 (3.5.13)，(3.5.15) を使って

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2},\ \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \tag{3.5.16}$$

特別な角度の値

$$
\begin{aligned}
e^{j0} &= e^{2\pi} = \cos 0 + j\sin 0 = 1,\ e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = j \\
e^{j\pi} &= \cos\pi + j\sin\pi = -1,\ e^{j\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + j\sin\frac{3\pi}{2} = -j
\end{aligned}
\tag{3.5.17}
$$

三角関数の加法定理

$$
e^{j(\theta_1+\theta_2)} = e^{j\theta_1}e^{j\theta_2} \tag{3.5.18}
$$

の右辺と左辺に式 (3.5.13) を適用して

$$
e^{j(\theta_1+\theta_2)} = \cos(\theta_1+\theta_2) + j\sin(\theta_1+\theta_2)
$$

$$
e^{j\theta_1}e^{j\theta_2} = (\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)
$$

$$
= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + j(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)
$$

したがって，次の加法定理を得る．

$$
\begin{aligned}
\cos(\theta_1+\theta_2) &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \\
\sin(\theta_1+\theta_2) &= \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2
\end{aligned}
\tag{3.5.19}
$$

特に，$\theta_1 = \theta_2 = \theta$ の場合を考えると，次の倍角の公式を得る．

$$
\begin{aligned}
\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \\
\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}
\tag{3.5.20}
$$

de Moivre の定理

指数関数の性質 $\left(e^{j\theta}\right)^n = e^{jn\theta}$ から，直ちに次のド・モワブル (de Moivre) の定理を得る．

$$
(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos n\theta + j\sin n\theta \tag{3.5.21}
$$

1 の n 乗根

方程式 $x^n = 1$ の根を求めよう．一般に n 個存在することが分かっている[8]．いま，$x = e^{j\theta}$ と仮定して代入すると，次式を得る．

$$
e^{j\theta n} = 1 = e^{j2\pi m} \quad \text{ここに } m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots
$$

したがって

$$
\theta = \frac{2\pi}{n}m,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1 \tag{3.5.22}
$$

そこで，n 個の根は次式となる．

$$
1,\ e^{j\frac{2\pi}{n}},\ e^{j\frac{4\pi}{n}},\ e^{j\frac{6\pi}{n}},\ \cdots,\ e^{j\frac{2\pi(n-1)}{n}} \tag{3.5.23}
$$

[8] これを，代数学の基本定理という．

θ 回転

複素数 $z = x+jy$ に $e^{j\theta}$ を掛けると，複素数 z は角度 θ 回転する．$w = u+jv = e^{j\theta}z$ とすると

$$w = u + jv = e^{j\theta}(x + jy) = x\cos\theta - y\sin\theta + j(x\sin\theta + y\cos\theta)$$

となる．したがって，複素平面上の点は次の変換を受ける

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{3.5.24}$$

これは，z を角度 θ 回転させたことにほかならない．

複素数 $e^{j\theta}$ はこの場合，回転の行列 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ に対応している．この行列は

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \cos\theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \cos\theta\mathbf{I} + \sin\theta\mathbf{J}$$

と分解できる．ここに，

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおいた．これらの行列は積について

$$\mathbf{I},\ \mathbf{J},\ \mathbf{J}^2 = -\mathbf{I},\ \mathbf{J}^3 = -\mathbf{J},\ \mathbf{J}^4 = \mathbf{I}$$

となり，ちょうど虚数単位 j と同じルール

$$1,\ j,\ j^2 = -1,\ j^3 = -j,\ j^4 = 1$$

に従っている．一般に，複素数 $z = a + jb$ と行列 $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ とは同じ四則演算の性質を持っている．その意味で同じものと考えてよい．

微分と積分

$$\frac{d}{dt}e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t} \tag{3.5.25}$$

$$\int e^{j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega}e^{j\omega t} \tag{3.5.26}$$

【問題 3.5.2】 $z^3 = 1$ および $z^3 = -1$ の根を求め，単位円上に図示せよ．

【問題 5.5.3】 次の公式を証明しなさい．

1. $\cos^4\theta = \dfrac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3)$
2. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$
3. $\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$
4. $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$
5. $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$

3.5.4　複素数の表示法のまとめ

オイラーの公式から，これまで極形式と呼んできた複素数の表記法は複素指数関数を用いて表すことが可能となった．すなわち

$$z = r\left(\cos\theta + j\sin\theta\right) = re^{j\theta} \tag{3.5.27}$$

そこで，今後極形式といえば，この指数関数を用いた記法を意味することとしよう．複素数 z を表現する方法をまとめると，次の 2 つの方法が使われる．

- **直角座標表示** (rectangular form)

$$z = x + jy \quad \text{ここに}\ \ x: \text{実部},\ y: \text{虚部}$$

- **極座標表示** (polar form)

$$z = re^{j\theta} \quad \text{ここに}\ \ r: \text{絶対値},\ \theta: \text{偏角}$$

直角座標表示された複素数と極座標表示された複素数の間の変換は次のようになる．

- **直角座標表示から極座標表示への変換**　$(xy \Rightarrow r\theta)$

$$r = |z| = x^2 + y^2,\ \theta = \arg\left(z\right) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

- **極座標表示から直角座標表示への変換**　$(r\theta \Rightarrow xy)$

$$x = Re\left(z\right) = r\cos\theta,\ y = Im\left(z\right) = r\sin\theta$$

ここで， 2 つの複素数 $z_1 = r_1e^{j\theta_1}$, $z_2 = r_2e^{j\theta_2}$ の絶対値と偏角についても復習しておこう．

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|\,,\ \arg\left(z_1z_2\right) = \arg\left(z_1\right) + \arg\left(z_2\right)$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg\left(z_1\right) - \arg\left(z_2\right)$$

これらを使うと，a, b, c, d を実数として，複素分数式 $\dfrac{a+jb}{c+jd}$ の絶対値と偏角は次式となる．

$$\left|\frac{a+jb}{c+jd}\right| = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}},\ \arg\left(\frac{a+jb}{c+jd}\right) = \tan^{-1}\frac{b}{a} - \tan^{-1}\frac{d}{c} \tag{3.5.28}$$

また，$\tan^{-1}$ の和や差に関しては次の公式が成立する．

$$\begin{aligned} \tan^{-1}x + \tan^{-1}y &= \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} \\ \tan^{-1}x - \tan^{-1}y &= \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy} \\ \pi - \tan^{-1}x &= \tan^{-1}\frac{1}{x} \end{aligned} \tag{3.5.29}$$

ただし，各式の分母が負になるときは注意が必要である．

【例題 3.5.1】

$$\theta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \tag{3.5.30}$$

の実部と虚部を求めよ．ただし，R, G, C, L, ω はいずれも正の実数とする．

【解】

$$\theta = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \tag{3.5.31}$$

とおいて，実部 α と虚部 β を求める．まず，式 (3.5.31) の両辺を 2 乗して，実部と虚部を求めると次式を得る．

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= RG - \omega^2 LC \\ 2\alpha\beta &= \omega(GL + RC) \end{aligned} \tag{3.5.32}$$

これらの両辺を 2 乗して加え，平方根をとると次式を得る．

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} \tag{3.5.33}$$

そこで，$\alpha^2 + \beta^2$ と $\alpha^2 - \beta^2$ の和と差を取ることによって

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (RG - \omega^2 LC)\right\}} \\ \beta &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (RG - \omega^2 LC)\right\}} \end{aligned} \tag{3.5.34}$$

を得る．ここで符号は，正負の組み合わせから 4 種類が考えられるが，式 (3.5.32) の第 2 式より，$\alpha\beta > 0$ となっていることから，複合同順でなければばならない．したがって

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (RG - \omega^2 LC)\right\}} \\ \beta &= \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (RG - \omega^2 LC)\right\}} \end{aligned} \tag{3.5.35}$$

あるいは

$$\begin{aligned} \alpha &= -\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (RG - \omega^2 LC)\right\}} \\ \beta &= -\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (RG - \omega^2 LC)\right\}} \end{aligned} \tag{3.5.36}$$

となる．

なお，$R + j\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j\phi}$,　$G + j\omega C = \sqrt{G^2 + \omega^2 C^2} e^{j\psi}$ とおいて，

$$\begin{aligned} \theta &= \sqrt[4]{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}\, e^{j\frac{1}{2}(\phi + \psi)} \\ &= \sqrt[4]{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} \left(\cos\frac{1}{2}(\phi + \psi) + j\sin\frac{1}{2}(\phi + \psi)\right) \end{aligned} \tag{3.5.37}$$

から実部と虚部を計算してもよい．

第4章

正弦波と複素正弦波

4.1 正弦波

4.1.1 正弦波とは

時間の関数としての三角関数について復習しておこう．まず，余弦関数

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \phi) \tag{4.1.1}$$

および正弦関数

$$y(t) = A_m \sin(\omega t + \phi) \tag{4.1.2}$$

を考えよう．ここに，t は時刻を表わす実変数である．いずれの関数についても，A_m を**振幅** (amplitude)，ω を**角周波数** (angular frequency)，ϕ を**初期位相** (initial phase) または単に**位相** (phase) という．

これらの関数は，tx 平面または ty 平面上で，グラフに描くと周期的な**波形** (waveform) となるので，**余弦波**または**正弦波** (sinusoid) と呼ばれている．また，これらの関数は， 3 つのパラメータ，A_m, ω, および ϕ を与えると一意的に定まる．すなわち，

- 振幅 A_m は波形の大きさ，
- 角周波数 ω [rad/sec] は 1 秒間に角度 ω [radian] 回転する回転角の**角速度** (angular velocity)
- 位相角 ϕ

を与えると正弦波は決まってしまう．電気回路では，式 (4.1.1), (4.1.2) のように時間の関数として表された波形を**瞬時値** (instantaneous value) 表示と呼んでいる．

波形の**周期** (period) を T [s]，**周波数** (frequency) を f [Hz] とすると，

$$\begin{aligned} \omega T &= 2\pi \\ fT &= 1 \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

の関係がある．図 4.1 参照.

