

# 目次

第 I 部	周期運動の対称性	iii
第 1 章	対称性を持つ力学系にみられる周期解の対称性	1
1.1	はじめに	1
1.2	対称性をもつ力学系：定義と構成問題	1
1.3	周期解の対称性：分類と数え上げ問題	2
第 2 章	巡回群 $C_n$ 対称性を持つ力学系の周期解	4
2.1	周期解の対称度と対称型	4
2.2	$C_p$ 対称力学系	5
2.3	$C_6$ 対称力学系	5
第 II 部	巡回行列とブロック形巡回行列	8
第 3 章	巡回行列	9
3.1	はじめに	9
3.2	行列 $P_n$ の固有値問題と固有ベクトル	10
3.3	巡回行列 (3.1) の対角化	13
3.4	巡回行列 (3.1) の直交行列による実行列を用いた対角化	14
3.5	巡回行列の係数の意味	17
3.6	双方向性結合回路の巡回行列	20
3.7	一方向性結合の例	23
3.8	対称結合の場合	24
3.9	符号を個々に指定できる巡回行列	25
第 4 章	ブロック形巡回行列	30
4.1	はじめに	30
4.2	ブロック形巡回行列の対角化：複素対角化	31
4.3	ブロック形巡回行列の対角化：実対角化	33
4.4	$A \otimes B$ 行列の対角化	38

---

第 III 部	環状結合力学系	40
第 5 章	環状結合した線形系	41
5.1	はじめに . . . . .	41
5.2	線形方程式 (5.1) の性質 . . . . .	41
5.3	線形方程式 (5.2) の性質 . . . . .	50
5.4	結合のトポロジー再考 . . . . .	55
5.5	ブロック形巡回行列を係数として持つ線形方程式 . . . . .	57
第 6 章	環状結合したニューロン回路	64
6.1	巨視的ニューロンモデル . . . . .	64
6.2	少数個のニューロンからなるニューロン回路 . . . . .	67
6.3	近傍からの結合による環状ニューロン回路 . . . . .	72
6.4	多重結合した環状ニューロン回路 . . . . .	87
6.5	ねじれ環状結合したニューロン回路 . . . . .	87
6.6	指定した平衡点を持つニューロン回路 . . . . .	87

## 第 I 部

# 周期運動の対称性

# 第 1 章

## 対称性を持つ力学系にみられる周期解の対称性

### 1.1 はじめに

対称性をもつ力学系が与えられたとき、この力学系の周期解を対称性に関して分類する問題を取り上げる。この問題は、これまで部分的に種々の研究があるが、完全に解かれた結果はみたことがない。

ここでは自律系のフローに対して、周期解の対称性の分類問題を考える。すなわち、周期解の対称度、対称型およびこれらの数え上げ問題を考える。

巡回群の対称性を持つ力学系の場合には、周期解の分類問題は完全に解ける。この最も易しい場合はまた、周期解の分類に関して典型的な例を与えている。

### 1.2 対称性をもつ力学系：定義と構成問題

#### 1.2.1 対称性をもつ力学系の定義

力学系：

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in R^n$$

と、有限群  $G$  が与えられたとき、

$$gf(x) = f(gx), \quad \forall x \in R^n, \quad \forall g \in G$$

の性質があれば、この力学系は対称性  $G$  をもつという。

#### 1.2.2 対称性をもつ力学系の構成問題

1. Cayley 図から構成できる。
2. 群  $G$  のセンターを接続行列とする結合系を構成できる。

### 1.3 周期解の対称性：分類と数え上げ問題

力学系がもつ対称性と、この系の周期解がもつ対称性は一般には一致しない。また、一致したとしても周期解に現れる対称性は、空間的な性質と位相差としての時間的な性質の二つの性質が混じった形で現れるので、これらを分類する必要が生じる。

したがって、周期解の分類は、まず対称の度合い（対称度）を決定し、そのあと度合いがおなじ解の対称性の型（タイプ）を考察するとよい。

#### 1.3.1 周期解の対称度

部分群の束の生成

対称性を与える群の部分群<sup>\*1</sup>からなる半順序束（集合の包含関係）をつくる。この半順序束は、ハッセ図（Hasse diagram）として可視化しておくと同感的に分かりやすい。

さて、周期解の対称性の度合いとして、このハッセ図の各部分群を対応させることとしよう。

#### 1.3.2 周期解の対称型

##### 1. 空間型

定在波ともいう。波動の分野の用語にも注意すること。

##### 2. 時間位相差型

周期解の相空間への埋め込み具合により、位相差が異なる解が得られる。

(a) Euler 関数だけの種類の位相差が異なる解を考えること。

進行波、後退波と対応する。

##### 3. 混合型

定在波と進行波の混在した波動：混成波

#### 1.3.3 周期解の対称型の数え上げ

各部分群  $H$  について次の手順により spatio-temporal な対称型を数え上げる。以下、不変集合である閉曲線を  $C$  とし、 $C$  上には平衡点は存在しないとする。すなわち、 $C$  上の流れは周期的とする。

##### 1. Spatial test

$C \subset \text{Fix}(H)$  が可能かどうか調べる。もし、可能ならば  $C$  は  $H$  空間型を 1 つの対称型として許す。

$$gx(t) = x(t), \quad \forall t \in L, \quad g \in H \triangleleft G$$

##### 2. Temporal test

\*1 共役部分群は代表元により 1 つの部分群とみなす。

$H$  が巡回群と同型かどうかを調べる。もし、同型ならば  $C$  は  $H$  時間型を対称型として許す。 $H$  時間型の個数は  $|H|$  である\*2。

いま、周期軌道  $C$  上の周期解  $x(t)$  が  $H$  対称性をもち、これがすべて位相差に寄与する場合を考える。 $\theta = \frac{L}{|H|}$  を位相差の単位として、周期軌道  $C$  上に  $|H|$  個の点を考え、これらの点集合と複素平面内の単位円上の点列

$$\left\{ e^{j \frac{2\pi}{|H|} k} \mid k = 0, \dots, n-1 \right\}$$

との対応を考えると、この写像は同型写像である。この同型写像が何個あるかは、 $H$  と同型の巡回群の性質から容易にわかる。この個数を与える関数を Euler 関数という。

また、この同型写像は、巡回群の指標と対応し、この指標に関する複素既約部分空間での流れが座標間の位相差となって見えてくる。これらの解はいずれも波動解と解釈される。

なお、実既約部分空間とそこでの指標  $\{1, -1\}$  に対応する解は、空間型の定在波であり、それぞれ同相および逆相解となる。

$$gx(t) = x(t - \theta), \quad \forall t \in L, \quad g \in H \triangleleft G$$

### 3. Spatio-temporal test

もし、可能ならば  $C$  は次の  $H$  時空型を対称型として許す。

(a)  $H = \text{Stab}(C)$  を仮定する。

(b)  $H$  の正規部分群をすべて求め、これらを

$$H_{N1}, H_{N2}, \dots, H_{N\ell}$$

とする。

(c)

$$H/H_{Nk} \approx \text{cyclic group}$$

となる正規部分群のみを選び出す。これらが  $p$  個あったものとする、これら選び出された正規部分群を改めて

$$H_{S1}, H_{S2}, \dots, H_{Sp}$$

とおき、時間型の位相を与える巡回群を

$$H_{T1} = H/H_{S1}, H_{T2} = H/H_{S2}, \dots, H_{Tp} = H/H_{Sp}$$

とおく\*3。

(d) 時空型を与える対称型は次の  $p$  個となる。

$$\{H, H_{S1}, H_{T1}\}$$

...

$$\{H, H_{Sp}, H_{Tp}\}$$

\*2 この中には空間型も含まれる。

\*3 具体的に正規部分群かどうかを調べる際に、正規部分群となれば同時に  $H/H_{Nk}$  が巡回群となるかどうか調べ、対称型を決めてゆくといふ。

## 第2章

# 巡回群 $C_n$ 対称性を持つ力学系の周期解

単位力学系が一方環状結合された場合のように，巡回群  $C_n$  対称性を持つ力学系にみられる周期解（周期軌道）のすべての対称型を数え上げる問題を考えよう。

### 2.1 周期解の対称度と対称型

まず，周期軌道  $C$  がどのような対称性を持つかによって， $C$  を分類しよう。

#### 2.1.1 $C_n$ の部分群と周期解の対称度

巡回群  $C_n$  の部分群は  $n$  の約数個だけある。そこで， $C_n$  の約数を

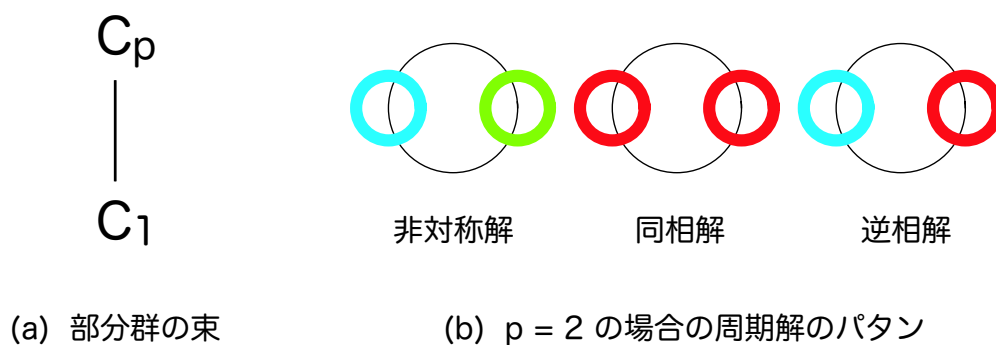
$$1, d_1, d_2, \dots, d_k, n$$

とする。ただし， $1 < d_1 < d_2 < \dots < d_k < n$  と仮定しておく。そうすると， $C_n$  の部分群は， $C_n$  と  $C_1$  を含めて  $k+2$  個

$$C_1, C_{d_1}, C_{d_2}, \dots, C_{d_k}, C_n$$

となるから，これらの各部分群を対称性を表す群としてもつ周期解に分類できる。すなわち，

1.  $C_n$  対称性を持つ周期解。この周期解は，回路の対称性  $C_n$  がすべて反映されている。したがって，周期軌道  $C$  の巡回群  $C_n$  による軌道は，集合  $C$  そのものとなる。なお，この対称性を持つ周期解は，時間型，空間型にさらに分類できる。この分類によるパタンの異なる周期解の個数は，ちょうど  $n$  個である。このことについては，次の小節で検討する。
2.  $C_m$ ,  $m = d_1, d_2, \dots, d_k$  対称性を持つ周期解。この周期解  $C$  があると， $n/m$  個の別の周期解が存在する。この対称性を持つ周期解は，時間型，空間型にさらに分類できる。
3.  $C_1$  対称性を持つ周期解。この周期解  $C$  は，対称性のない周期解である。群軌道を求めると全部で  $n$  個の周期解が見つかる。

図 2.1 部分群の束 (a) と  $p = 2$  の場合の周期解パターン.

### 2.1.2 $C_m$ 対称性を持つ周期解の対称型

$C_m$  対称性を持つ周期解  $C$  の対称型を考えよう。対称性  $C_m$  が、時間位相差に使われるか、空間対称性に使われるかによって、周期解のパターンを分類し数え上げることができる。これを実行しよう。

周期軌道を相空間にどう配置するかによって時間位相差解の概念が生まれる。周期解は周期軌道上を一方方向に流れることに注意しよう。

Hopf 分岐した平衡点の近傍で、線形化して考えると離散 Fourier 変換と関係してくる。

## 2.2 $C_p$ 対称力学系

$p$  を素数とし、最も単純な場合として、 $C_p$  対称力学系の例を考えよう。

巡回群  $C_p$  のハッセ図は、図 2.1 (a) である。

その他の例を図 2.2 に示した。

## 2.3 $C_6$ 対称力学系



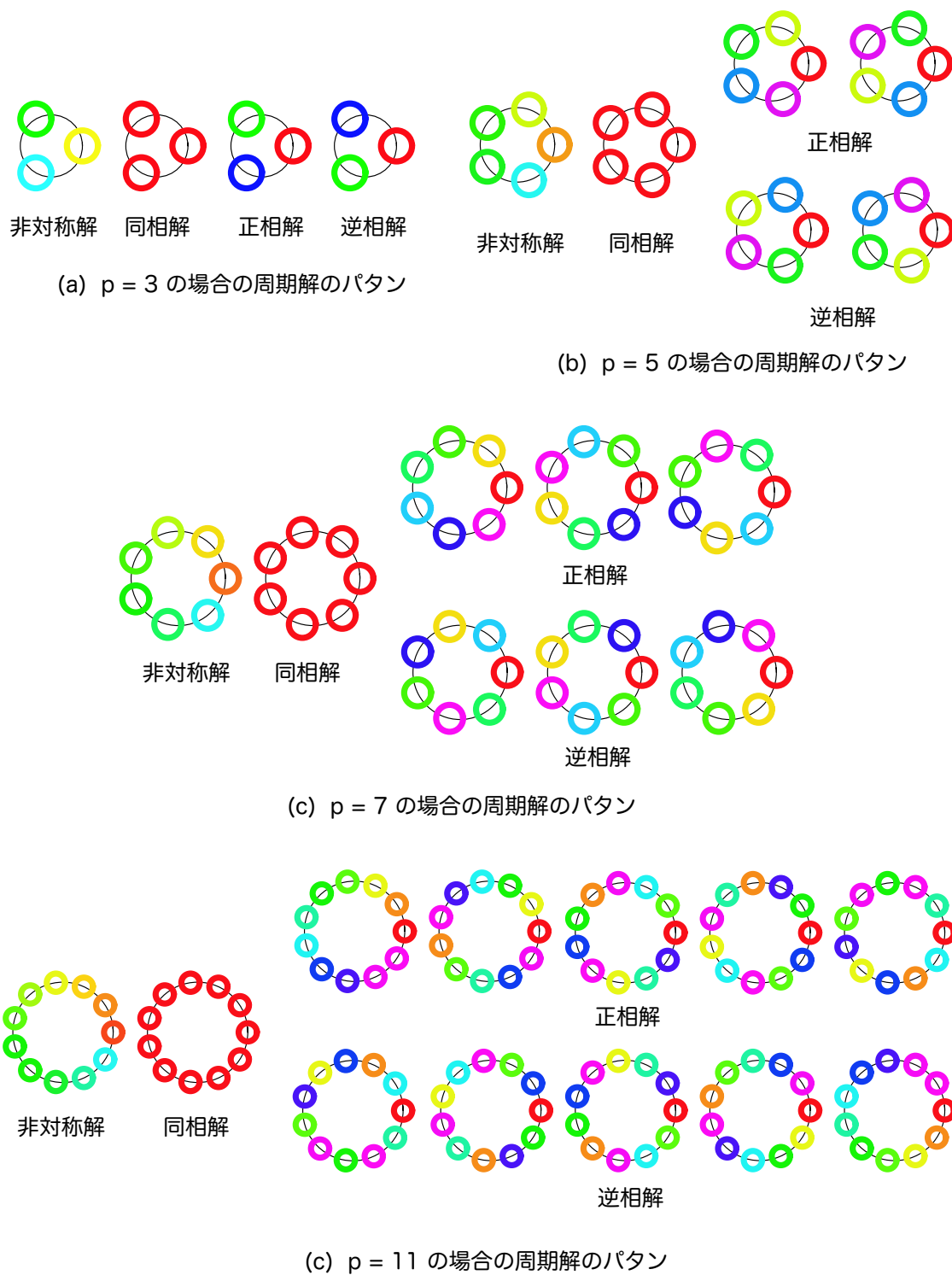


図 2.2  $C_p$  の場合の周期解パターンの例.

