

# 現象のモデリングとその数理：アナロジー

徳島大学工学部電気電子工学科

川上 博

E-mail: kawakami@ee.tokushima-u.ac.jp

1998 年 11 月 4 日

## 1 はじめに

このノートは、平成 6 年 3 月 14 日 - 17 日、京都大学数理解析研究所で行われた公開講座「非線形現象のモデリングとその数理」で使用したテキストの第 4 章を抜粋したものです。そのときにはタイトルは「電気回路と力学系 - モデリングと数理 - 」となっていました。

## 2 回路と類推 (アナロジー)

幾つかの系のモデルの間には類似な理論が展開されている場合がある、図 1 参照。たとえば、電気回路と機械系とのアナロジーなどがこの例である、図 2 参照。理論的構造が類似な系の間では、当然一方の系の理論的枠組みを他の系のそれと対応させて比較検討が可能となる。このような対応はしばしばシステムの類推 (analogy) として紹介されている。たとえば文献 [5] 第 5 章参照。

他方、筆者の個人的体験であるが、二つの系の間にはまったく理論的關係はないものの、生じている現象や作ったモデルの性質に類似点がみられることから、系の性質を通じて類推が考えられる場合がある。これも広い意味で類推の一種と見てよいであろう。たとえば、動物の睡眠・覚醒のリズムを結合発振器の強制振動としてモデルを作る場合などがこの例である。図 3 参照。

さて、筆者はどちらのアナロジーについても体系的に調べたこともなく、まったくの素人であるが、以下幾つか手元にある文献 [5, 6, 9, 10] から具体的な例を引用し問題提起としたい。

### 2.1 電気回路の双対性

まず、回路の双対性 (duality) について考えておこう。平面上に枝どうしが交わることなく描くことのできるグラフは、平面グラフ (planar graph) と呼ばれている。与えられた回路のグラフが平面グラフとなるとき、この回路に対応して、次の手順で新しい回路を作ることができる。これを双対回路 (dual circuit) という。

1. 元の回路を平面上に描き、各網目内に 1 個ずつ節点を置く。回路の一番外側にも 1 つの節点を置く。

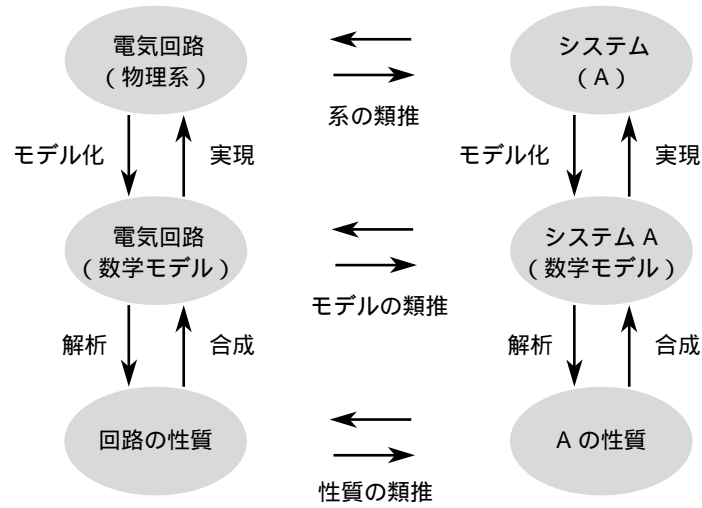


図 1: 電気回路とシステム A との類推 .