式 (4.1.1), (4.1.2) を，xy 平面と時間軸 t からなる 3 次元空間のグラフとして描くと，一端が原点に固定された，長さ A_m の棒が，一定角速度 ω で回転していると考え，この棒の先端の動きを x 軸，および y 軸に射影した関数が式 (4.1.1) および式 (4.1.2) である．図 4.2 参照.

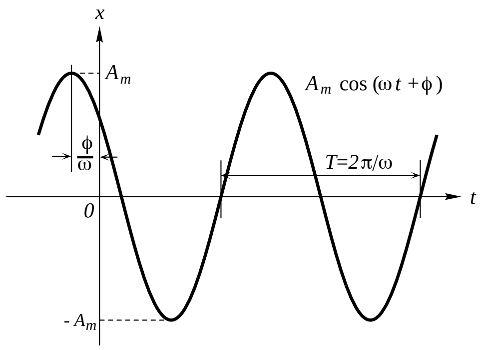


図 4.1. 余弦波の例.

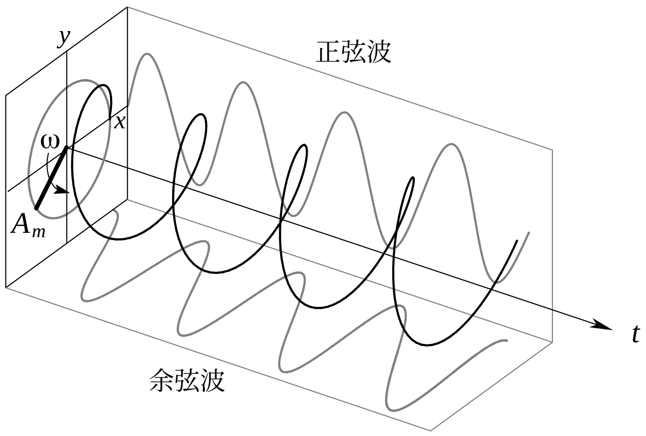


図 4.2. 角速度 ω で回転する棒の各軸への射影.

4.1.2　正弦波間の位相差

次に，位相の異なる 2 つの余弦波

$$x_1(t) = A_m \cos \omega t \tag{4.1.4}$$

および

$$x_2(t) = B_m \cos(\omega t + \phi) \tag{4.1.5}$$

について，位相の持つ性質を見ておこう．ここで，式 (4.1.4) を基準にして考えるために，その位相は 0 とおいた.

1. $\phi = 0$ の場合，2 つの波形は**同相** (in-phase) であるという.
2. $\phi > 0$ の場合，式 (4.1.5) の波形は，式 (4.1.4) の波形より（位相が）**進んだ** (leading phase) **波形**であるという．図 4.3(a) 参照.
3. $\phi < 0$ の場合，式 (4.1.5) の波形は，式 (4.1.4) の波形より（位相が）**遅れた** (lagging phase) **波形**であるという．図 4.3(b) 参照.

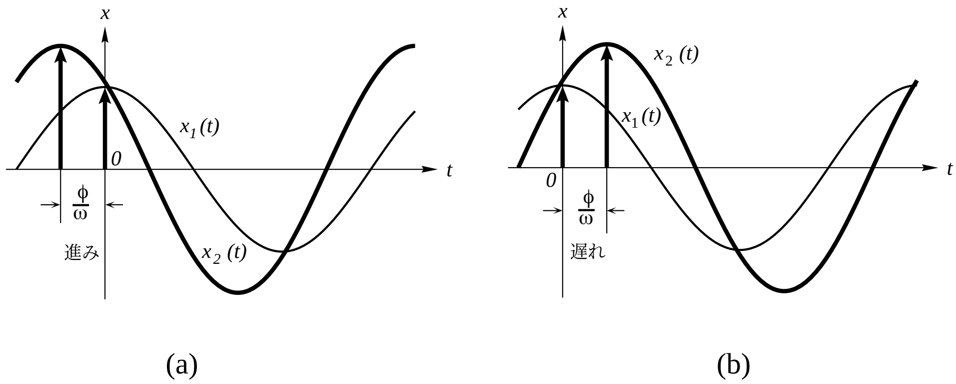


図 4.3. 進み波形 (a) と遅れ波形 (b).

特に，式 (4.1.4) の波形より位相が $\dfrac{\pi}{2}$ だけ遅れた波形は

$$A_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = A_m \sin \omega t \tag{4.1.6}$$

となって，正弦波となる．このことから，余弦波と正弦波はどちらか一方を考えれば十分である．以下では，主として余弦波を用いて説明する．

【問題 4.1.1】　次の 2 つの正弦波について，$x(t)$ に対する $y(t)$ の位相差を求めよ．

1. $x(t) = \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{6}\right),\ y(t) = \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{3}\right)$
2. $x(t) = \sin\left(\omega t - \dfrac{\pi}{6}\right),\ y(t) = \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{3}\right)$

4.1.3　正弦波の実効値

正弦波の平均値について考えておこう．式 (4.1.1) を例にとって説明する．勿論，式 (4.1.2) についても同様である．まず，そのまま一周期にわたって平均してみよう．

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)d\tau = \frac{\omega A_m}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(\omega\tau + \phi)d\tau = \frac{A_m}{2\pi}\left[\sin(\omega\tau + \phi)\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = 0 \tag{4.1.7}$$

ここに，$< \cdot >$ は 1 周期にわたって平均をとることを表わす．したがって，正弦波はそのまま平均してもその値は 0 となってしまう．このような波形については，一度 2 乗してから平均し，その平方根をとるとよい．すなわち，

$$\langle x \rangle_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [x(\tau)]^2 d\tau} \tag{4.1.8}$$

を定義し，この平均 $< \cdot >_{rms}$ を **2 乗平均の平方根** (root mean square) または単に rms という．特に，正弦波にこれを適用すると，交流回路では有用な物理量が得られるので，この平均値を，**実効値** (effective value) と呼んでいる．

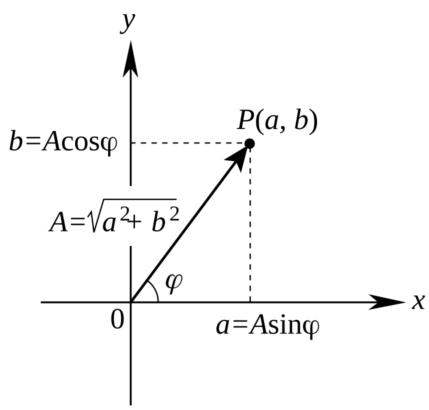


図 4.4. 合成位相を計算するための図.

式 (4.1.1) の正弦波の場合，振幅 A_m と実効値 A_e の関係は

$$A_e = \langle x \rangle_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [x(\tau)]^2 d\tau} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega\tau + \phi)d\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}}A_m \tag{4.1.9}$$

4.1.4　正弦波の合成

加法定理を用いて $a\cos\omega t + b\sin\omega t$ を式 (4.1.1) のように $A_m\cos(\omega t + \phi)$ に変形することを**正弦波の合成**という[1]．

$$x\,(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t = \sqrt{a^2+b^2}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega t\right\} \tag{4.1.10}$$

と変形し，

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{4.1.11}$$

とおくと，式 (4.1.10) は次式となる．

$$x\,(t) = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\cos\omega t + \sin\varphi\sin\omega t) = A\cos\left(\omega t - \varphi\right) \tag{4.1.12}$$

ここに，

$$A = \sqrt{a^2+b^2},\ \varphi = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

とおいた．これらの関係は，図 4.4 をみるとすぐに理解できるであろう．

【問題 4.1.2】　次の式を式 (4.1.12) のように変形し，$\cos\omega t$ に対する位相差を求めよ．

1. $\cos\omega t + \sin\omega t,\ \sqrt{3}\sin\omega t - \cos\omega t,\ \sqrt{3}\cos\omega t - \sin\omega t$
2. $\dfrac{RE}{R^2+\omega^2L^2}\cos\omega t + \dfrac{\omega LE}{R^2+\omega^2L^2}\sin\omega t$

【問題 4.1.3】　次の正弦波の実効値を求めよ．

$$3\sin\omega t + 4\cos\omega t,\ 100\sqrt{2}\sin\omega t - 100\sqrt{2}\cos\omega t,\ \sqrt{3}\sin\omega t + \cos\omega t$$

[1] $A_m\sin(\omega t + \phi)$ のようにまとめることも同じである．ここでは余弦波にまとめることを考える．

4.2 複素正弦波

4.2.1 複素正弦波を考える理由

オイラーの公式を用いると

$$A_m e^{j(\omega t+\phi)} = A_m \cos(\omega t+\phi) + jA_m \sin(\omega t+\phi) \tag{4.2.1}$$

となる．この右辺の実部と虚部はそれぞれ，式 (4.1.1), (4.1.2) の正弦波である．式 (4.2.1) を正弦波の複素数表示いい，これを単に**複素正弦波**ということにする．