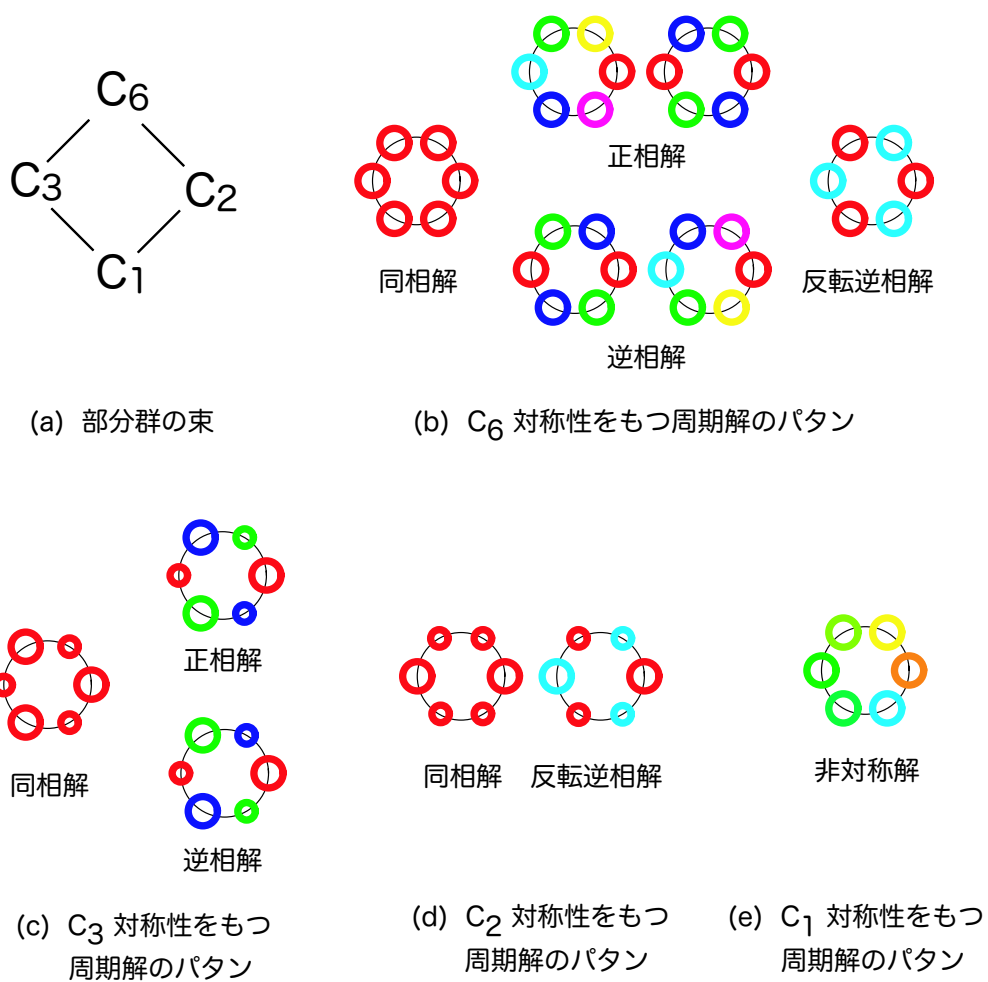


図 2.3  $C_6$  の場合の周期解パターン.

## 第II部

# 巡回行列とブロック形巡回行列

## 第3章

# 巡回行列

### 3.1 はじめに

次の形の行列を巡回行列 (circulant) という.

$$C = (c_{ij}) = (c_{j-i}) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & c_0 & c_1 \\ c_1 & \cdots & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}, \quad j - i \pmod n \quad (3.1)$$

この行列は、環状に結合した回路の解析において結合部分を表す行列として現れる。以下、この行列をユニタリ行列で対角化することと、直交行列でブロック対角化する具体的な計算を示そう。

1 の  $n$  乗根, すなわち

$$\lambda^n - 1 = 0 \quad (3.2)$$

の根を

$$1, a, a^2, \dots, a^{n-1} \quad (3.3)$$

とする。ここに

$$a = e^{j\frac{2\pi}{n}} \quad (3.4)$$

を表す。明らかに

$$\begin{aligned} 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} &= 0 \\ a^n &= 1 \\ \bar{a}^k &= a^{-k} = a^{n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

である。

次の巡回行列を定義しておこう.

$$P_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$P_n^n = I_n \quad (3.7)$$

の性質がある. この行列を用いると, 巡回行列式 (3.1) は次式で表すことができる.

$$C = c_0 I_n + c_1 P_n + c_2 P_n^2 + \cdots + c_{n-1} P_n^{n-1} = f(P_n) \quad (3.8)$$

## 3.2 行列 $P_n$ の固有値問題と固有ベクトル

$P_n$  の固有値を  $\lambda$  とすれば  $P_n^n - I_n = 0$  の固有値は,  $\lambda^n - 1$  となり, これは 0 であるから,  $\lambda$  は

$$\lambda^n - 1 = 0 \quad (3.9)$$

の根となる. すなわち

$$\lambda = 1, a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1} \quad (3.10)$$

が固有値となる.

次に, 各固有値に対する固有ベクトルを求めよう. まず,  $\lambda = 1$  の場合を考える.

$$(P_n - I_n) h_0 = 0 \quad (3.11)$$

すなわち

$$(P_n - I_n) h_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ & & & 1 \\ 1 & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = 0 \quad (3.12)$$

より,

$$h_1 = h_2 = \cdots = h_n \quad (3.13)$$

を得る. 固有ベクトルの長さを 1 に正規化して次の固有ベクトルを得る.

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

次に,  $\lambda = a$  の場合を考えよう. 上と同様な手順によって

$$(P_n - aI_n)h_1 = \begin{bmatrix} -a & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & & & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = 0 \quad (3.15)$$

から, 次の固有ベクトルが求められる.

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ \vdots \\ a^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

以下, 同様にして残りの固有ベクトルを計算すると次のベクトルを得る.

$$h_2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a^4 \\ \vdots \\ a^{2(n-1)} \end{bmatrix}, \quad h_3 = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ a^3 \\ a^6 \\ \vdots \\ a^{3(n-1)} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad h_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ a^{n-1} \\ a^{2(n-1)} \\ \vdots \\ a^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

これらのベクトルを用いて, 次の  $n \times n$  ユニタリ行列を作る.

$$H_n = \frac{1}{\sqrt{n}} [h_0 \quad h_1 \quad \dots \quad h_{n-1}] = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 1 & a^2 & a^4 & & a^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a^{n-1} & a^{2(n-1)} & \dots & a^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

すると, 次の関係を得る.

$$P_n H_n = H_n \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & a & & & \\ & & a^2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a^{n-1} \end{bmatrix} = H_n \text{diag} [1 \quad a \quad a^2 \quad \dots \quad a^{n-1}] = H_n \Lambda_1 \quad (3.19)$$

同様にして

$$P_n^k H_n = H_n \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & a^k & & & \\ & & a^{2k} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a^{k(n-1)} \end{bmatrix} = H_n \Lambda_k, \quad k = 2, 3, \dots, n-1 \quad (3.20)$$

が求められる。

ここで  $H_n$  行列の行または列の直交性について検討しておこう。

$$H_n = (h_{ij}), \quad h_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}} a^{(i-1)(j-1)}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.21)$$

である。そこで

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \bar{h}_{ki} h_{kj} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{a}^{(k-1)(i-1)} a^{(k-1)(j-1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a^{-(k-1)(i-1)} a^{(k-1)(j-1)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a^{-(k-1)(i-1)} a^{(k-1)(j-1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a^{(k-1)(j-i)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a^{k(j-i)} \\ &= \begin{cases} 1 & (\text{for } i = j) \\ \frac{1}{n} \frac{1 - a^{n(j-i)}}{1 - a^{(j-i)}} = 0 & (\text{for } i \neq j) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.22)$$

したがって、次の公式を得る。

$$1 + a^{(j-i)} + a^{2(j-i)} + \dots + a^{(n-1)(j-i)} = \begin{cases} n & (\text{for } i = j) \\ 0 & (\text{for } i \neq j) \end{cases} \quad (3.23)$$

いま,

$$\theta = \frac{2\pi}{n}, \quad \sin(k\theta) = s(k\theta), \quad \cos(k\theta) = c(k\theta) \quad (3.24)$$

と略記することになると、式 (3.23) の実部と虚部から次の公式が導かれる。

$$\begin{aligned} 1 + c\{(j-i)\theta\} + c\{2(j-i)\theta\} + \dots + c\{(n-1)(j-i)\theta\} &= \begin{cases} n & (\text{for } i = j) \\ 0 & (\text{for } i \neq j) \end{cases} \\ s\{(j-i)\theta\} + s\{2(j-i)\theta\} + \dots + s\{(n-1)(j-i)\theta\} &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

### 3.3 巡回行列 (3.1) の対角化

巡回行列 (3.1) を対角化する問題を考えよう. 式 (3.8) と式 (3.19), (3.20) を用いて次式を得る.

$$\begin{aligned}
 CH_n &= c_0 H_n + c_1 P_n H_n + c_2 P_n^2 H_n + \cdots + c_{n-1} P_n^{n-1} H_n \\
 &= H_n c_0 I_n + H_n c_1 \Lambda_1 + H_n c_2 \Lambda_2 + \cdots + H_n c_{n-1} \Lambda_{n-1} \\
 &= H_n (c_0 I_n + c_1 \Lambda_1 + c_2 \Lambda_2 + \cdots + c_{n-1} \Lambda_{n-1}) \\
 &= H_n \Lambda
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

ここに

$$\Lambda = \text{diag} \left[ f(1) \quad f(a) \quad f(a^2) \quad \cdots \quad f(a^{n-1}) \right] \tag{3.27}$$

とおいた. もちろん

$$\begin{aligned}
 f(1) &= c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} \\
 f(a) &= c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \cdots + c_{n-1} a^{n-1} \\
 f(a^2) &= c_0 + c_1 a^2 + c_2 a^4 + \cdots + c_{n-1} a^{2(n-1)} \\
 &\quad \dots \\
 f(a^{n-1}) &= c_0 + c_1 a^{n-1} + c_2 a^{2(n-1)} + \cdots + c_{n-1} a^{(n-1)^2}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

を表す.

【例 1】一方向性結合 (3 次元) の場合

$$C = \begin{bmatrix} \alpha - \delta & 0 & -\delta \\ -\delta & \alpha - \delta & 0 \\ 0 & -\delta & \alpha - \delta \end{bmatrix} = (\alpha - \delta) I_3 - \delta P_3^2 \tag{3.29}$$

を考えよう. この場合

$$c_0 = \alpha - \delta, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = -\delta \tag{3.30}$$

となっている. したがって

$$H_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}, \quad a = e^{j\frac{2\pi}{3}} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
 f(1) &= \alpha - \delta - \delta = \alpha - 2\delta \\
 f(a) &= \alpha - \delta - \delta a^2 = \alpha - \delta(1 + a^2) \\
 f(a^2) &= \alpha - \delta - \delta a = \alpha - \delta(1 + a)
 \end{aligned} \tag{3.32}$$



を用いて

$$CH_3 = H_3 \begin{bmatrix} \alpha - 2\delta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \delta(1 + a^2) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - \delta(1 + a) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

を得る.

### 3.4 巡回行列 (3.1) の直交行列による実行列を用いた対角化

前節で求めた複素行列 (ユニタリー行列) による対角化を実行列 (直交行列) によって対角化 (2 × 2 のブロック対角化) しておこう.

まず, 実行列  $A$  が複素固有値を持つ場合の実行列による対角化についてみておこう. いま,

$$\lambda = \sigma + j\nu \quad (3.34)$$

が  $A$  の固有値であるとし, その固有ベクトルが

$$h = h_R + jh_I \quad (3.35)$$

であるとしよう. すなわち

$$Ah = \lambda h, \quad A\bar{h} = \bar{\lambda}\bar{h} \quad (3.36)$$

とする. この関係式より, 実部と虚部をそれぞれ求めると次式が得られる.

$$Ah = A(h_R + jh_I) = (h_R + jh_I)(\sigma + j\nu) = (\sigma h_R - \nu h_I) + j(\sigma h_I + \nu h_R) \quad (3.37)$$

この関係式より

$$\begin{aligned} Ah_R &= \sigma h_R - \nu h_I \\ Ah_I &= \sigma h_I + \nu h_R \end{aligned} \quad (3.38)$$

したがって

$$A \begin{bmatrix} h_R & h_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_R & h_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & \nu \\ -\nu & \sigma \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

となって, 2 × 2 のブロックに対角化できることが分かる. ただし, 複素固有ベクトルが正規化されていても, 式 (3.39) の 2 つのベクトルは正規化されていないので, 改めて長さを 1 に規格化しなければならない. すなわち

$$h_r = \frac{1}{\sqrt{h_R^T h_R}} h_R, \quad h_i = \frac{1}{\sqrt{h_I^T h_I}} h_I \quad (3.40)$$

とすればよい.