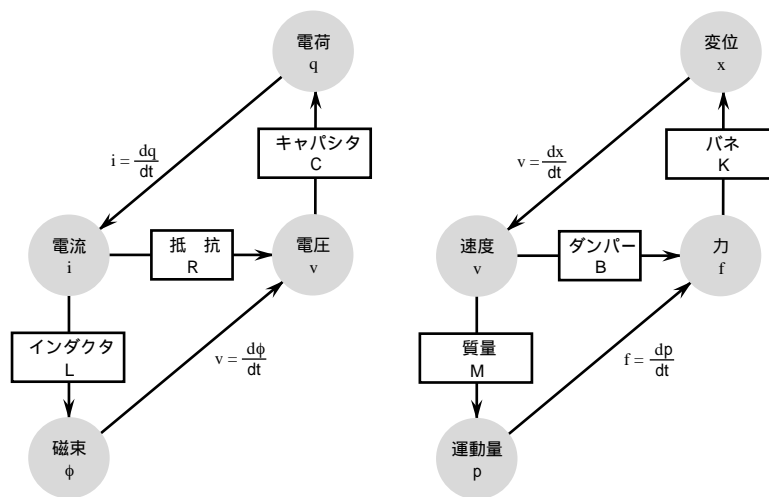


図 2: 電気系と機械系のモデル間の類推の例 .

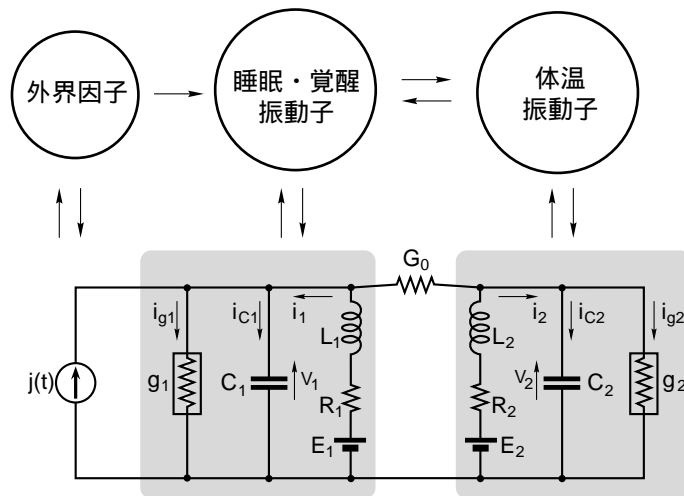


図 3: 電気系と生体系の性質の類推の例 .

表 1: 節点を結んでできる新しい枝の特性 .

元の回路の枝	新しく結んだ枝
抵抗	コンダクタンス
コンダクタンス	抵抗
キャパシタ	インダクタ
インダクタ	キャパシタ
電圧源	電流源
電流源	電圧源

2. 元の回路の各枝について, この枝を横切るように, 左右の網目内におかれた節点を結ぶ枝を考える .

3. 2) で結んだ枝の特性は表 1 のものとする .

たとえば図 4 に双対回路例を示した . 2 つの回路の間では, 状態変数や状態方程式, その他回路の性質などについても双対性と呼ばれる対応がある . 上の例では, 状態方程式 (1) :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e(t) \quad (1)$$

と式 (2)

$$C \frac{dv}{dt} + Gv = j(t) \quad (2)$$

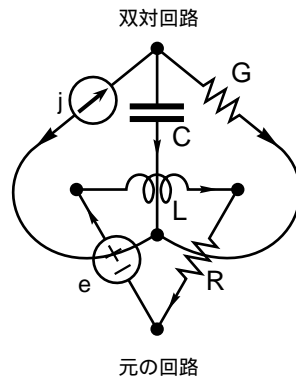


図 4: 双対回路 .

表 2: 双対回路の間の対応関係 .

元の回路	双対回路
抵抗	コンダクタンス
コンダクタンス	抵抗
キャパシタ	インダクタ
インダクタ	キャパシタ
電圧	電流
電流	電圧
磁束	電荷
電荷	磁束
直列	並列
並列	直列

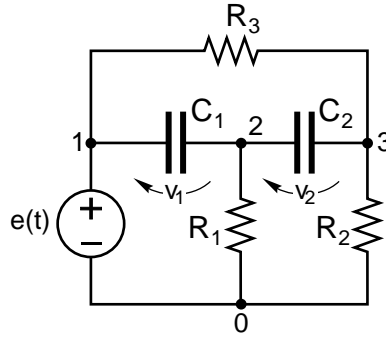


図 5: RC 回路 .

対応している . 一般に , 次の表 2 の対応が付く .

双対性の性質を用いると , 平面グラフとなる回路は , 元の回路を解析すれば , それと双対な回路は自動的に解析されたこととなる .