瞬時値表示の実時間で表した正弦波 (4.1.1), (4.1.2) に対して，複素正弦波 (4.2.1) をわざわざ考えるのはなぜだろうか．これは，

- 色々な計算が飛躍的に楽になる
- その結果，計算の途中においても「式の意味」や「変形の見通し」，強いてはその「物理的意味」がわかる

からである．

では，複素正弦波を考えると「何故計算が飛躍的に楽になる」のか．それは

- 微分・積分を施しても，指数関数は関数の形を変えない
- 複素数の指数関数を使った極形式を用いると，たやすく絶対値（振幅）と偏角（位相）が得られる

からである[2]．

そんな訳で，電気工学では，正弦波を扱う交流の問題において例外なく，複素正弦波を用いて計算する．この具体的な方法を**記号法** (symbolic method) という．

しかし，次の事実を忘れてはならない．記号法の適用できる問題は次の 3 つの条件を満たした問題のみである．

- 回路は**線形**である
- **正弦波電源**の印加された回路である
- **定常状態**である

こんなに有用な記号法を紹介しない手は無いのだが，それは電気回路の授業におまかせすることにして，以下 2 つの正弦波の位相差を求める問題を複素正弦波を使って考えてみよう．

4.2.2 複素正弦波を用いた位相差の計算

2 つの正弦波の間の位相差を求める問題を，複素正弦波の問題に置き換えて考えてみよう．このことによって，問題をまったく機械的に解くことができるようになる．

まず，位相差とは

- $-\pi$ から π までの角度 δ であり，
- $0 \le \delta \le \pi$ の場合が進み，$-\pi \le \delta \le 0$ の場合が遅れである

[2] ここに述べた理由は，まったく私の私見である．

と考えよう．

　さて，波形 $A\cos(\omega t+\phi)$ を基準として，別の正弦波との位相差を計算する問題を考える[3]．比較したい正弦波は，$B\cos(\omega t+\theta)$ か $B\sin(\omega t+\theta)$ のどちらか形をしている．そこで，次の手順を考える．

1. 基準とする波形の複素正弦波表示を求める．すなわち
$$x(t)=Ae^{j(\omega t+\phi)}=A\left\{\cos(\omega t+\phi)+j\sin(\omega t+\phi)\right\} \tag{4.2.2}$$
とする．ちょうど，基準の正弦波が実部になるように対応づけた．
2. 比較する正弦波の複素正弦波表示を求める．ただし，比較する正弦波が実部にくるように表現する．上の例の場合
 (a)
$$y(t)=Be^{j(\omega t+\theta)}=B\left\{\cos(\omega t+\theta)+j\sin(\omega t+\theta)\right\} \tag{4.2.3}$$
 (b)
$$z(t)=B\frac{1}{j}e^{j(\omega t+\theta)}=B\left\{\sin(\omega t+\theta)-j\cos(\omega t+\theta)\right\}=Be^{j\left(\omega t+\theta-\frac{\pi}{2}\right)} \tag{4.2.4}$$
となる．
3. $\dfrac{y(t)}{x(t)}=\dfrac{B}{A}e^{j(\theta-\phi)},\ \dfrac{z(t)}{x(t)}=\dfrac{B}{A}e^{j\left(\theta-\frac{\pi}{2}-\phi\right)}\ \Rightarrow\ \delta_c=\theta-\phi,\ \delta_s=\theta-\dfrac{\pi}{2}-\phi$ を求める．
4. もし，必要ならば $\delta_c=\theta-\phi,\ \delta_s=\theta-\dfrac{\pi}{2}-\phi$ について，角度が $-\pi$ から π までの角度に入るように 2π を加える（または引く）．

【例 4.2.1】

次に示す正弦波について，$\cos(\omega t-\dfrac{\pi}{3})$ に対する位相差を求めよ．

$$(a)\ \sin\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right),\ (b)\ \sin\omega t+\cos\omega t$$

【解】　まず，基準とする複素正弦波を $e^{j(\omega t-\frac{\pi}{3})}$ とする．

(a) $\sin\left(\omega t-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ の複素表示は，次式となる．

$$\frac{1}{j}e^{j\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)}=e^{j\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)}=e^{j\left(\omega t-\frac{7\pi}{6}\right)}=e^{j\omega t}e^{j\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}$$

したがって，

$$\frac{e^{j\omega t}e^{j\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}}{e^{j\omega t}e^{j\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}=e^{j\left(-\frac{7\pi}{6}\right)-j\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=e^{j\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$$

[3] 波形 $\sin(\omega t+\phi)$ を基準としても同様な手法がつくれる．

より，$\dfrac{5\pi}{6}$ の遅れとなる．
(b) まずは，合成する．

$$\cos\omega t + \sin\omega t = \sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\omega t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\omega t\right\} = \sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

したがって，複素表現は $e^{j\omega t}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ となる．そこで

$$\frac{e^{j\omega t}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}{e^{j\omega t}e^{j\left(-\frac{\pi}{3}\right)}} = e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)-j\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{j\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

これより，位相差は $\dfrac{\pi}{12}$ の進みとなる．

4.3　複素正弦波の満たす微分方程式

4.3.1　微分方程式をつくる

複素正弦波

$$z(t) = A_m e^{j(\omega t+\phi)} = A_m\cos(\omega t+\phi) + jA_m\sin(\omega t+\phi) \tag{4.3.1}$$

を考えよう．これを時刻 t で微分すると次式を得る．

$$\frac{dz}{dt} = j\omega A_m e^{j(\omega t+\theta)} = j\omega z$$

したがって，$z(t)$ は次式の微分方程式の解となっている．

$$\frac{dz}{dt} - j\omega z = 0 \tag{4.3.2}$$

この方程式が，式 (4.3.1) の満たす微分方程式である[4]．

次に，$z = x + jy$ とおいて，実部と虚部が満たす方程式を導いておこう．式 (4.3.2) を実部と虚部に分解して

$$\frac{d}{dt}(x+jy) = \frac{dx}{dy} + j\frac{dy}{dt} = j\omega(x+jy) = -y + jx$$

より，次式を得る．

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\omega y \\ \frac{dy}{dt} &= \omega x \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

さらに，どちらかの変数を消去すると次式を得る．

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y &= 0 \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

[4]逆に，式 (4.3.2) の解はすべて式 (4.3.1) の形に書ける．その意味で，式 (4.3.1) を微分方程式 (4.3.2) の一般解という．

これらの式は，**単振動** (simple oscillation or harmonic oscillation) の式として知られている．もちろん解は，一般に

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{4.3.5}$$

となっている．ここに，A, B は任意定数（積分定数という）である．2 階の微分方程式 (4.3.4) が，複素数で表すと，式 (4.3.2) のように，1 階の微分方程式として簡単に表すことができる．

4.3.2　外力として複素正弦波をもつ微分方程式の定常解

いま，微分方程式の右辺に複素正弦波を加えた（これを外力という）次の方程式を考える．

$$\frac{dz}{dt} + az = Ae^{j\omega t} \tag{4.3.6}$$

ここに，a, A は実数定数とする．

さて，指数関数は微分しても，その関数の形を変えないことから，式 (4.3.5) の解として，次の形の関数が候補となる．

$$z(t) = Ze^{j\omega t} \tag{4.3.7}$$

そこで，Z を見付けて，解を求めよう．式 (4.3.7) を式 (4.3.6) に代入して整理する．

$$j\omega Ze^{j\omega t} + aZe^{j\omega t} = Ae^{j\omega t}$$

うまい具合に，両辺から $e^{j\omega t}$ が消えて，Z に関する次の 1 次方程式を得る．

$$(a + j\omega)Z = A$$

これを解いて，解 (4.3.7) は次式となる．

$$z(t) = Ze^{j\omega t} = \frac{A}{a + j\omega}e^{j\omega t} \tag{4.3.8}$$

このままでは，解の見通しがきかないので，右辺を極形式に書き直そう．

$$z(t) = \frac{A}{a + j\omega}e^{j\omega t} = \frac{A}{\sqrt{a^2 + \omega^2}e^{j\varphi}}e^{j\omega t} = \frac{A}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}e^{j(\omega t - \varphi)} \tag{4.3.9}$$

ただし，

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{\omega}{a} \tag{4.3.10}$$

とおいた．

これで，式 (4.3.6) の解を見付けることができた．この解を式 (4.3.6) の定常解（特殊解）という．

おもしろいことは，式 (4.3.6) の実部からなる微分方程式の解は，式 (4.3.9) の実部となっていることである．すなわち，微分方程式

$$\frac{dz}{dt} + az = A\cos\omega t \tag{4.3.11}$$

の解は

$$z\left(t\right)=\frac{A}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\cos\left(\omega t-\varphi\right) \tag{4.3.12}$$

となる．

【問題 4.3.1】　次の微分方程式の定常解を求めよ．

$$\frac{dz}{dt}+az=A\sin\omega t$$

【問題 4.3.2】　次の微分方程式の定常解を求めよ．ただし，R,L,E は実数とする．

$$L\frac{di}{dt}+Ri=Ee^{j\omega t}$$

【問題 4.3.3】　次の微分方程式の定常解を求めよ．ただし，R,L,C,E は実数とする．

$$LC\frac{d^2v}{dt^2}+RC\frac{dv}{dt}+v=Ee^{j\omega t}$$

また，この解を参照して，次の微分方程式の定常解を求めよ．

$$LC\frac{d^2v}{dt^2}+RC\frac{dv}{dt}+v=E\cos\omega t$$

$$LC\frac{d^2v}{dt^2}+RC\frac{dv}{dt}+v=E\sin\omega t$$

4.4　正弦波動

前節 **4.1**，**4.2** と **4.3** で述べた時間関数としての三角関数を，空間あるいは時間・空間の関数と考えると，正弦波動となる．時間関数の正弦波が複素指数関数を用いると定常解析が楽になったように，正弦波動も複素化すると計算が著しく簡単になる．以下，余弦波を用いて基本的な用語と関係式をみておこう．