さて,

$$\begin{aligned}
 P_n h_1 &= a h_1, \quad a = c(\theta) + j s(\theta), \\
 h_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ \vdots \\ a^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ c(\theta) \\ c(2\theta) \\ \vdots \\ c((n-1)\theta) \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 \\ s(\theta) \\ s(2\theta) \\ \vdots \\ s((n-1)\theta) \end{bmatrix} = c_1 + j s_1
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

とおくと, 上の結果を用いて

$$P_n \begin{bmatrix} c_1 & s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(\theta) & s(\theta) \\ -s(\theta) & c(\theta) \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

を得る. ここで2つのベクトルを正規化しよう.

$$\begin{aligned}
 c_1^T c_1 &= 1 + c^2(\theta) + c^2(2\theta) + \cdots + c^2((n-1)\theta) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \{ (1 + c(2\theta)) + (1 + c(4\theta)) + \cdots + (1 + c(2(n-1)\theta)) \} \\
 &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \{ 1 + c(2\theta) + c(4\theta) + \cdots + c(2(n-1)\theta) \} = \frac{n}{2} \\
 s_1^T s_1 &= 1 + s^2(\theta) + s^2(2\theta) + \cdots + s^2((n-1)\theta) \\
 &= \frac{1}{2} \{ (1 - c(2\theta)) + (1 - c(4\theta)) + \cdots + (1 - c(2(n-1)\theta)) \} \\
 &= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \{ 1 + c(2\theta) + c(4\theta) + \cdots + c(2(n-1)\theta) \} = \frac{n}{2}
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

となる. したがって, 改めて

$$c_1 = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ c(\theta) \\ c(2\theta) \\ \vdots \\ c((n-1)\theta) \end{bmatrix}, \quad s_1 = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} 0 \\ s(\theta) \\ s(2\theta) \\ \vdots \\ s((n-1)\theta) \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

を定義すると, 正規化されたブロック対角化

$$P_n \begin{bmatrix} c_1 & s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(\theta) & s(\theta) \\ -s(\theta) & c(\theta) \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

を得る.

(1)  $n$  が奇数のとき

$n = 2\ell + 1$  とすると

$$c_0 = \sqrt{\frac{1}{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_k = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ c(k\theta) \\ c(2k\theta) \\ \vdots \\ c((n-1)k\theta) \end{bmatrix}, \quad s_k = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} 0 \\ s(k\theta) \\ s(2k\theta) \\ \vdots \\ s((n-1)k\theta) \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

$(k = 1, 2, \dots, \ell)$

となつて

$$P_n \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & s_1 & \cdots & c_\ell & s_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & s_1 & \cdots & c_\ell & s_\ell \end{bmatrix} \Lambda \quad (3.47)$$

を得る. ここに

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & c(\theta) & s(\theta) & & & & & & \\ & -s(\theta) & c(\theta) & & & & & & \\ & & & c(2\theta) & s(2\theta) & & & & \\ & & & -s(2\theta) & c(2\theta) & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & c(\ell\theta) & s(\ell\theta) & \\ 0 & & & & & & -s(\ell\theta) & c(\ell\theta) \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

とおいた.

(2)  $n$  が偶数のとき

$n = 2\ell + 2$  とすると

$$c_0 = \sqrt{\frac{1}{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_{\ell+1} = \sqrt{\frac{1}{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

$$c_k = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ c(k\theta) \\ c(2k\theta) \\ \vdots \\ c((n-1)k\theta) \end{bmatrix}, \quad s_k = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} 0 \\ s(k\theta) \\ s(2k\theta) \\ \vdots \\ s((n-1)k\theta) \end{bmatrix}, \quad (k = 1, 2, \dots, \ell)$$

となって

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & c(\theta) & s(\theta) & & & \\ & -s(\theta) & c(\theta) & & & \\ & & & c(2\theta) & s(2\theta) & \\ & & & -s(2\theta) & c(2\theta) & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & c(\ell\theta) & s(\ell\theta) \\ & & & & & -s(\ell\theta) & c(\ell\theta) \\ 0 & & & & & & & -1 \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

となる.

以上の結果から, 最初に考えた巡回行列  $C$  に関しては, 前節の結果を考え合わせて, 容易にブロック対角化が可能となる.

【例 2】一方向性結合 (3 次元) の場合

例 1 で考えた例を考えよう.

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ c(2\pi/3) \\ c(4\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2/3} \\ -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \tag{3.51} \\
 s_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ s(2\pi/3) \\ s(4\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

したがって, ブロック対角化された行列は次式となる.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(2\pi/3) & s(2\pi/3) \\ 0 & -s(2\pi/3) & c(2\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

### 3.5 巡回行列の係数の意味

巡回行列 (3.1) は  $n$  個の要素を持っている. これらの要素は, 式 (3.8) の展開:

$$C = c_0 I_n + c_1 P_n + c_2 P_n^2 + \dots + c_{n-1} P_n^{n-1} = f(P_n) \tag{3.53}$$

で各項の係数となっている. すなわち,

$$I_n, P_n, \dots, P_n^{n-1}$$

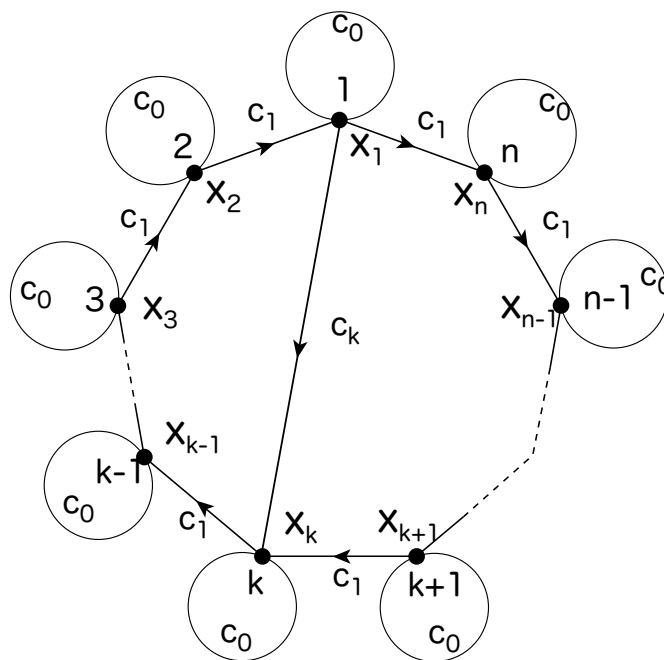


図 3.1 巡回行列の展開係数の関係図.

を基底とする  $n$  次元ベクトル空間とみることができる。そこで、これらの係数の意味を考えてみよう。

いま、 $n$  個の節点を正  $n$  角形の各頂点に配置した有向グラフ<sup>\*1</sup>を描いて考えると分かりやすい。各節点に番号を付けて、それぞれの節点に状態（あるいは信号）

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

を対応させたシグナルフローグラフに似た図 3.1 を考える。

状態  $x_1$  が状態  $x_k$  に、その向きに一方的に影響を及ぼしている場合を例にとりて考えよう。この場合、節点 1 から節点  $k$  に、この向きに矢印のついた枝を付けることにする。これを、距離が  $k-1$  の影響と呼ぶことにする。実は、系の対称な性質から、すべての節点について距離  $k-1$  の枝を同時に付け加えることにする。以下同様にして、1 つ枝を加えて状態の関係をつくるということは、すべての状態について同じ距離の枝を付け加えることを意味しているものと仮定しよう。図 3.1 では自分自身への枝と、右隣へ距離 1 の枝を付け加えた図が示されている。すなわち、各状態は、自分自身と右隣へ影

<sup>\*1</sup> Cayley 図と比較してみるとよい。

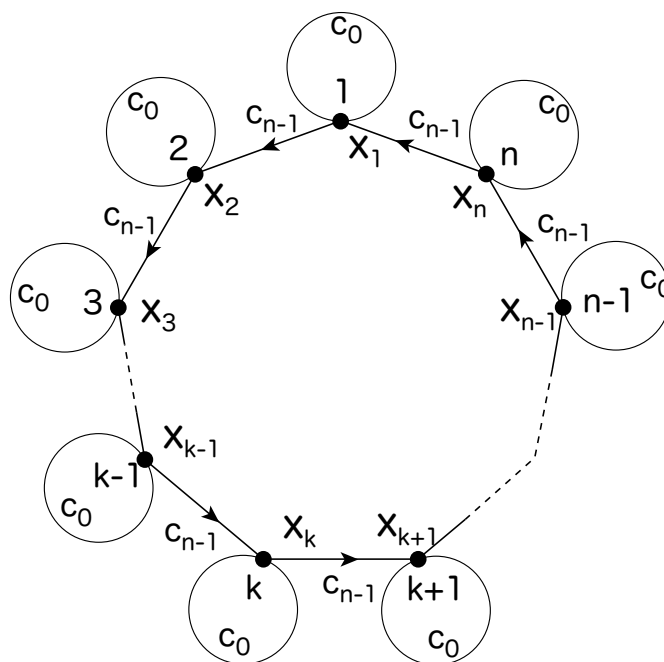


図 3.2 左隣への影響と係数の関係.

響を及ぼしている状況を表している. この様子を節点に関する接続行列で示すと次の行列となる.

$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & & & \\ & c_0 & c_1 & & \\ & & c_0 & \ddots & \\ & & & \ddots & c_1 \\ c_1 & & & & c_0 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{3.54}$$

逆に, 左隣へ影響を及ぼす場合には接続行列は

$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} c_0 & & & & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & & & \\ & c_{n-1} & c_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{3.55}$$

となる. 図 3.2 参照.

この例から直ちに次のことが分かる. 巡回行列 (3.8) の係数は次表 3.1 の意味を持っている.

表 3.1 巡回行列 (3.8) の係数の意味.

係数	影響する距離	影響先
$c_0$	0	自分自身
$c_1$	1	1 つ右隣
$c_2$	2	2 つ右隣
	...	
$c_{n-1}$	$n-1$	$n-1$ 右隣 (実は左隣)

### 3.6 双方向性結合回路の巡回行列

以上のことから、結合の状況は巡回行列に反映され、それはこの行列を対角化した場合のブロックの性質に反映されることとなる。この様子を見てみよう。

(1) 距離 1 で両隣へ結合している場合

$$C = c_0 I_n + c_1 P_n + c_{n-1} P_n^{n-1} = f(P_n) \quad (3.56)$$

となる。そこで結合が対称（両隣への影響が同じ）とすると

$$c_1 = c_{n-1} = c \quad (3.57)$$

であるから、式 (3.56) は

$$C = c_0 I_n + c(P_n + P_n^{n-1}) = c_0 I_n + c(P_n + P_n^{-1}) \quad (3.58)$$

すなわち

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c & 0 & \cdots & 0 & c \\ c & c_0 & c & \ddots & & 0 \\ 0 & c & c_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c & 0 \\ 0 & & \ddots & c & c_0 & c \\ c & 0 & \cdots & 0 & c & c_0 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

となる。したがって、固有値は

$$\begin{aligned}
 f(1) &= c_0 + 2c \\
 f(a) &= c_0 + c(a + a^{-1}) = c_0 + 2c \cos(\theta) \\
 f(a^2) &= c_0 + c(a^2 + a^{-2}) = c_0 + 2c \cos(2\theta) \\
 &\dots \\
 f(a^{n-1}) &= c_0 + c(a^{-1} + a) = c_0 + 2c \cos(\theta)
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

このことから、2 個ずつ固有値が重複して現れることが分かる。

行列 (3.58) を実対角化すると、次の形となる。

$n$  が奇数:  $n = 2\ell + 1$  の場合

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= \text{diag} \left[ c_0 + 2c, \begin{bmatrix} c_0 + 2c \cos(\theta) & 0 \\ 0 & c_0 + 2c \cos(\theta) \end{bmatrix}, \right. \\
 &\quad \dots, \left. \begin{bmatrix} c_0 + 2c \cos(\ell\theta) & 0 \\ 0 & c_0 + 2c \cos(\ell\theta) \end{bmatrix} \right]
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

$n$  が偶数:  $n = 2\ell + 2$  の場合

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= \text{diag} \left[ c_0 + 2c, \begin{bmatrix} c_0 + 2c \cos(\theta) & 0 \\ 0 & c_0 + 2c \cos(\theta) \end{bmatrix}, \right. \\
 &\quad \dots, \left. \begin{bmatrix} c_0 + 2c \cos(\ell\theta) & 0 \\ 0 & c_0 + 2c \cos(\ell\theta) \end{bmatrix}, c_0 - 2c \right]
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

(2) 距離 2 で両隣へ結合している場合

巡回行列は次の形となる。

$$\begin{aligned}
 C &= c_0 I_n + c_1 (P_n + P_n^{n-1}) + c_2 (P_n^2 + P_n^{n-2}) = f(P_n) \\
 &= c_0 I_n + c_1 (P_n + P_n^{-1}) + c_2 (P_n^2 + P_n^{-2})
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

これより、固有値やその退化の様子を上の場合と同様にして調べることができる。

いずれの場合も、固有値は実数となるのでこれらを図示しておこう。図 3.3 参照。図中、色彩 (Hue) 値の違う小円盤が固有値を表している。図 (a), (b) の曲線は、それぞれ

$$\begin{aligned}
 c(s) &= c_0 + 2c \cos 2\pi s, \quad 0 \leq s \leq 1 \\
 c(s) &= c_0 + 2c_1 \cos 2\pi s + 2c_2 \cos 4\pi s, \quad 0 \leq s \leq 1
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

を表している。

なお、色彩値 Hue の値は、 $0 \leq \text{Hue} \leq 1$  であり、図 3.4 に示した色となっている。



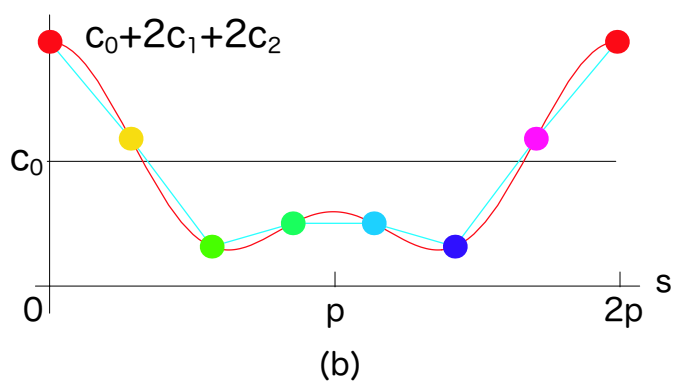
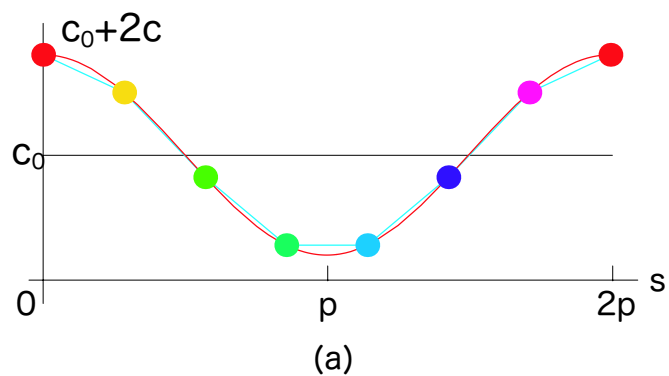


図 3.3 双方向結合の固有値. (a) 式 (3.61) の場合. (b) 式 (3.63) の場合.