【例 4.1】図 5 の回路の状態方程式を導出しよう . キャパシタの枝電圧  $v_1, v_2$  を状態に選ぶ . 節点 2 の電圧は  $e - v_1$  , 節点 3 は  $e - v_1 - v_2$  となる . そこで節点 3, 2 に KCL を適用して , それらの式を整理すると ,

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= -(G_1 + G_2 + G_3) v_1 - (G_2 + G_3) v_2 + (G_1 + G_2) e(t) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= -(G_2 + G_3) v_1 - (G_2 + G_3) v_2 + G_2 e(t) \end{aligned} \quad (3)$$

を得る . ここに  $G_k = 1/R_k, k = 1, 2, 3$  とおいた . ここで式 (3) をベクトルと行列を使って書き直しておこう . まず

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & G_2 + G_3 \\ G_2 + G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

とおく . 式 (3) は次式となる .

$$C \frac{dv}{dt} = -grad P(v) \quad (4)$$

ここに

$$P(v) = \frac{1}{2} v^t G v - e(t) g^t v \quad (5)$$

この例と双対性から , 回路も勾配系となる . 他方 LC 回路は Hamilton 系となる . LCR 回路はこれらの性質がなく , ベクトル場は Hamilton ベクトル場と勾配ベクトル場の和で表わされる .

## 2.2 アナロジー

集中定数系としての電気回路モデルは他の物理系との類推が古くから行われている [9] . 表 3 , 4 と 5 に状態変数の間の類推 , 素子間の類推および法則の類推の例をあげておいた . ここでは電気回路と磁気回路のアナロジー , および電気回路と機械系の類推の例を取り上げよう .

表 3: 力学系の状態変数の類推 .

Energy domain	Through variable $i$	Across variable $v$	Integrated through variable $q$	Integrated across variable $\phi$
Electrical	Current	Voltage	Charge	Flux
Magnetic	Flux	Magnetomotive force		
Mechanical (translational)	Force	Velocity	Momentum	Displacement
Mechanical (rotational)	Torque	Angular velocity	Angular momentum	Angular displacement
Fluid	Volume flow	Pressure	Volume	Pressure momentum
Diffusion	Mass flow	Chemical potential	Mass mole number	
Thermal	Entropy flow	Temperature	Entropy	
Chemical reaction	Reaction rate	Affinity	Advancement	

表 4: 電気系と機械系の素子間の類推 .

Energy domain	Mechanical translational	Mechanical rotational	Electrical direct	Electrical indirect
Potential	spring $f = Kx$	spring $T = K\theta$	capacitor $q = Cv$	inductor $\phi = Li$
Kinetic	mass $p = Mv$	moment of inertia $N = I\omega$	inductor $\phi = Li$	capacitor $q = Cv$
Dissipative	damper $f = Bv$	damper $T = B\omega$	resistor $v = Ri$	resistor $i = Gv$

表 5: 法則間の類推 .

Fundamental constitutive laws	Same displacement at every junction point	Kirchhoff's voltage law
	D'Alembert principle	Kirchhoff's current law

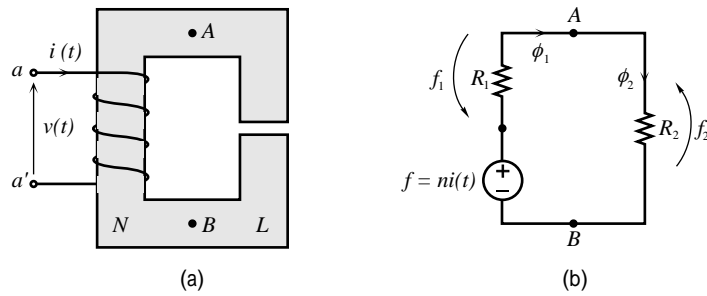


図 6: 磁気回路 (a) とその等価回路 (b) .