4.4.1　時間的な正弦波

まず，時刻 t の関数としての余弦波は，式 (4.1.1) より

$$z\left(t\right)=A_m\cos\left(\omega t+\phi\right) \tag{4.4.1}$$

となる．また，これに対応する複素指数関数は

$$z\left(t\right)=A_me^{j\left(\omega t+\phi\right)} \tag{4.4.2}$$

である．どちらの関数も 2 回微分すると分かるように，次の単振動の微分方程式を満足する．

$$\frac{d^2z\left(t\right)}{dt^2}=-\omega^2z\left(t\right) \tag{4.4.3}$$

4.4.2　空間的な正弦波

次に，直線上の点を表す空間座標を x とし，x の関数としての余弦波は，式 (4.4.1) と同様に

$$z(x) = A_m \cos(\beta x + \phi) \tag{4.4.4}$$

と書ける．また，これに対応する複素指数関数は

$$z(z) = A_m e^{j(\beta x + \phi)} \tag{4.4.5}$$

である．ここで，β は位相定数 (phase constant),

$$\beta\lambda = 2\pi$$

を満足する長さ λ は波長 (wave length) である．また，

$$\beta = 2\pi k$$

を満たす k は波数 (wave number) と呼ばれている．k は，波 (4.4.4) の単位長さあたりにみられる山（余弦波の最大値）の数を表している．位相定数，波長および波数は，それぞれ時間波形の角周波数，周期および周波数に対応している．

式 (4.4.4)，(4.4.5) どちらの関数も，x で 2 回微分すると分かるように，次の時間を含まない波動方程式を満足する．

$$\frac{d^2 z(x)}{dx^2} = -\beta^2 z(x) \tag{4.4.6}$$

4.4.3　時間・空間的な正弦波

さて，時刻 t と空間座標 x の関数としての余弦波は，式 (4.4.1) や 式 (4.4.4) と同様に

$$z(t,\ x) = A_m \cos(\omega t - \beta x + \phi) \tag{4.4.7}$$

と書ける．また，これに対応する複素指数関数は

$$z(t,\ x) = A_m e^{j(\omega t - \beta x + \phi)} = A_m e^{j\phi} e^{j\omega t} e^{-j\beta x} \tag{4.4.8}$$

である．

どちらの関数も 2 回微分すると

$$\frac{\partial^2 z(t,\ x)}{\partial t^2} = -\omega^2 z(t,\ x),\ \frac{\partial^2 z(t,\ x)}{\partial x^2} = -\beta^2 z(t,\ x)$$

となる．これらの関係式から，$z(t,\ x)$ は，次の波動方程式を満足する．

$$\frac{\partial^2 z(t,\ x)}{\partial t^2} = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 \frac{\partial^2 z(t,\ x)}{\partial x^2} \tag{4.4.9}$$

4.4.4　進行波と定在波

式 (4.4.7) あるいは (4.4.8) の余弦波は，山（振幅が最大となる位相）や谷（振幅が最小となる位相）が時間の経過とともに x 軸上を右（ x の正の方向）に向かって移動する．すなわち，位相が一定となる関係を

$$\psi_+(t,\ x) = \omega t - \beta x + \phi = \text{一定} \tag{4.4.10}$$

とおくと，この位相の x 軸上での時間的変化は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \tag{4.4.11}$$

となる．すなわち，位相は式 (4.4.11) の速度で右に移動することが分かる．この速度を**位相速度** (phase velocity) という．

このように，空間的に位相一定の部分がある速度で動く波を**進行波** (traveling wave) という．また，右に移動する進行波を**前進波** (forward wave)，左に移動する波を**後進波** (backward wave) と呼ぶことがある．後進波の例は，たとえば

$$z(t,\ x) = A_m \cos(\omega t + \beta x + \phi) \tag{4.4.12}$$

である．この波の位相速度は

$$\psi_-(t,\ x) = \omega t + \beta x + \phi = \text{一定} \tag{4.4.13}$$

より

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{\beta} \tag{4.4.14}$$

である．

空間的に位相が右にも左にも動かず静止し，波の振幅が場所の関数となり周期的に変化している場合がある．このような波動を**定在波** (standing wave) という．たとえば

$$\begin{aligned} z(t,\ x) &= A_m \cos(\omega t - \beta x + \phi) + A_m \cos(\omega t + \beta x + \phi) \\ &= 2A_m \cos(\omega t + \phi)\cos(\beta x) \end{aligned} \tag{4.4.15}$$

は，定在波の例である．これは，振幅 $2A_m \cos(\omega t + \phi)$ が時間的に余弦波で変化し，空間的には静止した余弦波 $\cos(\beta x)$ とみることができる．定在波では，空間的に振幅が最大となる位置，すなわち $|\cos(\beta x)| = 1$ を満たす $x = n\pi,\ n = 0, 1, \cdots$ を腹 (loop) という．また，$\cos(\beta x) = 0$ となる位置 $\beta x = \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi,\ n = 0, 1, \cdots$ は節 (node) と呼ばれている．

4.5　波動のうなり

ω とほんの少しちがった角周波数 $\omega \pm \delta\omega$ を，また位相定数 β についても同様にわずかに違った $\beta \pm \delta\beta$ をもつ 2 つの波動 $e^{j\{(\omega+\delta\omega)t-(\beta+\delta\beta)x\}}$ と $e^{j\{(\omega-\delta\omega)t-(\beta-\delta\beta)x\}}$ の和を考えよう．すなわち，波動

$$e^{j\{(\omega+\delta\omega)t-(\beta+\delta\beta)x\}} + e^{j\{(\omega-\delta\omega)t-(\beta-\delta\beta)x\}} \tag{4.5.1}$$

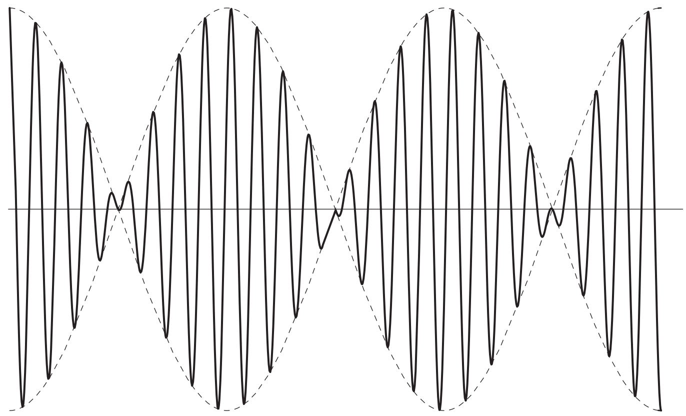


図 4.5. 振幅が余弦波のうなり波形の例.

を考える．式 (4.5.1) は

$$e^{j(\omega t-\beta x)}\left(e^{j\{\delta\omega t-\delta\beta x\}}+e^{-j\{\delta\omega t-\delta\beta x\}}\right)=e^{j(\omega t-\beta x)}2\cos\{(\delta\omega)\,t-(\delta\beta)\,x\} \quad (4.5.2)$$

と書き換えられる．これは，平均の角周波数 ω および平均位相定数 β をもち，振幅が $2cos\{(\delta\omega)\,t-(\delta\beta)\,x\}$ でかわる波動を表している．特に，この振幅は時間と空間に関してゆっくり変わる余弦波となっている．このように振幅が変化する波動は，**うなり波動**と呼ばれている．

そこで，式 (4.5.2) の実部の波動を例にとって考えよう．すなわち

$$2\cos\{(\delta\omega)\,t-(\delta\beta)\,x\}\cos\{\omega t-\beta x\} \quad (4.5.3)$$

を考える．振幅が一定となるのは $(\delta\omega)\,t-(\delta\beta)\,x=$ 一定 であるから，このうなり波形は

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\delta\omega}{\delta\beta} \quad (4.5.4)$$

の速度で進むことが分かる．この速度は**群速度** (group velocity) と呼ばれている．

空間の一点，たとえば $x=0$，で固定してこの波動をみると $2\cos(\delta\omega)\,t\cos\omega t$ となる．図 4.5 は，この波形を示している．

一般に，2 つの異なる角周波数 ω_1，ω_2 をもつ正弦波 $A_1\mathrm{sin}(\omega_1 t)$，$A_2\mathrm{sin}(\omega_2 t)$ の和：

$$f(t)=A_1\sin(\omega_1 t)+A_2\sin(\omega_2 t) \quad (4.5.5)$$

は，必ずしも正弦波になるとは限らないことに注意しよう．すなわち，

1. $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}=$ 有理数の場合：$f(t)$ は周期関数となる．
2. $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}=$ 無理数の場合：$f(t)$ は周期関数とならない[5]．