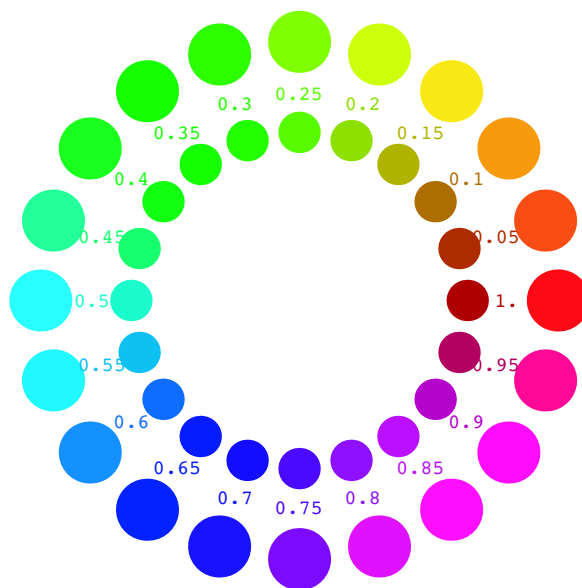


図 3.4 色彩 Hue の値と対応する色.

### 3.7 一方向性結合の例

距離 1 の場合は

$$\begin{aligned} C &= c_0 I_n + c_1 P_n \\ C &= c_0 I_n + c_{n-1} P_n^{n-1} \end{aligned} \quad (3.65)$$

となる。先にあげた例 1, 2 はこの 1 例となっている。

また、一方向ということから、距離 1 の結合でも左右の結合の度合いが異なると係数がちがってくるので

$$C = c_0 I_n + c_1 P_n + c_{n-1} P_n^{n-1}, \quad c_1 \neq c_{n-1} \quad (3.66)$$

の場合も考えられる。

距離 1 の結合と距離 2 の結合を組み合わせると

#### (1) 右にばかり 2 つ隣まで結合

$$C = c_0 I_n + c_1 P_n + c_2 P_n^2 \quad (3.67)$$

#### (2) 左にばかり 2 つ隣まで結合

$$C = c_0 I_n + c_{n-2} P_n^{n-2} + c_{n-1} P_n^{n-1} \quad (3.68)$$

#### (3) 右に距離 1 左に距離 2 影響する場合

$$C = c_0 I_n + c_1 P_n + c_{n-2} P_n^{n-2} \quad (3.69)$$

#### (4) 左に距離 1 右に距離 2 影響する場合

$$C = c_0 I_n + c_2 P_n^2 + c_{n-1} P_n^{n-1} \quad (3.70)$$

いずれの場合についても、力学系に応用した場合を考えると、対角化した各  $2 \times 2$  ブロックにおける非対角要素の交代部分が零とならないため、Hopf 分岐による振動を発生させ、進行波解をつくれる可能性を持っている。これは、双方向性結合と大きく異なる性質といえる。

行列 (3.65) と行列 (3.67) の固有値の分布の一例を図 3.5 に示した。図中の曲線は、

$$\begin{aligned} c(s) &= c_0 + c_1 e^{j2\pi s}, \quad 0 \leq s \leq 1 \\ c(s) &= c_0 + c_1 e^{j2\pi s} + c_2 e^{j4\pi s}, \quad 0 \leq s \leq 1 \end{aligned} \quad (3.71)$$

を表している。 $n$  の大きさにかかわらず、これらの行列の固有値は係数  $c_0, c_1, c_2$  で定まるこれらの曲線の上に分布することに注意しよう。このことから、行列のサイズに無関係に固有値の分布を評価できる。このことについては、第 5 章の線形微分方程式の解析の際に詳しく検討する。

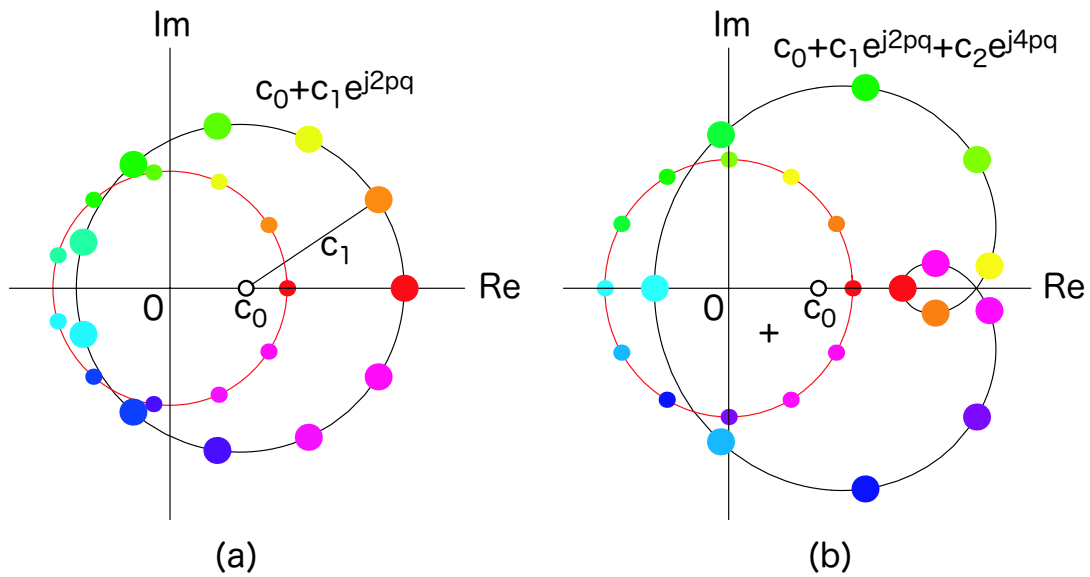


図 3.5 一方向性結合の固有値. (a) 式 (3.65) の場合. (b) 式 (3.67) の場合.

### 3.8 対称結合の場合

最後にすべての係数が等しい場合をあげておく.

$$C = c_0 I_n + c (P_n + P_n^2 + \dots + P_n^{n-2} + P_n^{n-1}) \tag{3.72}$$

この場合は、すべての状態が両方向に等しく影響しあった場合である。これは対称群の表現行列と考えられ、固有値についても退化がおこる。すなわち、

$$\begin{aligned} f(1) &= c_0 + (n-1)c \\ f(a^k) &= c_0 + c \sum_{\ell=1}^{n-1} a^{k\ell} = c_0 - c, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \tag{3.73}$$

ここで、式 (3.23) を使って

$$\sum_{\ell=1}^{n-1} a^{k\ell} = -1, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \tag{3.74}$$

の関係を用いた。したがって、この場合は式 (3.73) の第 2 式の固有値は  $(n-1)$  重に重複している。

## 3.9 符号を個々に指定できる巡回行列

$\sigma_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  を  $\sigma_k = 1$  または  $\sigma_k = -1$  のように符号を表す  $n$  個の数とし,

$$\begin{aligned}
 Q_n &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_2 & & & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \sigma_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \sigma_n \\ \sigma_1 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix} = P_n S_n
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

とする。ここに、 $S_n$  は対角行列

$$S_n = \text{diag} [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \cdots \quad \sigma_n] \tag{3.76}$$

を表す。この行列の固有値問題を考えよう。

特性方程式は、次式となる.

$$\begin{aligned}
 \chi(\mu) &= |-\mu I_n - Q_n| = \begin{vmatrix} -\mu & \sigma_2 & & & \\ & -\mu & \sigma_3 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -\mu & \sigma_n \\ \sigma_1 & & & & -\mu \end{vmatrix} \\
 &= -\mu \begin{vmatrix} -\mu & \sigma_3 & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_n & \\ & & & -\mu \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \sigma_1 \begin{vmatrix} \sigma_2 & & & \\ -\mu & \sigma_3 & & \\ & \ddots & & \\ & & & -\mu & \sigma_n \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^n \left[ \mu^n - \prod_{k=1}^n \sigma_k \right] = 0
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

今,

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \prod_{k=1}^n \sigma_k \\
 s_\ell &= \prod_{k=2}^{\ell} \sigma_k, \quad \ell = 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

とおくと、式 (3.77) は

$$(-1)^n \chi(\mu) = \mu^n - \sigma = 0 \tag{3.79}$$

となる.  $\sigma$  の符号に従って  $\sigma = 1$  の場合と,  $\sigma = -1$  の場合の二つの場合に分けて考えよう.

### 3.9.1 $\sigma = 1$ の場合

式 (3.79) より, 特性根は 1 の  $n$  乗根そのものである. すなわち,

$$1, a, a^2, \dots, a^{n-1} \tag{3.80}$$

とする. ここに

$$a = e^{j\frac{2\pi}{n}} \tag{3.81}$$

を表す.

そこで、 $k$  番目の根  $a^{k-1}$  に対する固有ベクトルの方程式は、

$$\begin{bmatrix} -a^{k-1} & \sigma_2 & & & \\ & -a^{k-1} & \sigma_3 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -a^{k-1} & \sigma_n \\ \sigma_1 & & & & -a^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{bmatrix} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.82)$$

となる。各成分について、 $\sigma_k$  を掛けて右辺と左辺を入れ替えて書くと次式となる。

$$\begin{aligned} h_2 &= a^{k-1} \sigma_2 h_1 \\ h_3 &= a^{k-1} \sigma_3 h_2 \\ &\dots \\ h_n &= a^{k-1} \sigma_n h_{n-1} \\ h_1 &= a^{k-1} \sigma_1 h_n \end{aligned} \quad (3.83)$$

そこで、 $h_1 = 1$  とおいて、上の式から整理すると次式となる。

$$h_1 = 1, \quad h_2 = a^{k-1} s_2, \quad h_3 = a^{2(k-1)} s_3, \quad \dots, \quad h_n = a^{(n-1)(k-1)} s_n \quad (3.84)$$

そこで、正規化した固有ベクトルは次式となる。

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ a^{k-1} s_2 \\ a^{2(k-1)} s_3 \\ \vdots \\ a^{(n-1)(k-1)} s_n \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.85)$$

式 (3.83) の最後の式は

$$h_1 = a^{k-1} a^{(n-1)(k-1)} s_n \sigma_1 = a^{n(k-1)} \sigma = 1$$

となって、矛盾しないことに注意しよう。

式 (3.85) を用いて、次のユニタリ行列を作る。

$$H_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ s_2 & a s_2 & & a^{n-1} s_2 \\ s_3 & a^2 s_3 & \dots & a^{2(n-1)} s_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_n & a^{n-1} s_n & & a^{(n-1)^2} s_n \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

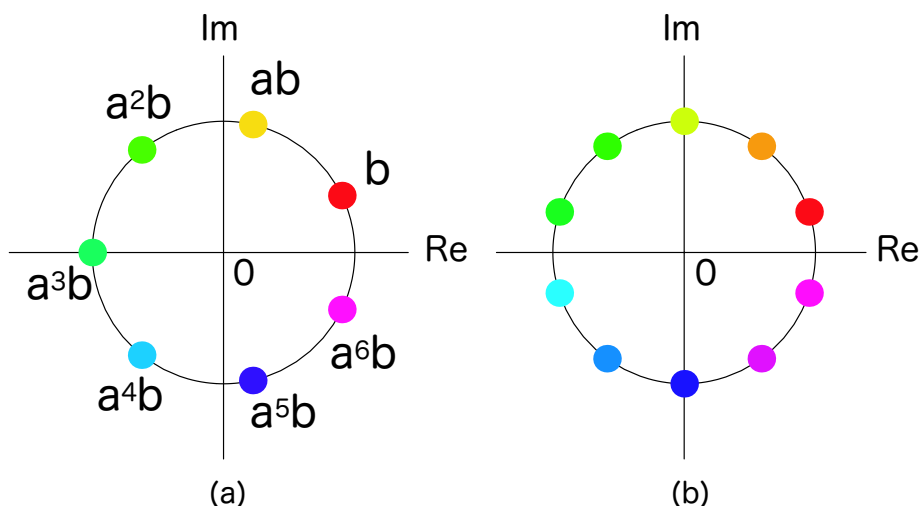


図 3.6 式 (3.89) の固有値の分布. (a)  $n = 7$  の場合. (b)  $n = 10$  の場合.