### 2.3 電気回路と磁気回路のアナロジー

簡単な磁気回路の例をあげ、電気回路との類推を整理しておこう．図 6(a) の磁気回路を考える．コイルは  $n$  巻とし、コイルが巻かれている部分はコアの磁化特性が非線形（飽和特性）を持つものと仮定し、air gap のある部分は線形とする．いま、コイルに流れる電流  $i$  によって誘起される磁束はコア内にとどまり漏れ磁束はないものと仮定しよう．このような磁気回路の集中定数モデルとしては、通常図 6(b) が考えられる．ここで、 $R_1, R_2$  はそれぞれコア  $N$  および  $L$  の部分に対応した磁気抵抗素子の磁気抵抗 (reluctance) であり、 $f = ni$  は巻線に流れる電流による起磁力 (magnetomotive force) を表わす起磁力源である．図 4.6(b) の磁気回路に、磁気に関するキルヒホフの法則を適用して次式を得る．

$$\begin{aligned}\phi_1 - \phi_2 &= 0 \\ f_1 + f_2 &= f\end{aligned}\tag{6}$$

また、各素子の特性を次式で仮定しよう．

$$f_1 = f(\phi_1), f_2 = R_2\phi_2, f = ni(t)\tag{7}$$

式 (7) を式 (6) に代入して、

$$R_2\phi_1 + f(\phi_1) = ni(t)\tag{8}$$

を  $\phi_1$  について解けば、この磁気回路の状態を決定できる．他方、電気端子  $aa'$  に誘起する電圧は Faraday の法則によって

$$v(t) = n\frac{d\phi}{dt}\tag{9}$$

となる．

この例を見ると磁気回路の解析は、電気回路で抵抗と電圧源のみからなる直流回路と同様にして解くことができることがわかる．この場合のアナロジーは表 6 と考えられる．ここで式 (9) の誘起電圧は、磁気回路と電気回路を合わせて考えてはじめて意味を持つ．このことは電気・磁気結合系を考察する問題となり、2 つの系を結合する場合に結合素子としてどのような新しい素子を導入しなければならないかといった問題を提起している．



表 6: 電気回路と磁気回路の類推 .

	電気回路	磁気回路
素子	抵抗	磁気抵抗
	電圧源	起磁気力源
状態	電流	磁束
	電圧	起磁気力
出力	コイルに誘起される電圧	

## 2.4 電気回路と機械系とのアナロジー

この類推については，表 4.1, 4.2 から対応がわかるであろう．たとえば，バネで吊り下げられた質量  $M$  の質点が平衡の位置から運動する運動方程式は

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Kx = f(t) \quad (10)$$

となる．電圧源を印加した RLC 直列回路の回路方程式は

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = e(t) \quad (11)$$

である．また，この回路に双対な電流源で駆動した GLC 並列回路の回路方程式は

$$C \frac{d^2 \phi}{dt^2} + G \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{L} \phi = j(t) \quad (12)$$

となる．これらの式より，素子間および状態変数間の対応がみえてくる．文献 [5]．なお，文献 [10] では電気系と機械系を結合した結合系の状態方程式を得るため，エネルギー関数が有効に使われている．このことも参考になるであろう．

## 2.5 逆問題とアナログ計算機

ここですこし視点をかえて，方程式が与えられたとき，この方程式を回路で実現する問題を考えてみよう．この問題は，デジタル計算機が普及する以前に使われていたアナログ計算機のプログラムの問題ともいえる．原理的には，電気回路の状態方程式が常微分方程式となることを使う．RC 素子と演算増幅器を組み合わせると，方程式が同じとなる回路を構成することがアナログ計算機のプログラムであった．

【例 4.2】 方程式の図式化：ブロック線図

制御工学で使用されているブロック線図は，方程式を図式化して情報の流れや系の構成上の構造を可視化した線図である．図 7 に示した 4 種類の部品を使って，方程式がブロック線図として描かれる．たとえば式 (13)

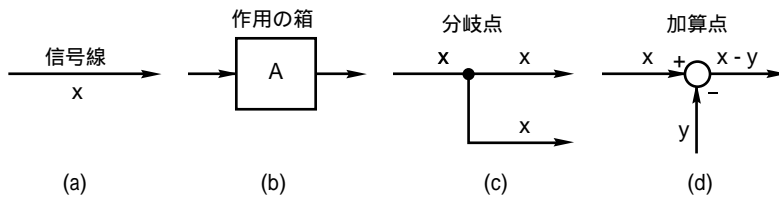


図 7: 情報の流れを表すための部品 (ブロック線図用) .