2 つの異なる角周波数をもつ正弦波の和で表される関数は，このように周期関数にならないこともあり，この関数の性質を知ることは易しくない．

[5] この場合 $f(t)$ を準周期関数 (quasi-periodic function) と呼ばれている．

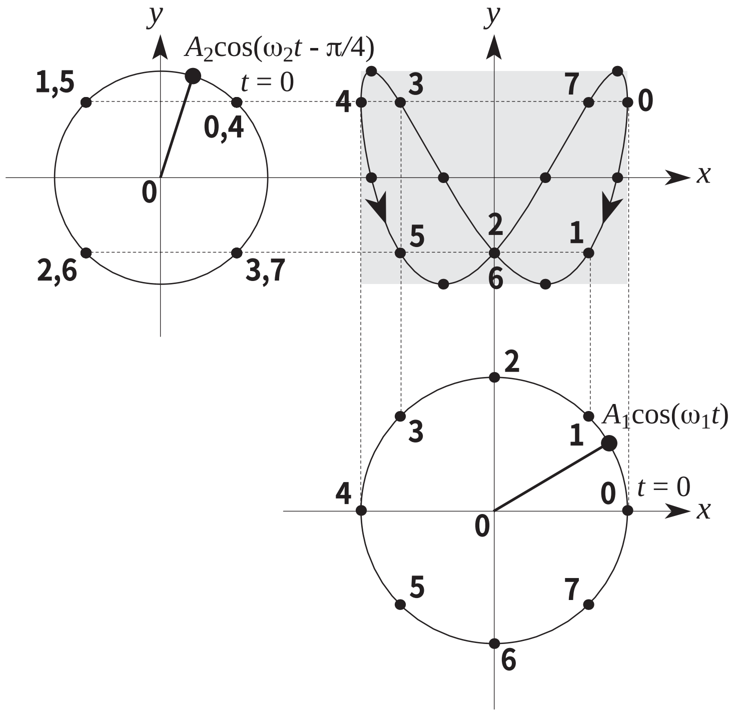


図 4.6. リサジュー図形の描き方の例．$\omega_2 = 2\omega_1, \delta = \pi/4$ の場合．

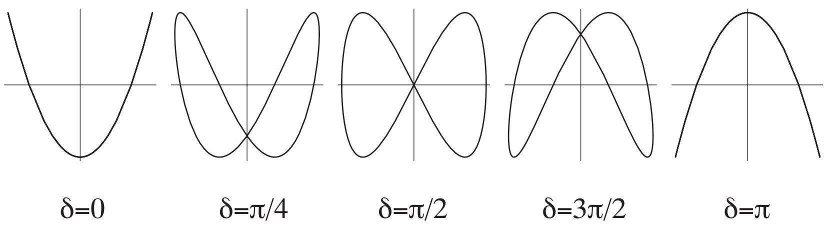


図 4.7. $\omega_2 = 2\omega_1$ で位相差 δ を変化させた場合のリサジュー図形．

4.6　リサジュー図形

異なる角周波数をもつ 2 つの余弦波：

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t) \\
y(t) &= A_2 \cos(\omega_2 t - \delta)
\end{aligned}
\tag{4.6.1}
$$

を平面上の座標と考えて軌跡を描くとおもしろい結果が得られる．

図 4.6 には $\omega_2 = 2\omega_1, \delta = \pi/4$ の場合が例として描かれている．y 軸の軌跡は，x 軸に比べて 2 倍の早さで描かれるので，x 軸の余弦波が円周を 1 周する間に，y 軸の余弦波は円周を 2 周する．したがって，合成された図形は中央のように $x = \pm A_1$ で

1 つの接触点を持ち，$y = \pm A_2$ で 2 つの接触点を持つ曲線が得られる．ただし，位相差 δ の値によっては，曲線が点 $(\pm A_1, \pm A_2)$ を通るときには，これら接触点の個数が減少する．このような図形をリサジュー (Lissajous) の図形という．図 4.8 参照.

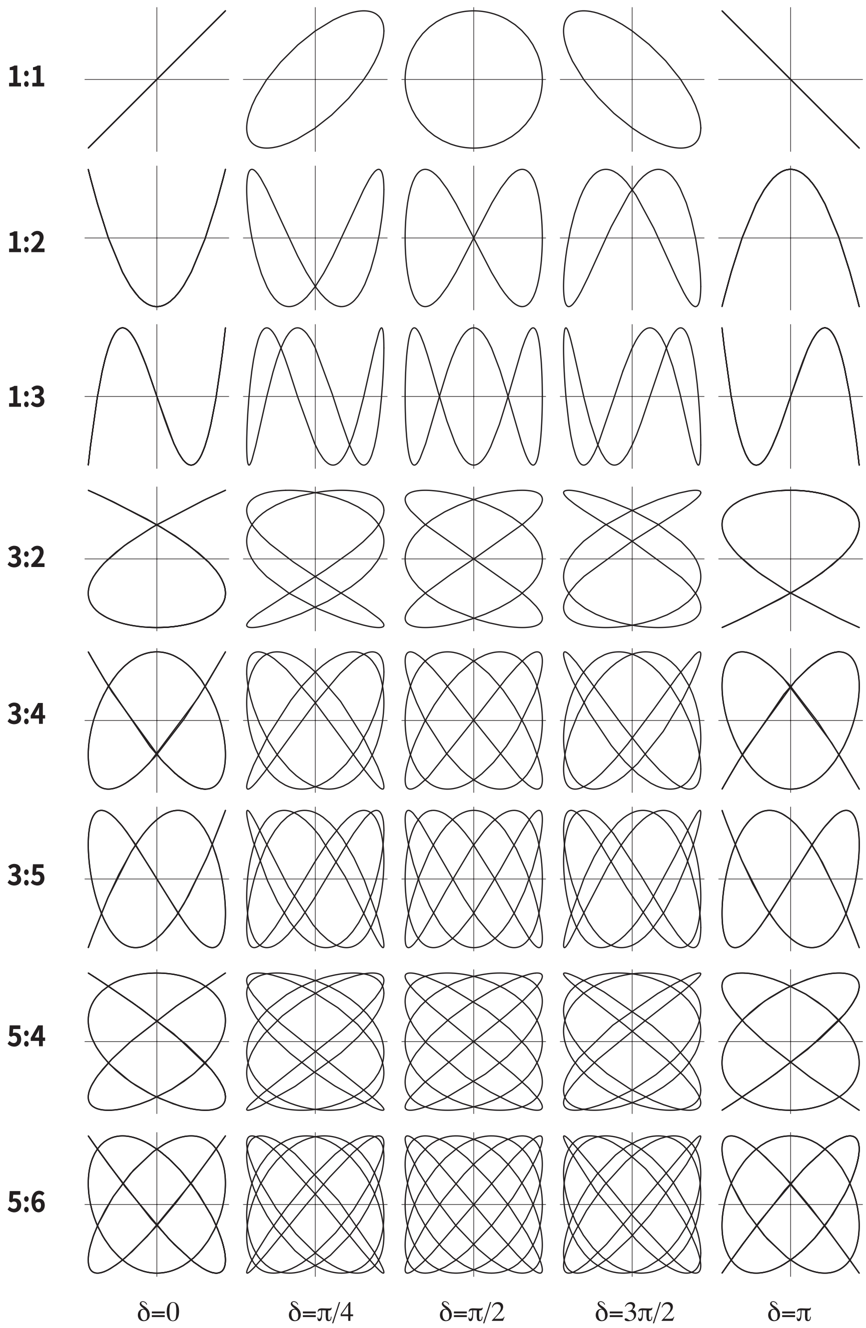


図 4.8. リサジュー図形の例．$\omega_1 : \omega_2$ を図の左に示した.

参考文献

[1] 古屋茂著：**行列と行列式**，倍風館，昭和 50 年.

この本は古くから読み継がれてきた名著であり，記述も分かりやすい．第 5 章までの 100 ページ位を読んでおくと大抵のことは理解できるようになる．

[2] 砂田利一著：**行列と行列式 1**，岩波講座：現代数学への入門，岩波書店，1995.

この本は最近書かれた良書である．非常に読みやすくおもしろく書かれている．行列式の定義の説明に「アミダクジ」の話が書かれている．このノートでも紹介したかった話題である．そんなこともあって，一番推薦したい本である．できればがんばって 2 巻目も読破してほしい．いやいや，この「岩波講座：現代数学への入門」全 10 巻をできれば揃えておきたい．

[3] スピヴァック著，斎藤正彦訳：**多変数解析学**，東京図書，1972.

この本は，お薦めの微積の本である．副題が「古典理論への現代的アプローチ」となっていて，電気磁気学で中心的な役割を果たす Stokes の定理だけに捧げられて書かれている．

多変数の微分の勉強には，最初の 50 ページ程を読むだけで十分だ．全体でも 164 ページと手頃な本だが，全体を理解するためには,「岩波講座：現代数学への入門」の適当な本を読んでおく必要が有りそうだ.

[4] ポントリャーギン著，千葉克裕訳：**常微分方程式**，共立出版，1963.

工学屋がなぜ微積を勉強するのか？それは微分方程式を解きたいからだ．このノートでも一章をさいて，微分方程式の解説をぜひしたいと考えていた．最初に述べたように，いかに教えないでおくかということで省略してしまった．でもここで文献だけは紹介しておこう.

微分方程式の本として 1 冊あげろと言われるとこの本しかない．それほどに世界的な名著である．回路，制御，非線形力学への最良の入門書と言える．40 年間も新鮮さを失わない教科書があるなんて信じられない気もする．ちなみに，ポントリャーギンは，旧ソ連の盲目のトポロジスト．連続群論や力学系における構造安定性の理論で有名．制御工学では「ポントリャーギンの最大値原理」で 1960 年代の流れを作った.

[5] スメール・ハーシュ著，田村一郎・水谷忠良・新井紀久子訳：**力学系入門**，岩波書店，1976.

この本の原題は「Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra」となっていて，線形代数と微分方程式の関係を丁寧に述べている．例題も多くて親切である．この本の著者 S. Smale は微分可能力学系の発展にこの上もなく寄与したバークレーのフィールド・メダリストである．このノートで

省略した「重複特性根に対する Jordan 標準形とそれに関連した一般化された固有ベクトル空間」について知りたいときは，この本を参照すればよい．

[6] フレンチ著，平松惇・安富精一監訳：**振動・波動**，倍風館，1986.