このユニタリ行列を用いて、式 (3.75) は次式のように対角化できる.

$$H_n^{-1}Q_nH_n = \Lambda = \text{diag} [1 \quad a \quad a^2 \quad \dots \quad a^{n-1}] \tag{3.87}$$

$k$  番目の固有値  $a^{k-1}$  に対する固有ベクトル (3.85) の  $m$  番目の成分は、固有ベクトル (3.17) と成分の符号が  $s_m$  だけ異なることに注意しよう.

### 3.9.2 $\sigma = -1$ の場合

式 (3.79) より、特性方程式は

$$\mu^n + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^n = -1 = e^{j\pi} \tag{3.88}$$

となる. したがって  $b = e^{j\frac{\pi}{n}}$  とおくと、特性根は次のように求められる.

$$b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b \tag{3.89}$$

図 3.6 は、これらの固有値を図示したものである. 分布の特徴としては

1. 式 (3.89) の固有値は、複素平面の単位円上で 1 の  $n$  乗根を  $b = e^{j\frac{\pi}{n}}$  だけ回転させた複素数である. したがって、実部が一番大きい固有値は必ず複素共役となって現れる.
2. この性質は、 $n$  が偶数あるいは奇数に無関係である. また、 $n$  が偶数のときには実固有値は現れない. 図 3.6 (b) 参照.

等があげられる.

そこで、 $k$  番目の根  $a^{k-1}b$  に対する固有ベクトルの方程式は、

$$\begin{bmatrix} -a^{k-1}b & \sigma_2 & & & \\ & -a^{k-1}b & \sigma_3 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -a^{k-1}b & \sigma_n \\ \sigma_1 & & & & -a^{k-1}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{bmatrix} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.90)$$

となる。各成分について、 $\sigma_k$  を掛けて右辺と左辺を入れ替えて書くと次式となる。

$$\begin{aligned} h_2 &= a^{k-1}b\sigma_2 h_1 \\ h_3 &= a^{k-1}b\sigma_3 h_2 \\ &\dots \\ h_n &= a^{k-1}b\sigma_n h_{n-1} \\ h_1 &= a^{k-1}b\sigma_1 h_n \end{aligned} \quad (3.91)$$

そこで、 $h_1 = 1$  とおいて、上の式から整理すると次式となる。

$$h_1 = 1, h_2 = a^{k-1}bs_2, h_3 = (a^{k-1}b)^2s_3, \dots, h_n = (a^{k-1}b)^{n-1}s_n \quad (3.92)$$

そこで、正規化した固有ベクトルは次式となる。

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ a^{k-1}bs_2 \\ (a^{k-1}b)^2s_3 \\ \vdots \\ (a^{k-1}b)^{n-1}s_n \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.93)$$

式 (3.91) の最後の式は

$$h_1 = a^{k-1}b(a^{k-1}b)^{n-1}s_n\sigma_1 = (a^{k-1}b)^n\sigma = 1$$

となって、矛盾しないことに注意しよう。

式 (3.93) を用いて、次のユニタリ行列を作る。

$$H_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & 1 \\ bs_2 & abs_2 & & & a^{n-1}bs_2 \\ b^2s_3 & (ab)^2s_3 & \dots & & (a^{n-1}b)^2s_3 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ b^{n-1}s_n & (ab)^{n-1}s_n & & & (a^{n-1}b)^{n-1}s_n \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

このユニタリ行列を用いて、式 (3.75) は次式のように対角化できる。

$$H_n^{-1}Q_nH_n = \Lambda = \text{diag} [b \quad ab \quad a^2b \quad \dots \quad a^{n-1}b] \quad (3.95)$$



## 第4章

# ブロック形巡回行列

### 4.1 はじめに

前章の内容をブロック行列の形の巡回行列に書き換える。Kronecker 積を用いると、スカラーの場合の先の議論がほぼ同様に展開できる。結果は、単位となる  $m$  次元力学系を  $n$  個環状に結合した力学系の平衡点の安定性解析に応用できる。

まず、 $m \times m$  行列を  $n$  個用意しておく。

$$C_0, C_1, \dots, C_{n-1} \quad (4.1)$$

これらの行列をブロック行列要素とする次の形の行列を、ブロック形巡回行列 (block circulant) ということにする。

$$C = (C_{ij}) = (C_{j-i}) = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & \cdots & C_{n-1} \\ C_{n-1} & C_0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & C_0 & C_1 \\ C_1 & \cdots & \cdots & C_{n-1} & C_0 \end{bmatrix}, \quad j - i \pmod n \quad (4.2)$$

この行列は、環状に結合した力学系の解析において結合部分を反映したヤコビ行列として現れる。以下、この行列をユニタリー行列で対角化することと、直交行列でブロック対角化する具体的な計算を示そう。

1 の  $n$  乗根を

$$1, a, a^2, \dots, a^{n-1}, a = e^{j\frac{2\pi}{n}} \quad (4.3)$$

とし,  $n \times n$  巡回行列  $P_n$  を

$$P_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

とする. この行列を用いると, 巡回行列 (4.2) は次式で表すことができる.

$$C = I_n \otimes C_0 + P_n \otimes C_1 + \cdots + P_n^{n-1} \otimes C_{n-1} \quad (4.5)$$

## 4.2 ブロック形巡回行列の対角化：複素対角化

ブロック形巡回行列 (4.2) を対角化する問題を考えよう. 行列

$$H_n \otimes I_m \quad (4.6)$$

を用いて, 次式を得る.

$$(P_n^k \otimes C_k) (H_n \otimes I_m) = (H_n \otimes I_m) (\Lambda_k \otimes C_k) \quad (4.7)$$

ただし,  $k = 0, 1, \dots, n-1$  である. また,  $\Lambda_0 = I_n$  と考える. この式は, 次のように直接計算することによって確かめられる\*1.

$$\begin{aligned} & (H_n \otimes I_m)^{-1} (P_n^k \otimes C_k) (H_n \otimes I_m) \\ &= (H_n^{-1} \otimes I_m) (P_n^k \otimes C_k) (H_n \otimes I_m) \\ &= (H_n^{-1} P_n^k \otimes C_k) (H_n \otimes I_m) \\ &= H_n^{-1} P_n^k H_n \otimes C_k = \Lambda_k \otimes C_k \end{aligned} \quad (4.8)$$

この式を用いてブロック形巡回行列 (4.2) は, 次式のようにブロック対角行列に相似となる.

$$(H_n \otimes I_m)^{-1} C (H_n \otimes I_m) = \sum_{k=0}^{n-1} \Lambda_k \otimes C_k = \Lambda \quad (4.9)$$

ここに

$$\Lambda = \text{diag} [B_0 \quad B_1 \quad B_2 \quad \cdots \quad B_{n-1}] \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} B_0 &= C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_{n-1} \\ B_1 &= C_0 + aC_1 + a^2C_2 + \cdots + a^{n-1}C_{n-1} \\ B_2 &= C_0 + a^2C_1 + a^4C_2 + \cdots + a^{2(n-1)}C_{n-1} \\ &\dots \\ B_{n-1} &= C_0 + a^{n-1}C_1 + a^{2(n-1)}C_2 + \cdots + a^{(n-1)^2}C_{n-1} \end{aligned} \quad (4.11)$$

\*1 一般に,  $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ ,  $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$  の関係式が成り立つ.

とおいた.

さて, 式 (4.9) より

$$C(H_n \otimes I_m) = (H_n \otimes I_m)\Lambda = (H_n \otimes I_m) \begin{bmatrix} B_0 & & 0 \\ & B_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & B_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$H_n \otimes I_m = \begin{bmatrix} h_0 \otimes I_m & h_1 \otimes I_m & \cdots & h_{n-1} \otimes I_m \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

と, 直接計算により得られる関係式

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} h_0 \otimes I_m & h_1 \otimes I_m & \cdots & h_{n-1} \otimes I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 & & 0 \\ & B_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & B_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_0 \otimes B_0 & h_1 \otimes B_1 & \cdots & h_{n-1} \otimes B_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

より, 各成分を別々に取り出すと次式を得る.

$$\begin{aligned} C(h_0 \otimes I_m) &= h_0 \otimes B_0 = (h_0 \otimes I_m) B_0 \\ C(h_1 \otimes I_m) &= h_1 \otimes B_1 = (h_1 \otimes I_m) B_1 \\ &\dots \\ C(h_{n-1} \otimes I_m) &= h_{n-1} \otimes B_{n-1} = (h_{n-1} \otimes I_m) B_{n-1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

これは, ブロックでみた固有空間への分解とみることができる.

【例 1】一方向性結合 ( $n = 3$ ) の場合

$$C = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & 0 \\ 0 & C_0 & C_1 \\ C_1 & 0 & C_0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

を考えよう. この場合

$$H_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}, \quad a = e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} B_0 &= C_0 + C_1 \\ B_1 &= C_0 + aC_1 \\ B_2 &= C_0 + a^2C_1 = C_0 + \bar{a}C_1 \end{aligned} \quad (4.18)$$

を用いて

$$C(H_3 \otimes I_m) = (H_3 \otimes I_m) \begin{bmatrix} B_0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

を得る.

### 4.3 ブロック形巡回行列の対角化：実対角化

前節, 前前節の結果を用いて, 最初に考えたブロック形巡回行列  $C$  は, 容易に実行列のブロック対角化可能となる.

#### 4.3.1 $n$ が奇数の場合

$n = 2\ell + 1$  とする.

$$H_n = [c_0 \quad c_1 \quad s_1 \quad \cdots \quad c_\ell \quad s_\ell] \quad (4.20)$$

から

$$H_n \otimes I_m = [c_0 \otimes I_m \quad c_1 \otimes I_m \quad s_1 \otimes I_m \quad \cdots \quad c_\ell \otimes I_m \quad s_\ell \otimes I_m] \quad (4.21)$$

$$T_k = \begin{bmatrix} c(k\theta) & s(k\theta) \\ -s(k\theta) & c(k\theta) \end{bmatrix}, \quad (k \bmod n) \quad (4.22)$$

を定義すると,

$$(H_n \otimes I_m)^{-1} (P_n^k \otimes C_k) (H_n \otimes I_m) = \Lambda_k \otimes C_k$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & T_k & & & \\ & & T_{2k} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & T_{\ell k} \end{bmatrix} \otimes C_k \quad (4.23)$$

これらをたし合わせて,  $C$  の対角化は次式となる.

$$(H_n \otimes I_m)^{-1} C (H_n \otimes I_m) = \Lambda = \text{diag} [B_0 \quad B_1 \quad \cdots \quad B_\ell] \quad (4.24)$$

ここに

$$\begin{aligned}
B_0 &= C_0 + C_1 + \cdots + C_{n-1} \\
B_1 &= I_2 \otimes C_0 + T_1 \otimes C_1 + \cdots + T_{n-1} \otimes C_{n-1} \\
B_2 &= I_2 \otimes C_0 + T_2 \otimes C_1 + \cdots + T_{2(n-1)} \otimes C_{n-1} \\
&\dots \\
B_\ell &= I_2 \otimes C_0 + T_\ell \otimes C_1 + \cdots + T_{\ell(n-1)} \otimes C_{n-1}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

とおいた.

更に,  $T_k$  の偏角をみると,  $k = \ell + 1, \ell + 2, \dots, 2\ell$  の  $\ell$  個は  $k = \ell, \ell - 1, \dots, 1$  の偏角の符号を負にした角度になっている. すなわち,

$$\ell + k = \ell + k - (2\ell + 1) = -\ell + k - 1, \pmod{n} \tag{4.26}$$

このことに注意して,  $T_k$  の要素を計算しておこう\*2.

$$\begin{aligned}
T_{\ell+k} &= \begin{bmatrix} c((\ell+k)\theta) & s((\ell+k)\theta) \\ -s((\ell+k)\theta) & c((\ell+k)\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(-(\ell-k+1)\theta) & s(-(\ell-k+1)\theta) \\ -s(-(\ell-k+1)\theta) & c(-(\ell-k+1)\theta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c((\ell-k+1)\theta) & -s((\ell-k+1)\theta) \\ s((\ell-k+1)\theta) & c((\ell-k+1)\theta) \end{bmatrix}, \quad (k = 1, 2, \dots, \ell)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

となる. そこで,

$$B_k = \begin{bmatrix} M_k & N_k \\ -N_k & M_k \end{bmatrix}, \quad (k = 1, 2, \dots, \ell) \tag{4.28}$$

とおくと,  $M_k, N_k$  は次式となる.

$$\begin{aligned}
M_k &= C_0 + c(k\theta)(C_1 + C_{n-1}) + c(2k\theta)(C_2 + C_{n-2}) + \cdots + c(\ell k\theta)(C_\ell + C_{\ell+1}) \\
N_k &= s(k\theta)(C_1 - C_{n-1}) + s(2k\theta)(C_2 - C_{n-2}) + \cdots + s(\ell k\theta)(C_\ell - C_{\ell+1}) \\
&\quad (k = 1, 2, \dots, \ell)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

**【例 2】** 一方向性結合 ( $n = 3$ ) の場合

例 1 で考えた例を考えよう.

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ c(2\pi/3) \\ c(4\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2/3} \\ -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad s_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ s(2\pi/3) \\ s(4\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

\*2 同様の考察は,  $k$  が  $n$  の倍数の値を取るときに常におこる.

より,

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad T_1 = \begin{bmatrix} c\left(\frac{2\pi}{3}\right) & s\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ -s\left(\frac{2\pi}{3}\right) & c\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

とおくと, ブロック対角化された行列は次式となる.

$$(H_3 \otimes I_m)^{-1} \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & 0 \\ 0 & C_0 & C_1 \\ C_1 & 0 & C_0 \end{bmatrix} (H_3 \otimes I_m) = \begin{bmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

ここに

$$\begin{aligned} B_0 &= C_0 + C_1 \\ B_1 &= I_2 \otimes C_0 + T_1 \otimes C_1 \\ &= \begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ 0 & C_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \otimes C_1 \\ &= \begin{bmatrix} C_0 + \frac{1}{2}C_1 & \frac{\sqrt{3}}{2}C_1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}C_1 & C_0 + \frac{1}{2}C_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

である.