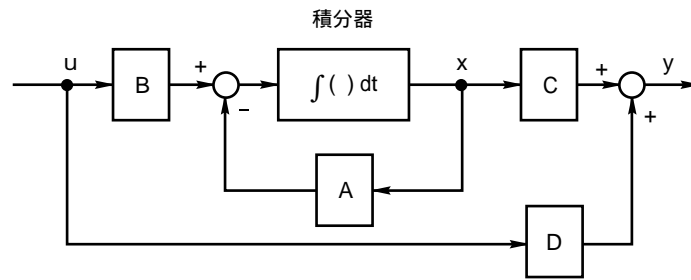


図 8: 式 (13) のブロック線図 .

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu(t) \\ y &= Cx + Du(t) \end{aligned} \quad (13)$$

を描くと図 8 となる . この線図のブロックを回路で置き換えスケールするとほぼアナログ回路が完成する .

van der Pol 方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (14)$$

のブロック線図を図 9 に示した . ここでは , 微分方程式を実現する積分器 , 積をつくる乗算器および加算点のための加算器があれば回路を構成できる .

次に , この考え方をもう少し実際の回路に近づけた構成の例をあげておこう . 演算増幅器を使っ

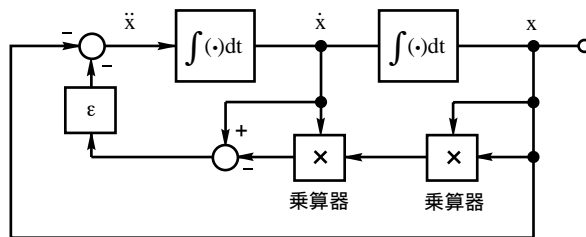


図 9: van der Pol 方程式のブロック線図 .

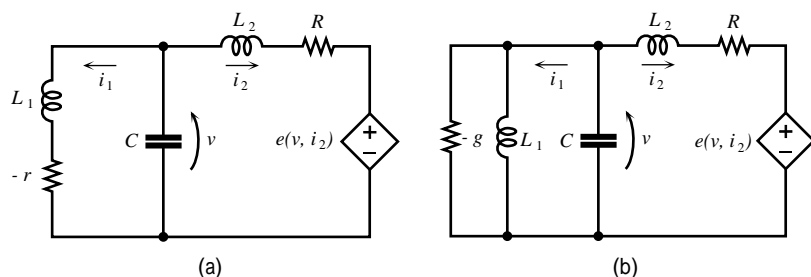


図 10: Rössler 回路 .

たという意味でセミ・アナログ回路とでも言った回路の構成である .

【例 4.3】 Rössler Oscillator を実現する回路

Rössler は幾つかの典型的な方程式を具体的に示してカオス振動を例示した [11] . 次の方程式はリミットサイクルの周期倍分岐列を経てカオス振動「レスラー・バンド」がみられる方程式である .

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + 0.35y \\ \frac{dz}{dt} &= -4.5z + 0.4x + xz \end{aligned} \quad (15)$$

この方程式を電気回路で実現してみよう . このことから得られる利点は , 各方程式やパラメータが意味する物理的性質 , 結合系を構成する際の結合項の入れかた , 強制系とする場合の外力を加える項などを自然に考えることができることにある .

まず図 10(a) のような , 制御電圧源を含んだ回路を考えよう . 電圧源の特性を

$$e(v, i_2) = -\alpha v i_2 \quad (16)$$

と仮定する . なお , 制御電圧源 (16) の実現は , 演算増幅器と乗算器を用いて行なう . この回路の回路方程式は図中の変数を用いて次式となる .