なぜ三角関数にこだわるのだろうか？この質問もまじめに答える必要があるであろう．物理法則の基本的な部分が大抵微分方程式で記述され，その線形近似が線形微分方程式で表され，そして有界な解が振動や波動に対応し，そしてその基礎が三角関数で表される単振動となる…．電気回路といえども例外ではない．

この本は，物理の常識を補強するための教養書として読んでおきたい． MIT の教科書である．

[7] フランク・クラウフォード共著，高橋秀俊監訳：**波動　上・下**，丸善株式会社，昭和 48 年.

こちらは Berkeley の教科書．このノートの第 4 章の続きとして読むとよいであろう.「徳島大学にもこんな本の書ける先生の講義があったらなあー」と思うくらい惚れぼれする本である．正弦波についてやさしく，かつ興味深く語られている．

[8] ファインマン・レイトン・サンズ共著，坪内忠二訳：**力学—ファインマン物理学 I—**，岩波書店，1967.

この魅力的な啓蒙書はじっくり読んでみよう．分からなくて結構．微積がこんな具合に「言語として使われるのだ」ということが肌で感じられるであろう．

さて，最後に将来学ぶであろう回路の本：超やさしいのと超難解？のとを紹介しておこう．

[9] 末武国弘著：**基礎電気回路 1，2**，倍風館，1971, 1980.

「著者は，これから工学を学ぼうとする諸君に，工学の考え方とその方法—言うなれば工学の思想—を電気工学の立場から学んで身につけてもらうことをこの本の執筆目標とした」とまえがきに記されている．分からせるための努力がしみ出してくるような，教育的配慮が痛いほど感じられる本である．高校生にも問題なく理解できます．したがって，いつの時点で読んでもらってもいい本です．

[10] ローレー著，斎藤政男・篠崎寿夫訳：**回路理論**，学献社，1973.

こちらは，回路方程式の導出法について研究していた研究者によって書かれた良書である．一から始める人が躓きそうな所をカバーするように丁寧に説明されている．日本のカリキュラムでは，時間がなくて教えられない内容が語られている．回路理論の入り口を示してくれたと感じられる本といえる．この本は，英語の原典を読んだほうが分かりやすい気がする．各章が短いことも読みやすくしている．

付録 A

ベクトル戯画絵巻

　この章に述べられている事項は，あるいは根も葉もないフィクションかも知れません．それを判断するのはあなた自身です．

　では，時間がきましたから今日はここまで．次の時間はベクトル空間の性質と線形写像の知識が必要です．たとえば，ベクトルの一次独立性，ベクトル空間の次元，写像の rank，写像の核など．これらが何やったか思い出しておいて下さい．忘れた人は，分かってる人に教えてもらって下さい．はい，ここまで．終わります．連休は遊びほうけないように．

A.1　ベクトル達の社会：ベクトル空間

C「あれ！いややわー．今日また休講なん？そんなんやったら連休まえにゆうといてくれたらええのにー」
A「なんや，あの先生サボリすぎやでー」
B「まあ，その分先生に貸し作って，単位もらうとき便宜はかってももたらえやないか．授業あらへんかったらオレらもその分遊べるし．そう怒らんでもええやろ」
C「そや！ええ時間できたわ．この間，先生が最後にいわはったベクトル空間の話．あれ誰か教えてくらはれへん．わたし，勉強してへんから思い出しようあらへんし」
A「ああ．あの「ベクトルってなんやろ」ゆうた先生の質問かいな．そやな．中途半端な時間できてもたし．どうしょう．先輩の研究室でもいって聞いてみよか？」
C「わたしもついいっててかまへんやろか」
A「別に何人いったってええやろ．いこか．確か 3 階の端っこやった．B おまえどうする？」
B「その大学院の先輩の部屋いったらお茶いれてもらえるんやろか．そやったらいくけど」

A「先輩いますかー．あっ，今日わ．先輩来てるんですね．こんな早よから」

M「早よからはないやろ．もう 11 時前やないか．なんや君ら」
B「K 先生の授業が休講になって．ここ来たらコーヒー飲ましてもろて，ついでにベクトル空間と線形写像の話してもらえるいうんで付いてきました．B です」
C「はじめまして．C いいます．いま，$2+\alpha$ 年生やってます」
M「しゃないなー．まあそこのあいたイスに座り．あいにくソファーはふさがってるしー」
A「あの人．ソファーの上で一晩寝てたんですか．ものずきやなー」
M「研究会の発表が迫ってきて，まだデータ取れてーへんので徹夜してたんちゃうか．あんまり大声たてんといたり」
C「あのー．唐突なんですけど．ベクトル空間の話やったら何でも知っはるし，教えていだだけるゆうことできたんですけどー．次元についてお願いできたら思います」
N「おーす．いらっしゃい．えらいこちゃ．主張先の先生に Fax 送るの忘れてた．昨日取ったデータ Fax せんとあかん．技官さんに頼んでくるわ」
A「あの人おもしろそうな人やな．妙な絵のデータ持ってたけど」
M「A おまえ C さんの質問，ちょっとは答えられるだろ．なんでもええから話始めてみ」
A「まず，ベクトル 1 本取ってくる．いや，ちょっと待って．1 本では話にならんな．2 本…．いや，まあええか．やっぱり 1 本からいこ．ベクトルを 1 本

$$\{\mathbf{v}\} \tag{A.1.1}$$

考える」
C「ねえねえ．そのカッコ $\{\ \}$ 何？ベクトルやったら $\mathbf{v}$ と書いたらええんちゃう？」
A「まあ．ベクトル 1 本の集合のつもりやったんやけど． $\mathbf{v}$ でもええわ．ここで $\mathbf{v}$ をスカラー倍して，長さを伸ばしたり縮めたりメイッパイしたらどうなるか考える」
C「スカラーを $\alpha \in \mathbf{R}$ として $\alpha\mathbf{v}$ ができるんちゃう」
A「いや，集合

$$\{\alpha\,\mathbf{v} \mid \alpha \in \mathbf{R}\} \tag{A.1.2}$$

と書いてほしかったなあ」
C「どうでもええんちゃう．そんなん．要するに $\mathbf{v}$ を含んだ 1 本の直線ができるんでしょ．そや，思い出した．空間と集合は意味は一緒やった」
A「そう．この直線を $\mathbf{v}$ が精一杯ガンバッテ作った 1 次元社会という」
C「何やの． 1 次元社会って．もしかして 1 次元空間のこと？」
A「うん． 1 次元部分空間．式 (A.1.2) は $\mathbf{v}$ から生まれた 1 次元の世界」
M「ベクトル 1 本の話はそれくらいにして 2 本の場合に話進めたらどうや思うけど．C さん， 2 本の場合どう？」
C「いやー．うまいこと誘導尋問しやはるわ．わたし考えるん苦手中の苦手やけど．やっぱり無理や思うわ．ええーと．ベクトル 2 本持ってきて，それぞれスカラー倍して

$$\{\alpha\,\mathbf{v}_1 \mid \alpha \in \mathbf{R}\},\ \{\beta\,\mathbf{v}_2 \mid \beta \in \mathbf{R}\} \tag{A.1.3}$$

と 2 つの 1 次元の世界ができる．そや．いまごろ気ついたけど，この 1 次元の世界どっちも原点を通る直線やったんやね」
A 「なんや．分かってへんなー．部分空間ゆうたら原点通らなあかんのや」
M 「 C さん．忘れてるわ．ベクトルは足し算ができること」
C 「ええ？あっそやった．忘れてました．2 本のベクトルで精一杯ガンバッテ作るんやったら

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \tag{A.1.4}$$

も仲間にいれたげんとあかんのやった」
C 「あれえっ！これどうなってんの？この足してできるベクトル．

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \notin \{\alpha\,\mathbf{v}_1 \mid \alpha \in \mathbf{R}\},\ or\ \ \{\beta\,\mathbf{v}_2 \mid \beta \in \mathbf{R}\} \tag{A.1.5}$$

やし．2 つの 1 次元世界 (A.1.3) からはみだしてるー．いややわ．M さん，こんなんあってもええん？」
M 「そやし

$$\{\alpha\,\mathbf{v}_1 + \beta\,\mathbf{v}_2 \mid \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}\} \tag{A.1.6}$$

考えたらええ．これが $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ で張る 2 次元部分ベクトル空間」
C 「…．分かった！なるほどー．ほんまやねー．ベクトルの足し算って驚異的ちゃう．2 つ別々の 1 次元世界やったんを，ベターと (A.1.6) の平面にしてしまうんやから．これって今日の最大の収穫やわ．目からウロコ賞や思います」
A 「やっぱり C は単純や．もっちょっとシビヤーに考えられへんのかいな．ほな 2 本のベクトルが，

$$\mathbf{v}_2 = \gamma\,\mathbf{v}_1 \tag{A.1.7}$$

となってたら，あかんやんか」
C 「そんなん．揚げ足取りや．その場合は

$$\alpha\,\mathbf{v}_1 + \beta\,\mathbf{v}_2 = \alpha\,\mathbf{v}_1 + \beta\,\gamma\,\mathbf{v}_1 = (\alpha\,+\beta\,\gamma)\,\mathbf{v}_1 \tag{A.1.8}$$