### 4.3.2 $n$ が偶数の場合

$n = 2\ell + 2$  とする. 奇数の場合と同様に

$$H_n = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & s_1 & \cdots & c_\ell & s_\ell & c_{\ell+1} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$H_n \otimes I_m = \begin{bmatrix} c_0 \otimes I_m & c_1 \otimes I_m & s_1 \otimes I_m & \cdots & c_\ell \otimes I_m & s_\ell \otimes I_m & c_{\ell+1} \otimes I_m \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$T_k = \begin{bmatrix} c(k\theta) & s(k\theta) \\ -s(k\theta) & c(k\theta) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

とおくと

$$(H_n \otimes I_m)^{-1} (P_n^k \otimes I_m) (H_n \otimes I_m) = \Lambda_k \otimes C_k$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & T_k & & & & \\ & & T_{2k} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & T_{\ell k} & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix} \otimes C_k \quad (4.37)$$

となる. したがって,  $C$  を対角化して次式を得る.

$$(H_n \otimes I_m)^{-1} C (H_n \otimes I_m) = \Lambda = \text{diag} [B_0 \ B_1 \ \cdots \ B_\ell \ B_{\ell+1}] \quad (4.38)$$

ここに

$$\begin{aligned} B_0 &= C_0 + C_1 + \cdots + C_{n-1} \\ B_1 &= I_2 \otimes C_0 + T_1 \otimes C_1 + \cdots + T_{n-1} \otimes C_{n-1} \\ B_2 &= I_2 \otimes C_0 + T_2 \otimes C_1 + \cdots + T_{2(n-1)} \otimes C_{n-1} \\ &\dots \\ B_\ell &= I_2 \otimes C_0 + T_\ell \otimes C_1 + \cdots + T_{\ell(n-1)} \otimes C_{n-1} \\ B_{\ell+1} &= C_0 - C_1 - \cdots - C_{n-1} \end{aligned} \quad (4.39)$$

とおいた. また, これらも奇数の時と同様に

$$B_k = \begin{bmatrix} M_k & N_k \\ -N_k & M_k \end{bmatrix}, \quad (k = 1, 2, \dots, \ell) \quad (4.40)$$

とおくと,  $M_k, N_k$  は次式となる.

$$\begin{aligned} M_k &= C_0 + c(k\theta)(C_1 + C_{n-1}) + c(2k\theta)(C_2 + C_{n-2}) + \cdots + c(\ell k\theta)(C_\ell + C_{\ell+1}) \\ N_k &= s(k\theta)(C_1 - C_{n-1}) + s(2k\theta)(C_2 - C_{n-2}) + \cdots + s(\ell k\theta)(C_\ell - C_{\ell+1}) \end{aligned} \quad (4.41)$$

$(k = 1, 2, \dots, \ell)$

**【例 3】** 一方向性結合 ( $n = 4$ ) の場合

$$C = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 & C_1 \\ C_1 & 0 & 0 & C_0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

を考えよう.

$$c_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

より,

$$H_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad T_1 = \begin{bmatrix} c\left(\frac{2\pi}{4}\right) & s\left(\frac{2\pi}{4}\right) \\ -s\left(\frac{2\pi}{4}\right) & c\left(\frac{2\pi}{4}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

と

$$C = I_4 \otimes C_0 + P_4 \otimes C_1 \quad (4.45)$$

$$(H_4 \otimes I_4)^{-1} (I_4 \otimes C_0) (H_4 \otimes I_4) = \begin{bmatrix} C_0 & & \\ & I_2 \otimes C_0 & \\ & & C_0 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$(H_4 \otimes I_4)^{-1} (P_4 \otimes C_1) (H_4 \otimes I_4) = \begin{bmatrix} C_1 & & \\ & T_1 \otimes C_1 & \\ & & -C_1 \end{bmatrix}$$

から, ブロック対角化された行列は次式となる.

$$(H_4 \otimes I_4)^{-1} C (H_4 \otimes I_4) = \begin{bmatrix} C_0 + C_1 & & \\ & I_2 \otimes C_0 + T_1 \otimes C_1 & \\ & & C_0 - C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 & & \\ & B_1 & \\ & & B_2 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

したがって

$$\begin{aligned} B_0 &= C_0 + C_1 \\ B_1 &= I_2 \otimes C_0 + T_1 \otimes C_1 = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 \\ -C_1 & C_0 \end{bmatrix} \\ B_2 &= C_0 - C_1 \end{aligned} \quad (4.48)$$

である.



$$\begin{array}{ccc}
 x \in R^{nm} & \xrightarrow{C} & R^{nm} \\
 H \otimes K \uparrow & & \uparrow H \otimes K \\
 y \in R^{nm} & \xrightarrow{\Lambda} & R^{nm}
 \end{array}$$

図 4.1 写像間の可換図 .

#### 4.4 $A \otimes B$ 行列の対角化

ここで一般に、行列のテンソル積を対角化する問題を考えておこう。すなわち、

$$C = A \otimes B \quad (4.49)$$

を対角化する問題を考える。ここに、 $A$  は  $n \times n$  行列、 $B$  は  $m \times m$  行列とする。

また、行列  $A, B$  はそれぞれ、行列  $H, K$  を用いて対角化できるものとしておこう。すなわち、

$$\begin{aligned}
 H^{-1}AH &= \Lambda_n \\
 K^{-1}BK &= \Lambda_m
 \end{aligned} \quad (4.50)$$

とする。ここに、 $\Lambda_n, \Lambda_m$  は、それぞれ  $n \times n, m \times m$  の対角行列を表す。

この時、行列  $C$  は  $H \otimes K$  によって対角化できる。すなわち、

$$\begin{aligned}
 (H \otimes K)^{-1}C(H \otimes K) &= (H^{-1} \otimes K^{-1})(A \otimes B)(H \otimes K) \\
 &= (H^{-1} \otimes K^{-1})(AH \otimes BK) = H^{-1}AH \otimes K^{-1}BK = \Lambda_n \otimes \Lambda_m = \lambda
 \end{aligned} \quad (4.51)$$

これらの関係をベクトル空間の座標変換とみると、次の関係となる。今、

$$x = u \otimes p, \quad x \in R^{nm}, \quad u \in R^n, \quad p \in R^m \quad (4.52)$$

とし、

$$y = v \otimes q, \quad y \in R^{nm}, \quad v \in R^n, \quad q \in R^m \quad (4.53)$$

を変換

$$x = (H \otimes K)y, \quad u = Hv, \quad p = Kq \quad (4.54)$$

によって変換するものとしよう。このとき

$$\Lambda y = (H \otimes K)^{-1}C(H \otimes K)y \quad (4.55)$$

となる。写像の可換図 4.1 を参照。

一例として、

$$C = cP_n \otimes dP_m \quad (4.56)$$

の場合を考えよう.  $n$ 次元エルミート行列  $H_n$  と,  $m$ 次元エルミート行列  $H_m$  を用いて, 次のように対角化される.

$$\begin{aligned}(H_n \otimes H_m)^{-1} C(H_n \otimes H_m) &= (H_n^{-1} \otimes H_m^{-1})(cP_n \otimes dP_m)(H_n \otimes H_m) \\ &= cdH_n^{-1}P_nH_n \otimes H_m^{-1}P_mH_m = cd\Lambda_n \otimes \Lambda_m\end{aligned}\tag{4.57}$$

ここに,

$$\begin{aligned}\Lambda_n &= \text{diag} \left[ 1 \quad a \quad a^2 \quad \dots \quad a^{n-1} \right] \\ \Lambda_m &= \text{diag} \left[ 1 \quad b \quad b^2 \quad \dots \quad b^{m-1} \right]\end{aligned}\tag{4.58}$$

ただし,  $a = e^{j\frac{2\pi}{n}}$ ,  $b = e^{j\frac{2\pi}{m}}$  とおいた.

## 第 III 部

# 環状結合力学系

## 第5章

# 環状結合した線形系

### 5.1 はじめに

結合部分が線形となっている環状結合系は、応用上しばしば見かける結合系である。この場合、平衡点の安定性解析の際に次の線形微分方程式が問題となる。

$$\frac{dx}{dt} = -Cx, \quad x \in R^n \quad (5.1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -Cx, \quad x \in R^n \quad (5.2)$$

ここに、行列  $C$  は巡回行列

$$C = c_0 I_n + c_1 P_n + c_2 P_n^2 + \cdots + c_{n-1} P_n^{n-1} = f(P_n) \quad (5.3)$$

である。また、係数は何も断りがなければ

$$c_0, c_1, \cdots, c_{n-1} \geq 0 \quad (5.4)$$

と仮定し、必要に応じて符号を再考することとする。

この章では、上記の二つの方程式の性質を調べる。

### 5.2 線形方程式 (5.1) の性質

とりあえず、方程式 (5.1) を座標変換して、形式的に解の様子を見ておこう。式 (3.18) を用いて次の変換を考える。

$$x = H_n y \quad (5.5)$$

ここに、

$$H_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 1 & a^2 & a^4 & & a^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a^{n-1} & a^{2(n-1)} & \cdots & a^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

である, ただし,  $a$  は  $a = e^{j\frac{2\pi}{n}}$  を表す.

すると, 式 (5.1) は次式に変換される.

$$\frac{dy}{dt} = -H_n^{-1}CH_n y = -\Lambda y \quad (5.7)$$

ここに, 行列  $\Lambda$  は\*1

$$\Lambda = \text{diag} \left[ f(1) \quad f(a) \quad f(a^2) \quad \cdots \quad f(a^{n-1}) \right] \quad (5.8)$$

となっている. また,

$$\begin{aligned} f(1) &= c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} \\ f(a) &= c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \cdots + c_{n-1} a^{n-1} \\ f(a^2) &= c_0 + c_1 a^2 + c_2 a^4 + \cdots + c_{n-1} a^{2(n-1)} \\ &\cdots \\ f(a^{n-1}) &= c_0 + c_1 a^{n-1} + c_2 a^{2(n-1)} + \cdots + c_{n-1} a^{(n-1)^2} \end{aligned} \quad (5.9)$$

とおいた.

従って,

$$y_k(t) = y_{k0} \exp[-f(a^{k-1})t], \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5.10)$$

となる. 幾何学的にみると,  $H$  を参照して,  $C$  の  $k$  番目の固有値  $f(a^{k-1})$  に対する固有ベクトルを

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ a^{(k-1)} \\ a^{2(k-1)} \\ \vdots \\ a^{(n-1)(k-1)} \end{bmatrix}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5.11)$$

とすると\*2, この方向への解の振る舞いが, 式 (5.10) で表されているとみることができる.

すなわち,

$$x(t) = H_n y(t) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n y_k(t) h_k \quad (5.12)$$

この和の  $k$  番目の解を  $x_k(t)$  とおくと

$$x_k(t) = y_k(t) h_k = y_{k0} \exp(-f(a^{k-1})t) h_k \quad (5.13)$$

となる\*3.

\*1 第3章 3.3 を参照.

\*2 第3章 3.2 式 (3.18) とは,  $h$  の添字の番号付けが異なっている. ここでは,  $k = 1, 2, \dots, n$  と番号を付した.

\*3  $x_k(t)$  は基本解ベクトル,  $y_k(t)$  はスカラー解を表す. 記法がよくないので, 注意してほしい.

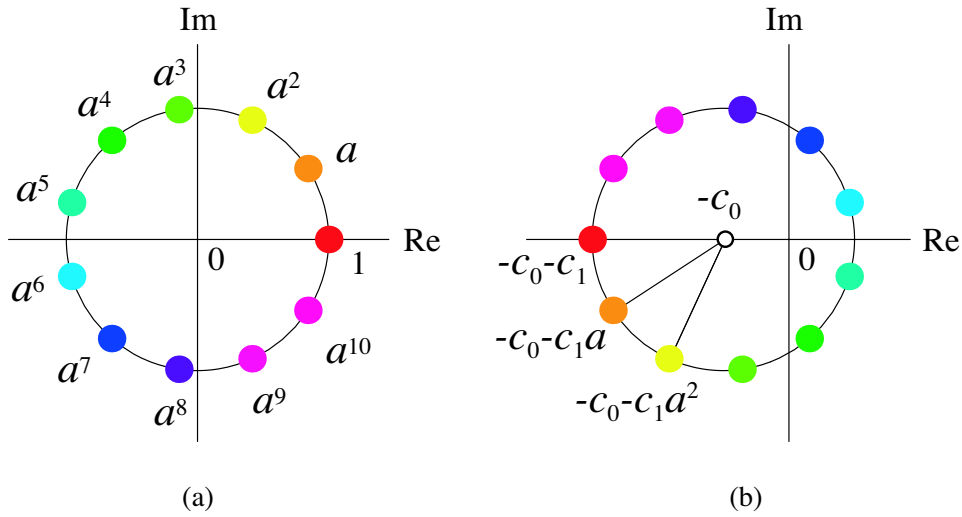


図 5.1  $-C$  の固有値の分布.  $n = 11$  の場合.

### 5.2.1 $C = c_0 I_n + c_1 P_n$ の場合

この場合は,

$$f(a^{k-1}) = c_0 + c_1 a^{k-1}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{5.14}$$

であるから,  $-C$  の固有値の分布は図 5.1(b) のようになる. なお, 図 5.1(a) は, 1 の  $n$  乗根  $a^k$  を  $k$  の順番に色彩を変えて表示したものである. この図 (a) と (b) を比較してみると,  $P_n$  の係数が負になると順番が  $\pi$  回転することがわかる.

また,  $n$  が偶数の場合と奇数の場合では, 実軸上にくる固有値の分布が異なることに注意しよう. たとえば, 図 5.2 参照.

この違いは, 平衡点の分岐を考えるとときに本質的に重要となる. すなわち,  $c_0, c_1$  を変化させて固有値を動かしたとき, 最初に虚軸を横切る固有値は,

- $n$  が偶数のときは実固有値,
- $n$  が奇数のときは純虚数の固有値

となる. したがって, それぞれの場合に対応して, 平衡点の  $D$  型分枝, 平衡点の Hopf 型分岐が起こる.