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= -i_1 - i_2 \\ L_1 \frac{di_1}{dt} &= v + r i_1 \\ L_2 \frac{di_2}{dt} &= v - R i_2 + \alpha v i_2 \end{aligned} \quad (17)$$

ここで変数変換

$$x = \sqrt{C}v, \quad y = \sqrt{L_1}i_1, \quad z = \sqrt{L_2}i_2, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}t \quad (18)$$

を行うと式 (17) は次式となる .

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -y - bz \\ \frac{dy}{d\tau} &= x + ay \\ \frac{dz}{d\tau} &= bx - cz + xz \end{aligned} \quad (19)$$

表 7: 非線形現象とそれらがみられる回路の例 .

非線形現象	回路の例	モデル方程式の例	分岐など
自励振動	発振器	van der Pol 方程式	Hopf 分岐
非線形共振	鉄共振回路	Duffing 方程式	接線分岐
パラメータ励振	パラメトロン	Nonlinear Mathieu 方程式	周期倍分岐
同期化現象	結合発振器	Coupled vdP 方程式	Hopf 分岐, 接線分岐

ただし

$$a = r\sqrt{\frac{C}{L_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}, \quad c = \frac{R\sqrt{L_1C}}{L_2}, \quad \alpha = \frac{L_2}{\sqrt{L_1}} \quad (20)$$

とおいた . パラメータ  $b$  のききかたが少し異なる以外は式 (15) となっている . このモデルから式に含まれるパラメータの物理的意味が鮮明になる . 実際 , 式 (19) には式 (15) と同様な非線形現象をみることができる . さらに , 負性抵抗の位置をかえて , より回路として自然な図 10(b) モデルを思い浮かせる . 変数を正規化したこの回路の回路方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= ax - y - bz \\ \frac{dy}{d\tau} &= x \\ \frac{dz}{d\tau} &= bx - cz + xz \end{aligned} \quad (21)$$

となる . この方程式では , 平衡点の個数が変わってしまったにもかかわらず , リミットサイクルの分岐などカオス現象は式 (19) と類似のものがみられる .

## 2.6 広い意味でのアナロジー

保存則 , 減少・増大則などの法則や同期 , 跳躍を伴う共振といった非線形現象などを共通点として類推が行われる場合がしばしばある . たとえば , 自励振動をおこす系といえば , van der Pol 発振器を考えるとといった場合は後者の例といえる .

自律系で振動が起これば平衡点の Hopf 分岐や振動波形から適当なモデル方程式を対応させることになる . また , 非自律系すなわち強制系では , 系の損失が大きいかどうかで共振やカオスのみられる状況が違ってくる . これらを加味して現象をうまく説明できる単純で適切なモデルを考えることは「感」といえるかも知れない . 各分野でどんなルールに従ってアナロジーを考えた例があるのか , 整理していただければおもしろいであろう .

### 【例 4.4】 サーカディアンリズムのモデル

Kronauer は人のサーカディアンリズムのモデルを説明するため睡眠・覚醒のリズムと体温のリズムをそれぞれ 1 つの van der Pol 発振器と考え , 地球の自転による明暗を正弦波電圧源として加えた結合系 :

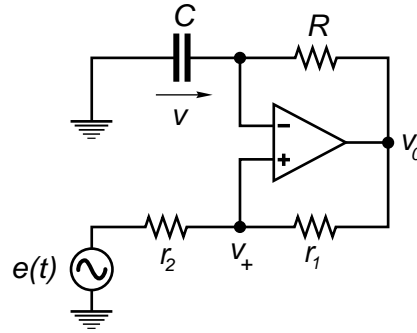


図 11: 強制外力の印加された方形波発振回路 .

$$\begin{aligned} k^2 \frac{d^2 x}{dt^2} - k\mu_x (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + \omega_x^2 x + F_{yx} k \frac{dy}{dt} &= 0 \\ k^2 \frac{d^2 y}{dt^2} - k\mu_y (1 - y^2) \frac{dy}{dt} + \omega_y^2 y + F_{xy} k \frac{dx}{dt} &= F_{zy} \cos(k\omega_z t + \theta_z) \end{aligned} \quad (22)$$

を提案し，数値実験を試みている [12, 13] . これは図 2 に示した結合発振器の解析にほかならない .