やから，結局 1 本しかベクトル考えてえへんのと同じやんか．1 次元しか出来ません」
A 「例外ちゃんとつめとかんと．論理的ちゃう」
C 「分かってる．目からウロコが落ちたんで．ちょこちょこした始末はあとでちゃんとします」
M 「式 (A.1.7) のような関係があるとき，$\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ は一次従属にある．つまり一次独立でないという」
C 「やっとでてきたわ．その独立や従属やゆう言葉．もっとちゃんと教えて」
B 「ちょっとコーヒーいれるお湯沸かしてもいいですか」
M 「ヤカンあすこにあるから．すまん．やってくれる？コーヒーは戸棚の中にあるブルーマウンテン使こてええわ」
B 「はい」
A 「そやし．式 (A.1.7) のとき 2 本のベクトルは従属であると定義する．定義なんや

定義．そうゆんや．そうきめたんや」
M「そうむきにならんでもええやろ．

$$\alpha\,\mathbf{v}_1+\beta\,\mathbf{v}_2=\mathbf{0} \tag{A.1.9}$$

ならば

$$\alpha=\beta=0$$

のとき，$\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ は，確かに式 (A.1.7) の関係になり得ないから互いに一次独立というんや．つまり，C さんが直感的にあたりまえや思て見落とした 1 次元にしかならへん場合を従属関係にあるとゆう」
C「ちょっと．わたし．また分からへんようになってしもた．$\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ が独立やったら，このお 2 人さんで作る世界が 2 次元部分ベクトル空間．それは分かったんやけど．それやったら 100 本ぐらい独立なベクトルさんに集まってもろたら 100 次元部分ベクトル空間できるんやろか．ベクトルさんの世界全体は何できまるんか教えて？」
B「コーヒーはいったけど…．いまの話，ベクトルいうたら

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} \tag{A.1.10}$$

のように成分があるやろ．この場合やったら 3 次元ベクトル」
C「その話とこの話とどう関係してんの．ちょっと混乱するような話横からせんといて．3 次元ベクトルかて 100 本でも 200 本でも用意できるわよ．

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \cdots,\ \mathbf{v}_{100} \tag{A.1.11}$$

と表わしたらおしまいなんやから．これ … の威力」
A「先輩もオレも独立にこだわってんのは，まさにその 1 点にあるんやから．さっしてくれんといかん」
C「何で何で」
M「ベクトル達があつまっている社会，すなわち集合を考えたとしよう．1 本ベクトル $\mathbf{v}_1$ を選んできて，1 次元の世界

$$\{\alpha\,\mathbf{v}_1 \mid \alpha\in\mathbf{R}\} \tag{A.1.12}$$

をつくる．次にもう 1 本独立なベクトル $\mathbf{v}_2$ 選んできて

$$\{\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2 \mid \alpha_1,\ \alpha_2\in\mathbf{R}\} \tag{A.1.13}$$

の世界を作る．当然 2 次元部分空間となっている．しかしどう $\mathbf{v}_2$ 選んでも

$$\mathbf{v}_2=\alpha\mathbf{v}_1 \tag{A.1.14}$$

のようにしか選びようがなかったら，それは元々 1 本しか独立なベクトルがなかった社会．すなわち 1 次元の世界だったということになる」
M「だから

$$\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2=0 \tag{A.1.15}$$

は

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \tag{A.1.16}$$

に限るとなれば，$\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ で 2 次元部分空間を張ることができる．一般に

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{A.1.17}$$

となるときは

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0 \tag{A.1.18}$$

に限るとなると

$$\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \cdots,\ \mathbf{v}_n\} \tag{A.1.19}$$

は互いに独立だから，n 次元部分空間を張る．そして，最後に $\mathbf{v}_{n+1}$ をつけ加えて $(n+1)$ 本の独立なベクトル達をどうしても選ぶことができなくなったとき，このベクトル社会は n 次元ということになる」
C 「ふんふん．

独立なベクトルの数＝ベクトル空間の次元

いうことなんやねん」
M 「そう」
C 「具体的に，さっき B さんがゆうたベクトル (A.1.10) が 3 次元ベクトルゆうんはどないしたら証明できんの」
A 「成分が 3 つしかなかったら 3 本しか独立なベクトルはあらへんというたらええ」
B 「そのためやったら，まあ

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{A.1.20}$$

の 3 本のベクトルが互いに 1 次独立やいうといて，これに (A.1.10) のような任意のベクトルを一緒にして 4 本がもはや 1 次独立には出来へんいうたら終わりや」
A.「なかなかやるやんか．その最後の部分の証明は簡単や．

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 \tag{A.1.21}$$

やから

$$v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 - \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{A.1.22}$$

となって

$$v_1 = v_2 = v_3 = -1 = 0 \tag{A.1.23}$$

になってえへんから独立ではない」
M 「

$$\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\} \tag{A.1.24}$$

が互いに独立なことの証明はどうやろ」
B 「

$$\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3 = 0 \ \Rightarrow\ \alpha = \beta = \gamma = 0 \tag{A.1.25}$$

いうたらええんやろ．うーん．どうしょ．あ！そうか．簡単やんか．

$$\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3 = \alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{A.1.26}$$

だから終わり．以外とあっさりしとるんやな．まあこんな話はなんとかなると思てたけどー．やっぱりな」
C 「もうー．ええかっこして．

独立なベクトルの数＝ベクトル空間の次元＝ベクトルの成分の数

いうことよう分かったわ．ありがとう」
O 「なんや．あんたら．それにしても眠いなあ．このソファーもうちょっと軟らかかったら最高なんやけど．さっきから独立独立って，どこの国がまた独立したんか思たら，ベクトルの独立かいな．それやったら，行列式つこたらええ」
C 「？」
A 「あそうか．式 (A.1.24) の 3 本のベクトルは単位行列作ってその行列式はゼロでない！」
M 「ああ．すまん．すまん．ちょっと後輩がきてるんでー．安眠妨害して申し訳ない」
O 「いやー．そやけどびっくりしたなー．学部の時に先輩のところにきて勉強する後輩がいるやなんて．どないなってんや，うちの大学は．入学試験の偏差値でも変わったんやろか」
A 「そんなこと言われても…．今日は授業が休講やったから来たんです」
N 「カオスのデータやっと先生に Fax できた．…．あんたらまだいたんかいな．ここのコーヒーなかなかやろ．あの眉山の中腹の銘水でいれたか？冷蔵庫にあっただろ」
B 「そんなん．もっとはよ言うてください！」
M 「食堂がこまんうちにぼつぼつ昼飯いこか．みんなもう一回，線形代数の教科書のはじめのところにあるベクトル空間の定義みといたらええわ」
A, B, C 「どうもコーヒーごちそうさまでした．ありがとうございました．また，お願いします．まだ線形写像の諸々の話残ってますし」

A.2　線形写像

C 「今日わ．M さん，いてはりますか」
M 「ああ C さん今日わ．今日は一人？」
C 「A 君と一緒です．ちょっと A 君トイレに…」
M 「今日はソファー空いてます．どうぞ」
A 「あのトイレ．匂消す脱臭剤かなんか趣味悪いなあ…」

C「この間のつづきお願いできたら思いまして．線形写像のランクと核できたら分かって帰りたいです」

O「最近あの計算機室のマックときどき暴走しよる．ワープロのソフトがおかしいんかいな．あー．いらっしゃい」

A「発表済んだんですか？」

O「土曜日に済んだ．そやし．今日はあんたらの話．聞かしてもらおか」

A「ありがとうございます．さっき C さん言うてましたけど．線形写像の像と核の話お願いします」

O「ベクトル空間を 2 つ考えてこれを $\mathbf{V}_1$ と $\mathbf{V}_2$ としょう．そこで $\mathbf{V}_1$ から $\mathbf{V}_2$ への写像：

$$\mathbf{f}:\mathbf{V}_1\to\mathbf{V}_2;\ \mathbf{x}\mapsto\mathbf{y}=\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right) \tag{A.2.1}$$

を考える．この写像が

$$\mathbf{f}\left(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\right)=\alpha\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)+\beta\mathbf{f}\left(\mathbf{y}\right) \tag{A.2.2}$$

の性質を持つとき，$\mathbf{f}$ を線形写像という」

A「あんまりピーンときません」

O「ごめんごめん．つい張り切ってしもた．n 次元空間 $\mathbf{V}_1$ から m 次元空間 $\mathbf{V}_2$ への写像が具体的にこないなっとるとしょう：

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\in\mathbf{V}_1,\ \mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix}\in\mathbf{V}_2,\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&&\cdots&\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix} \tag{A.2.3}$$

とおいて

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{A.2.4}$$

と書けている」

C「そう言うてもろたら，ようわかるわ．

$$\mathbf{A}\left(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\right)=\mathbf{A}\left(\alpha\mathbf{x}\right)+\mathbf{A}\left(\beta\mathbf{y}\right)=\alpha\mathbf{A}\mathbf{x}+\beta\mathbf{A}\mathbf{y} \tag{A.2.5}$$

となって，たしかに式 (A.2.2) を満足してるわ」

O「このとき

1. $\mathbf{x}$ を定義域の空間 $\mathbf{V}_1$ 全体で変えたら，像の $\mathbf{y}$ は空間 $\mathbf{V}_2$ のどんな集合になるか.
2. $\mathbf{V}_2$ 空間 の原点，はよ言うたらゼロ，に写っていく，空間 $\mathbf{V}_1$ の集合はどんな集合か.