$n$  が奇数の一例として,  $n = 2\ell - 1$  とし,  $k = \ell = (n + 1)/2$  番目と  $k = \ell + 1 = (n + 3)/2$  番目の固有値が虚軸上に値を取る場合を考えておこう. 図 5.2 (b) 参照. 今, これらの固有値を

$$-f(a^{\ell-1}) = -c_0 - c_1 a^{\ell-1} = -j\omega_\ell, \quad -f(a^\ell) = -c_0 - c_1 a^\ell = j\omega_\ell \tag{5.15}$$

とする. これらの固有値が虚軸上にくる条件を求めよう.  $\ell = (n + 1)/2$  と式 (5.15) より,

$$-c_0 - c_1 a^{\ell-1} = -c_0 - c_1 e^{j\frac{\pi(n-1)}{n}} = -c_0 - c_1 \cos \pi \frac{n-1}{n} - jc_1 \sin \pi \frac{n-1}{n} \tag{5.16}$$

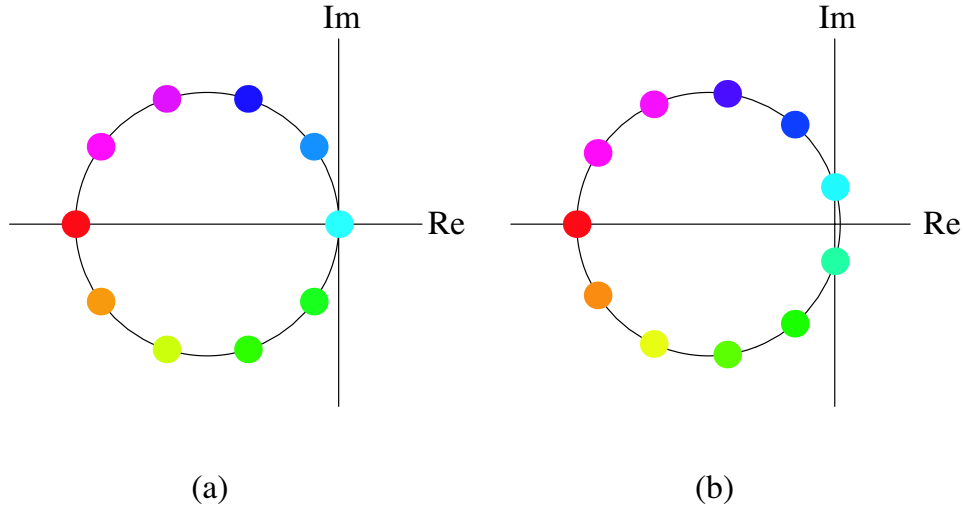


図 5.2  $-C$  の固有値の分布 (a)  $n = 10$  の場合, (b)  $n = 11$  の場合.

となる. したがって, 条件

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 \cos \pi \frac{n-1}{n} &= 0 \\ \omega_\ell &= c_1 \sin \pi \frac{n-1}{n} = \sqrt{c_1^2 - c_0^2} = \sqrt{(c_1 + c_0)(c_1 - c_0)} \end{aligned} \tag{5.17}$$

を得る.

式 (5.13) は次式となる.

$$x_\ell(t) = y_{\ell 0} e^{j\omega_\ell t} h_\ell = \frac{y_{\ell 0}}{\sqrt{n}} e^{j\omega_\ell t} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \vdots \\ \varepsilon^{n-1} \end{bmatrix} = \frac{y_{\ell 0}}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} e^{j\omega_\ell t} \\ e^{j(\omega_\ell t + \theta)} \\ e^{j(\omega_\ell t + 2\theta)} \\ \vdots \\ e^{j(\omega_\ell t + (n-1)\theta)} \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

$$x_{\ell+1}(t) = \bar{y}_{\ell 0} e^{-j\omega_\ell t} \bar{h}_\ell = \frac{\bar{y}_{\ell 0}}{\sqrt{n}} e^{-j\omega_\ell t} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\varepsilon} \\ \bar{\varepsilon}^2 \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}^{n-1} \end{bmatrix} = \frac{\bar{y}_{\ell 0}}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} e^{j\omega_\ell t} \\ e^{-j(\omega_\ell t + \theta)} \\ e^{-j(\omega_\ell t + 2\theta)} \\ \vdots \\ e^{-j(\omega_\ell t + (n-1)\theta)} \end{bmatrix}$$

ここに,

$$\varepsilon = e^{j\frac{\pi(n-1)}{n}}, \quad \theta = \frac{\pi(n-1)}{n} \tag{5.19}$$

と置いた. この解  $x_\ell(t)$  は, ベクトルの引き続く成分の位相差が  $\theta$  であり, この値は  $n$  がある程度大きくなると, ほぼ  $\pi$  となる. すなわち, 隣り合った番号の解は, ほぼ逆相で振動する.

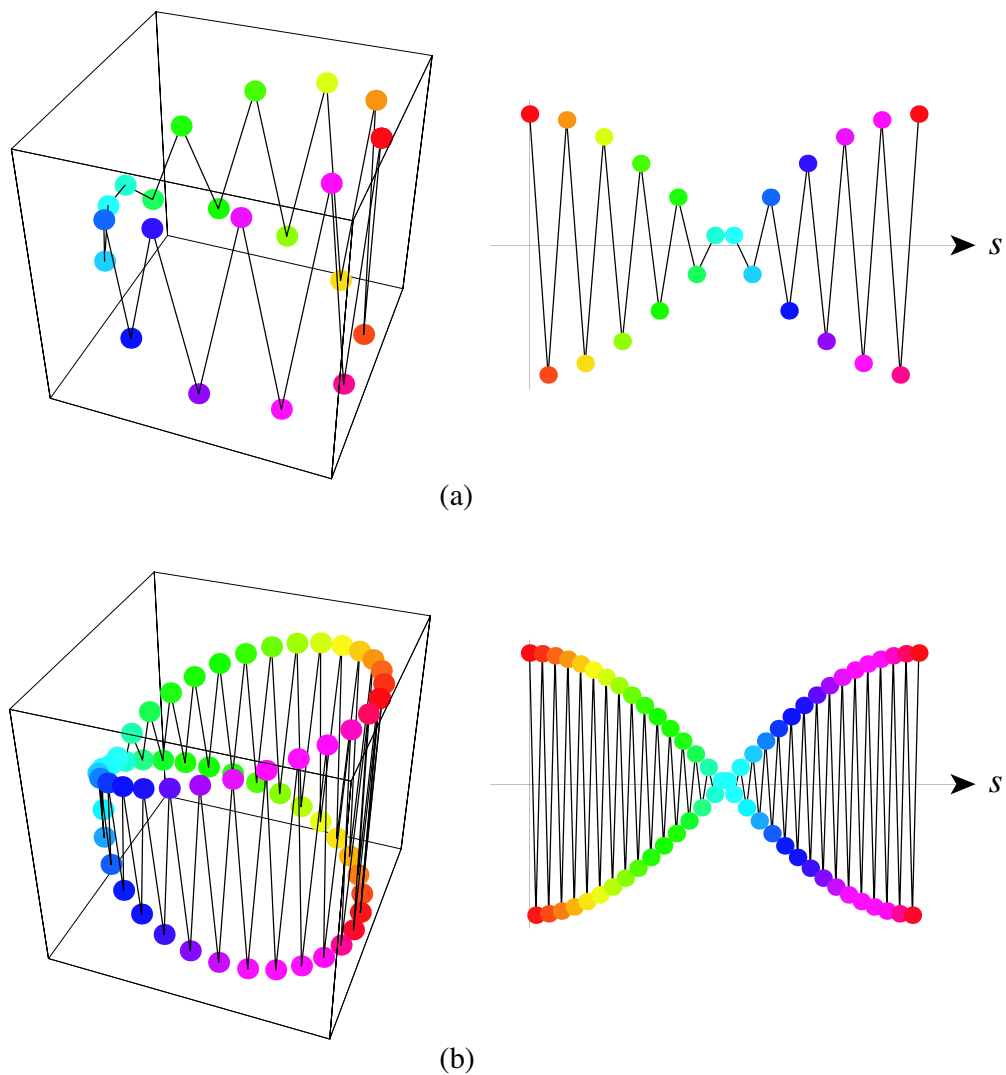


図 5.3 式 (5.21) の波形の例. (a)  $n = 21$  の場合例. (b)  $n = 61$  の例.

また、この場合、他の固有値はすべて負の実部を持つので、時間の経過とともに解はゼロに近づく。そこで、最終的には上記の解のみが観察されることとなる。

一例として、 $x_\ell(t)$  の実部の振る舞いを見ておこう。式 (5.18) より、初期値を除いて、

$$\Re(x_\ell(t)) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_\ell t) \\ \cos(\omega_\ell t + \theta) \\ \cos(\omega_\ell t + 2\theta) \\ \dots \\ \cos(\omega_\ell t + s\theta) \\ \dots \\ \cos(\omega_\ell t + (n-1)\theta) \end{bmatrix} \quad (5.20)$$



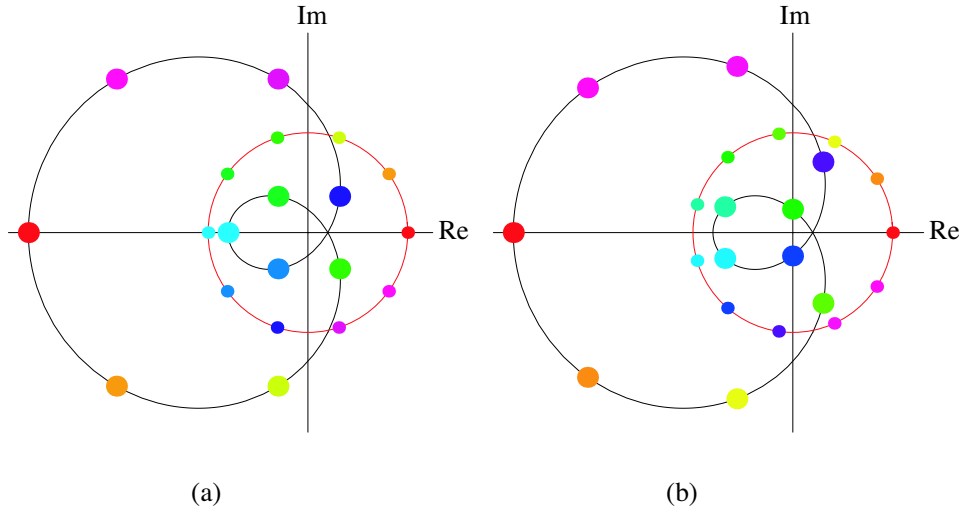


図 5.4  $-C$  の固有値の分布. (a)  $n = 10$  の場合, (b)  $n = 11$  の場合. いずれもパラメータは  $c_0 = -0.8, c_1 = c_2 = -1.0$  の場合を示した.

を考える. この解の  $n$  個の成分を円形に環状に配置して, 円環方向のパラメータを  $s$  とする.

$$x(t, s) = \cos(\omega_\ell t + s\theta) \tag{5.21}$$

この波形の例を図 5.3 に示した. 式 (5.21) の波形の位相を

$$\phi(t, s) = \omega_\ell t + s\theta \tag{5.22}$$

と置くと, 位相が一定の値は  $\omega_\ell dt + sd\theta = 0$  より,

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\theta}{\omega_\ell} = -\frac{\frac{\pi(n-1)}{n}}{c_1 \sin \pi \frac{n-1}{n}} = -\frac{\pi(n-1)}{nc_1 \sqrt{(c_1 + c_0)(c_1 - c_0)}} \tag{5.23}$$

で円環上を進行する.

### 5.2.2 $C = c_0 I_n + c_1 P_n + c_2 P_n^2$ の場合

この場合は, 固有値の分布が

$$f(a^{k-1}) = c_0 + c_1 a^{k-1} + c_2 a^{2(k-1)}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{5.24}$$

となる.

そこで係数をうまく与えることによって, 次の場合を実現できる.

1.  $n$  が偶数の場合でも, 実軸上の固有値を小さくして, 一組の共役複素根が最初に虚軸を横切るようにパラメータを定めることができる. 図 5.4(a) および図 ?? (a) を参照.
2.  $c_1, c_2$  を変えることによって, 虚軸を横切る特性根の順番を制御できる. このことによって, 隣の変数との間の位相差が  $2\pi k/n$  となる  $n$  相解を得ることができる.