一方，Daan 等は，別の振動モデルを提案している [14] . 彼のモデルは等価的に図 11 に示した回路モデルとみなすことができる . 図に示した回路定数を用いて，回路方程式は

$$\begin{aligned} RC \frac{dv}{dt} + v &= v_0 \\ v_0 &= E_0 \operatorname{sgn}(v_+ - v) \\ v_+ &= \alpha e(t) + \beta v_0 \end{aligned} \quad (23)$$

となる . ここに

$$\alpha = \frac{r_1}{r_1 + r_2}, \quad \beta = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \quad (24)$$

である . 今

$$e(t) = B \cos(\nu t + \theta_0) \quad (25)$$

と仮定する . この回路では演算増幅器はコンパレータとして動作するので . 式 (23) は  $v_0 = E_0$  と  $v_0 = -E_0$  の 2 つの場合に分けて考え，これらを貼り合わせた力学系と見ることができる . この簡単な回路モデルにも種々同期やカオスがみられる [15] .

### 3 むすび

集中定数回路の状態方程式の導出法といくつかの回路例を纏まりもなく述べた . 手元にあるワープロ原稿を切り張りして作ったので内容が片寄ったり，くどすぎるところや説明不足のところなど，不満だらけの原稿となってしまった .

公開講座の趣旨にあうかどうか，あまり考えもせず，期日に追われる形で適当に思いつくまま項目を挙げてしまった . この点も問題である . 講義の時点で適宜，補足修正し，もうすこし整理ができたらと考えている . コメントをいただけたら幸いである .

## 4 文献

電気回路の定式化については優れた教科書が多い。

- (1) 小澤孝夫：電気回路 I, II，昭晃堂，昭和 53, 55 年。
- (2) Rohrer, R. A.，斎藤正男，篠崎寿夫共訳：回路理論，学献社，1973。
- (3) 渡部和：線形回路理論，昭晃堂，昭和 46 年。

このノートの内容は

- (3) 小林邦博，川上博：電気回路の過渡現象，産業図書，1991。  
の第 1 章の一部を抜粋して用いた。回路を集中定数系として扱った教科書としては
- (4) 高橋秀俊：線形集中定数系論 I, II, III, IV，岩波講座基礎工学 6，岩波書店，昭和 45 年。
- (5) 高橋秀俊：大学演習 回路，裳華房，昭和 37 年。  
がある。
- (6) R.K. Brayton and J.K. Moser; A theory of nonlinear networks I and II, J. Applied Math., Vol. XXII, No. 1, pp. 1-33, No. 2, pp. 81-104, 1964.
- (7) 吉永哲哉，川上博，吉川研一；水・油界面に生じる化学的非線形振動の回路モデル，電子情報通信学会論文誌 A, Vol. J 71-A, No. 10, pp. 1843-1851, 1988.
- (8) D.L. Jones and F.J. Evans; A classification of physical variables and its application in variational methods, J. Franklin Institute, Vol. 291, pp. 449-467, 1971.
- (9) H.H Woodson, J.R. Melcher, 大越孝敬，二宮敬虔訳：電気力学 I, II, III, 産業図書，昭和 45 年。
- (10) O.E.Rössler; continuous chaos - four prototype equations, in Bifurcation Theory and Applications in Scientific Disciplines, Ann. N.Y. Acad. Sci. Vol 316, pp. 376-392, 1979.
- (11) R.E. Kronauer; Modeling principles for human circadian rhythms, in Mathematical Models of the Circadian Sleep-Wake Cycle, edited by M.C. Moore-Ede and C.A. Czeisler, Raven Press, New York, pp. 105-128, 1984.
- (12) T. Yoshinaga and H. Kawakami; Bifurcations in coupled BVP equations with forcing term, Proc. ISCAS-91, pp. 2697-2700, 1991.
- (13) S. Daan and D. Beersma; Circadian gating of human sleep-wake cycles, ibid., pp. 129-158, 1984.
- (14) K. Kohari, T. Saito and H. Kawakami; Chaos and hysteretic fractals from a hysteresis oscillator with periodic thresholds, Proc. NOLTA 92, IEICE, 1992.