考えよう」

C「いま気いつきましたけど．この間の授業で習しえてもろた漸化式：

$$\mathbf{x}\left(k+1\right)=\mathbf{A}\mathbf{x}\left(k\right) \tag{A.2.6}$$

k 番目のデータを写像 $\mathbf{A}$ で写したら $\mathbf{x}(k+1)$ になると思たら，線形写像の繰り返しが漸化式そのものなんちゃう」
O「そう．そやし写像の繰り返し考えることと，同次方程式 (A.2.6) の解を考えることは同じようなもんなんや．まあ強いて言えば写像のほうは，点を点に写すだけやのうて，集合を集合に写すと思てもええんで，色々別の性質が見えてくることがある…」
C「先生が何で線形写像思い出せ言わはったんか[1]．これやねん関係は？」
O「話，さっきの問題 1. に返さんと埒あかへん」
A「式 (A.2.4) やから，写された像の集合は

$$\{\mathbf{y}\} = \{\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{V}_1\} \tag{A.2.7}$$

や思うけど…」
O「それ！きみが今言うた集合．それを写像 $\mathbf{A}$ の像 ($image$) 言うんや：

$$Im\mathbf{A} = Image\ \mathbf{A} = \{\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{V}_1\} \tag{A.2.8}$$

と書く．これは当然 $\mathbf{V}_2$ の部分ベクトル空間になってる」
C「 $Im\ \mathbf{A}$ と書いたら，何や複素数の虚数部みたい．わたし，$Image\ \mathbf{A}$ のほうがイメージとして好き．いま，当然言わはったけど，$\mathbf{A}\mathbf{x}$ でいちいち $\mathbf{x}$ 動かして調べられへんし．どない証明しやはるんですか」
O「$Image$ 言わんと，$Range$ 言う人もいる．それに，証明しやはるん，ちごて「する」んです．

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \tag{A.2.9}$$

と書いたら，みえてくる思うけど…」
A「わかった．ベクトル

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{a}_1 \vdots\, \mathbf{a}_2 \vdots\, \cdots \vdots\, \mathbf{a}_n \right\} \tag{A.2.10}$$

が張る $\mathbf{V}_2$ の集合やから，先輩の言うように当然部分空間や」
O「

$$Rank\ \mathbf{A} = \dim(Image\ \mathbf{A}) \tag{A.2.11}$$

と言う」
C「その $rank$ いうん何て日本語で言うんか教えてくれはらへん」
O「ランクはランクやなー．訳あるんかな．知らんわ」

[1] 実は，この先生サンプル値制御を教えているのでした．

A「 $Rank\ \mathbf{A}$ を計算するには，$Image\ \mathbf{A}$ の次元がわかればなんとかなる．これはどうすれば分かるんですか」
O「もう一回，式 (A.2.9) 書いてみると

$$\begin{aligned}\mathbf{Ax} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \end{aligned} \tag{A.2.12}$$

」
C「それって，さっき A 君が気ついた $\mathbf{A}$ のイメージやから…．わかった．

$$Rank\ \mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \cdots,\ \mathbf{a}_n\}\text{の独立なベクトルの数} \tag{A.2.13}$$

でしょ」
O「具体的にこの独立なベクトルの個数を調べる方法は議論してないけど．まあ，1本づつ付け加えていって，もう独立なベクトルがなくなったら，そこでその数ということになる．まえに，独立や独立や言うてたときに行列式使う話した思うけど．チェックはベクトルの数と同数の行を適当に選んで行列式がゼロにならないことをみたらええ．Gram 行列というてもあるが….」
O「ところで

$$Rank\ \mathbf{A} = r < m = \dim \mathbf{V}_2 \tag{A.2.14}$$

やったら，どんなことになってると思う？」
A「 $Image\ \mathbf{A}$ の次元が m より小さいてことは， $Image\ \mathbf{A}$ は部分空間しか張れてない」
C「 $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_1$ をどう選んでも，写すことのできへん $\mathbf{V}_1$ の元がある言うことちゃう」
A「そう．

$$\mathbf{y} \notin\ Image\ \mathbf{A} \tag{A.2.15}$$

やったら

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \tag{A.2.16}$$

となる $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_1$ は絶体ない！あれー．これ連立方程式

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{A.2.17}$$

が解けるかどうかの判定条件や．

$$\mathbf{b} \in Image\ \mathbf{A} \tag{A.2.18}$$

やったら解がある」
C 「ちょっとちょっと．ちょっとまって．もう一回書いてみるし．

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \tag{A.2.19}$$

やから，右辺は $Image\ \mathbf{A}$ のベクトルやから，左辺の $\mathbf{b}$ が条件 (A.2.18) 満たしたら，適当な $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を選んで $\mathbf{b}$ にできる．この x_i 達が解．そやったん．わたし，連立方程式の答えがちょっと見えてきた気するわ」
M 「ここで，ついでに $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ とした同次方程式

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{A.2.20}$$

考えといたらどうやろ」
C 「その式．どない読むん？教えて」
M 「 $\mathbf{V}_2$ の原点に写る $\mathbf{V}_1$ の元ってなんだろう？って読んだら．つまりこれは O が最初に言うた問題の 2 番目そのものってこと．集合

$$\{x \in \mathbf{V}_1 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

には，ちゃんと名前があって

$$Ker\ \mathbf{A} = Kernel\ \mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V}_1 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}\ \ i.e.\ null\ space\ of\ \mathbf{A} \tag{A.2.21}$$

など[2] といわれてる」
C 「あっ！それ**核**言うんやね．何のやくにたつん？」
A 「ともかく同次方程式解いてしまお．それから考えたらええ」
M 「ほら．さっき

$$Rank\ \mathbf{A} = r \tag{A.2.22}$$

やったら r 本の一次独立なベクトルがあったから，番号を適当に付けかえてこれらを前に持ってきて

$$\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \cdots,\ \mathbf{a}_r \tag{A.2.23}$$

としとく．

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \tag{A.2.24}$$

を

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_r\mathbf{a}_r = -\left(x_{r+1}\mathbf{a}_{r+1} + \cdots + x_n\mathbf{a}_n\right) \tag{A.2.25}$$

と書き換えといて

$$\left[\mathbf{a}_1 \vdots\ \mathbf{a}_2 \vdots\ \cdots \vdots\ \mathbf{a}_r\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = -\left(x_{r+1}\mathbf{a}_{r+1} + \cdots + x_n\mathbf{a}_n\right) \tag{A.2.26}$$

[2]i.e. (il est=it is の略) は「すなわち」という意味．null space は零化空間？

$\left[\mathbf{a}_1 \vdots\, \mathbf{a}_2 \vdots\, \cdots \vdots\, \mathbf{a}_r\right]$ は適当に r 行抜き出してくると行列式は

$$\det\left[\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{r2} \end{bmatrix} \vdots \cdots \vdots \begin{bmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{rr} \end{bmatrix}\right] \neq 0 \tag{A.2.27}$$

となってゼロでないから，この式は解ける」

O 「式 (A.2.20) は，未知数は x_i 達が n 個あって，式は見かけは m 個あり，そのうち r 個が独立．はよ言うたら式はほんまは r 個しかない．そやし未知数のうち r 個だけは他の未知数の一次式として決められる．これが式 (A.2.26) の意味や」

M 「結局，式 (A.2.26) から，未知数 $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ は自由に選んでええから，これらの成分を持つベクトルが $Kernel$ **A** を張る」

O 「それで

$$\dim Kernel\ \mathbf{A} = n - r \tag{A.2.28}$$

」

M 「

$$\dim Image\ \mathbf{A} = r \tag{A.2.29}$$

としたんやったから

$$\dim Image\ \mathbf{A} + \dim Kernel\ \mathbf{A} = n = \dim \mathbf{V}_1 \tag{A.2.30}$$

となっている」

A 「さすがですね．先輩．なんで大学院いったらとたんにえろうなるんですか」

M 「あほ．オマエが勉強不足なんや」

C 「わたし．$Kernel$ **A** が部分空間になるん．証明して言おう思たけど，はずかしからやめとく」

O 「ほな．ちょっと例やってこの話やめにしょう．$n \times n$ の行列

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \\ & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{A.2.31}$$

どうかな」

A 「右上に $(n-1) \times (n-1)$ の単位行列があるから

$$Rank\ \mathbf{A} = n - 1$$

一列目が零ベクトルで

$$\dim Kernel\ \mathbf{A} = 1$$

です」
O「はいはい．で

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & 0 & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{A.2.32}$$

だったら？」
C「これ．べき零行列言うんでしょ．ななめになってる 1 の対角要素がべきをとる毎に上にづれてく．この場合やったら零ベクトルが 2 列左端にできてる．そやし．….そやし

$$Rank\ \mathbf{A}^k = n - k,\ \dim Kernel\ \mathbf{A}^k = k \tag{A.2.33}$$

なります」
O「まいった．今日はここまでや」

A.3 ベクトルの長さ：ベクトルの計量

今回はこの節は省略します．ベクトル空間に内積を定めると長さの概念を得ます．するとベクトル列の収束の概念が使えるようになります．たぶん，みなさんは既によく知っていることでしょう．自分で物語を作ってみましょう．作品ができたらぜひ持ってきて下さい．次のプリントに掲載しますから….

Linear algebra is a language and a collection of results used throughout mathematics and in a great many applications. Elementary linear algebra is not very difficult; in fact, mathematicians tend to consider a problem solved when they can say: ”and now it’s just linear algebra.” For all that, the field involves a number of ideas that are typical of modern mathematics and rather foreign to students whose background is strictly calculus.

Furthermore, although basic linear algebra is rather simple, the problem for the beginner is that it takes so many words to describe the simple procedures and results that the subject may seem tedious and deadly.

From J.H. Hubbard and B.H. West: Differntial Equations:
Dynamical Systems Approach, Springer-Verlag, 1995.