これらの性質は、距離 2 の結合系の大きな特徴と考えられる。

このことは、次のように具体的に検討できる。今、式 (3.71) より

$$c(s) = c_0 + c_1 e^{j2\pi s} + c_2 e^{j4\pi s} = r_c(s) + j i_c(s), \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (5.25)$$

とおくと

$$\begin{aligned} r_c(s) &= c_0 + c_1 \cos 2\pi s + c_2 \cos 4\pi s \\ i_c(s) &= c_1 \sin 2\pi s + c_2 \sin 4\pi s \end{aligned} \quad (5.26)$$

である。そこで、 $r_c(s)$  の最大値の値に、 $k$  番目の特性根が配置され、かつこの値が虚軸上にくる条件を課すことにしよう。この条件は次式となる。

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 \cos 2\pi \frac{k}{n} + c_2 \cos 4\pi \frac{k}{n} &= 0 \\ \omega &= c_1 \sin 2\pi \frac{k}{n} + c_2 \sin 4\pi \frac{k}{n} \\ \frac{dr}{ds} &= -2\pi c_1 \sin 2\pi \frac{k}{n} - 4c_2 \pi \sin 4\pi \frac{k}{n} = 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

この第 1 式は、虚軸上にくる条件、第 2 式はそのときの振動の角周波数、第 3 式はこの根が最も右にくる条件である。第 3 式から

$$\sin 2\pi \frac{k}{n} \left( c_1 + 4c_2 \cos 2\pi \frac{k}{n} \right) = 0 \quad (5.28)$$

となり、実軸以外の根として次の条件を得る。

$$\cos 2\pi \frac{k}{n} = -\frac{c_1}{4c_2} \quad (5.29)$$

そこで、この式が成立するように  $c_1, c_2$  を選び、式 (5.27) の第 1 式が成り立つように  $c_0$  を選ぶと、すべての条件が満足される。三つのパラメータ  $c_0, c_1, c_2$  に対して条件は二つなので、残りの一つを使って、式 (5.23) の第 2 式の  $\omega$  の値を調整できる。図 5.5 に  $n = 12$  の例を示した。  $k/n = 3/12$  の場合には、上の固有値の配置条件は満たされない。このような場合には  $c_1$  を少し摂動させて固有値を虚軸上に配置させるとよいであろう。図 5.5(c) 参照。

なお、位相については

$$\phi(t) = \omega t + \frac{k}{n} s = \left( c_1 \sin 2\pi \frac{k}{n} + c_2 \sin 4\pi \frac{k}{n} \right) t + \frac{k}{n} s \quad (5.30)$$

となるので、位相速度は次式となる。

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{n}{k} \omega = -\frac{n}{k} \left( c_1 \sin 2\pi \frac{k}{n} + c_2 \sin 4\pi \frac{k}{n} \right) \quad (5.31)$$

もう一つの場合として、2 つの根が虚軸上にくる必要条件を求めておこう。式 (5.27) の第 1 式より、 $k_1$  目と  $k_2$  目の根を虚軸上に配置したとすると

$$\begin{aligned} c_1 \cos 2\pi \frac{k_1}{n} + c_2 \cos 4\pi \frac{k_1}{n} &= -c_0 \\ c_1 \cos 2\pi \frac{k_2}{n} + c_2 \cos 4\pi \frac{k_2}{n} &= -c_0 \end{aligned} \quad (5.32)$$

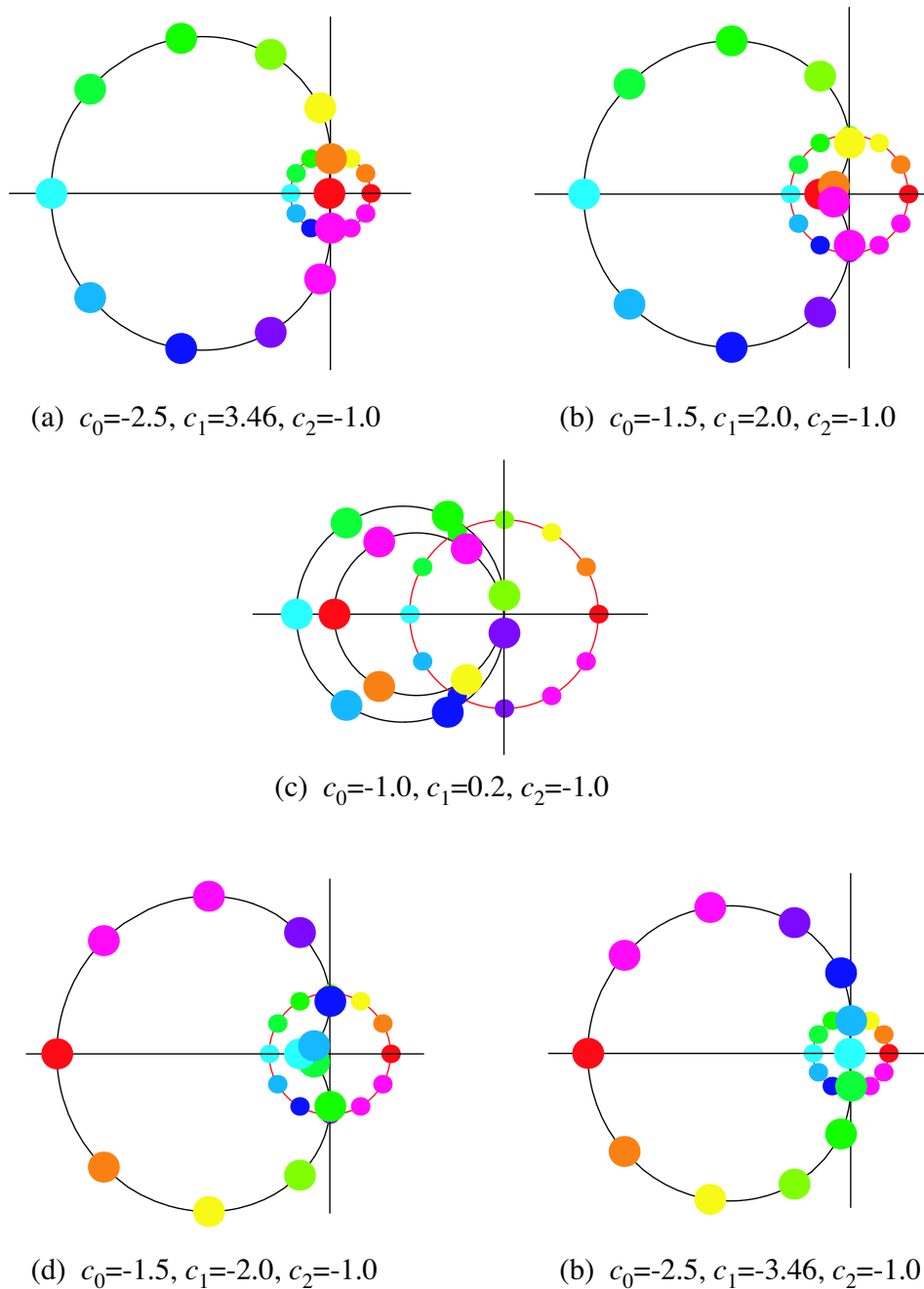


図 5.5  $n = 12$  の場合の固有値の位置の制御例.

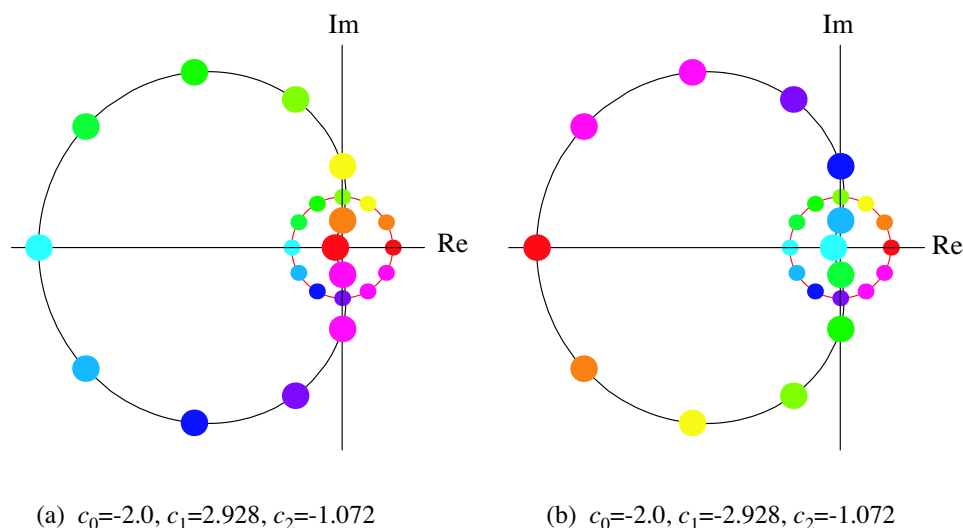


図 5.6 2つの固有値を虚軸上に配置する例.  $n = 12$  の場合.

となる. これを解いて

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -\frac{2c_0 (\cos 2\pi \frac{k_1}{n} + \cos 2\pi \frac{k_2}{n})}{2 \cos 2\pi \frac{k_1}{n} \cos 2\pi \frac{k_2}{n} + 1} = -2c_2 \left( \cos 2\pi \frac{k_1}{n} + \cos 2\pi \frac{k_2}{n} \right) \\
 c_2 &= \frac{c_0}{2 \cos 2\pi \frac{k_1}{n} \cos 2\pi \frac{k_2}{n} + 1}
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

となる. したがって, 式 (5.33) を満たす  $c_0, c_1, c_2$  を与えるとよい. 図 5.6 に  $n = 12$  の例を示した. これらの例は, それぞれ 2 番目と 3 番目, 5 番目と 6 番目の固有値を虚軸上に配置した例である. 3 番目と 4 番目の根を配置しようとする, 3 番目の固有値は原点にきてしまう. この場合も退化した場合として更に考えるとおもしろいかも知れない.

更に, これらの場合に発生するトーラス解について検討することもおもしろい.

### 5.3 線形方程式 (5.2) の性質

ここでは、応用上重要と考えられる以下の二つの場合について考察する。

#### 5.3.1 $C = c_0 I_n + c_1 (P_n + P_n^{-1})$ の場合

微分方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -Cx = -\{c_0 I_n + c_1 (P_n + P_n^{-1})\} x \quad (5.34)$$

を考える。

第3章 3.6 でみたように、ユニタリ行列を用いて座標変換すると、次のスカラー方程式を得る。これをみてみよう。以下の式中

$$\theta = \frac{2\pi}{n}, \quad c(k\theta) = \cos k\theta, \quad s(k\theta) = \sin k\theta \quad (5.35)$$

を表す。

$n$  が奇数:  $n = 2\ell + 1$  の場合

式 (3.46) から式 (3.48) を参考にして、直交行列

$$H_n = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & c(\theta) & s(\theta) & & c(\ell\theta) & s(\ell\theta) \\ 1/\sqrt{2} & c(2\theta) & s(2\theta) & & c(2\ell\theta) & s(2\ell\theta) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1/\sqrt{2} & c((n-2)\theta) & s((n-2)\theta) & & c((n-2)\ell\theta) & s((n-2)\ell\theta) \\ 1/\sqrt{2} & c((n-1)\theta) & s((n-1)\theta) & \cdots & c((n-1)\ell\theta) & s((n-1)\ell\theta) \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

を用いて

$$x = H_n y \quad (5.37)$$

と座標変換すると、式 (5.34) は次式となる。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\{c_0 I_n + c_1 \Lambda_{odd}\} y \quad (5.38)$$

ここに,

$$\Lambda_{odd} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & 0 \\ & 2c(\theta) & 0 & & & & & & & & \\ & 0 & 2c(\theta) & & & & & & & & \\ & & & 2c(2\theta) & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & 2c(2\theta) & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & 2c(\ell\theta) & 0 & & \\ 0 & & & & & & & 0 & 2c(\ell\theta) & & \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

とおいた.

そこで, 式 (5.38) を各成分で書くと

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -(c_0 + c_1) y_1 \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= -(c_0 + 2c_1 \cos \theta) y_2 \\ \frac{d^2 y_3}{dt^2} &= -(c_0 + 2c_1 \cos \theta) y_3 \\ &\dots \\ \frac{d^2 y_\ell}{dt^2} &= -(c_0 + 2c_1 \cos \ell\theta) y_\ell \\ \frac{d^2 y_{\ell+1}}{dt^2} &= -(c_0 + 2c_1 \cos \ell\theta) y_{\ell+1} \end{aligned} \quad (5.40)$$

となる.

今, 係数はすべて負の実数と仮定し,

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{c_0 + c_1} \\ \omega_k &= \sqrt{c_0 + 2c_1 \cos k\theta} = \sqrt{c_0 + 2c_1 \cos \frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 1, 2, \dots, \ell \end{aligned} \quad (5.41)$$

とおく. なお, これら角周波数の分布図については, 図 3.3(a) を参照. すると, 式 (5.40) の一般解は次式となる.

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_1 \cos \omega_0 t + B_1 \sin \omega_0 t \\ y_k(t) &= A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t, \quad k = 1, 2, \dots, \ell \\ y_{k+1}(t) &= A_{k+1} \cos \omega_k t + B_{k+1} \sin \omega_k t \end{aligned} \quad (5.42)$$

これらの解に含まれる積分定数  $A, B$  は,  $y_k, \dot{y}_k$  の初期値によって決定できる. 式 (5.42) の一般解を

用いて，式 (5.36) の一般解は次式となる．

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) & \cdots & x_{2\ell}(t) & x_{2\ell+1}(t) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} y_1(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} & y_2(t) \begin{bmatrix} 1 \\ c(\theta) \\ \vdots \\ c((n-1)\theta) \end{bmatrix} & y_3(t) \begin{bmatrix} 0 \\ s(\theta) \\ \vdots \\ s((n-1)\theta) \end{bmatrix} & \cdots \\
 &\cdots & y_{2\ell}(t) \begin{bmatrix} 1 \\ c(\ell\theta) \\ \vdots \\ c((n-1)\ell\theta) \end{bmatrix} & y_{2\ell+1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ s(\ell\theta) \\ \vdots \\ s((n-1)\ell\theta) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.43)
 \end{aligned}$$

さて，これらの解は円環上で進行波，後退波，あるいは定在波として観察される．最初の解

$$x_1(t) = y_1(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = (A_1 \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

は，すべての成分が同じなので，同相解となる定在波である． $2k$  番目と  $2k+1$  番目の解は対となっているので，初期値を

$$A_{2k} = B_{2k+1} = 1, \quad B_{2k} = A_{2k+1} = 0 \quad (5.45)$$

とにおいて，まとめると次式を得る．

$$\begin{aligned}
 x_{2k}(t) \pm x_{2k+1}(t) &= y_{2k}(t) \begin{bmatrix} 1 \\ c(k\theta) \\ \vdots \\ c((n-1)k\theta) \end{bmatrix} \pm y_{2k+1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ s(k\theta) \\ \vdots \\ s((n-1)k\theta) \end{bmatrix} \\
 &= A \cos \omega_k t \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(k\theta) \\ \vdots \\ \cos((n-1)k\theta) \end{bmatrix} \pm A \sin \omega_k t \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(k\theta) \\ \vdots \\ \sin((n-1)k\theta) \end{bmatrix} \\
 &= A \begin{bmatrix} \cos \omega_k t \\ \cos(\omega_k t \mp k\theta) \\ \vdots \\ \cos(\omega_k t \mp (n-1)k\theta) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

位相を

$$\phi(t, s) = \omega_k t \mp k\theta s = \omega_k t \mp \frac{2\pi k}{n} s \tag{5.47}$$

と定義すると，この位相速度は

$$\frac{ds}{dt} = \pm \frac{\omega_k n}{2\pi k} = \pm \frac{n}{2\pi k} \sqrt{c_0 + 2c_1 \cos \frac{2\pi k}{n}} \tag{5.48}$$

となる．円環上の進行波，後退波，あるいは定在波は，解 (5.46) から得られる．

$n$  が偶数：  $n = 2\ell + 2$  の場合

直交行列

$$H_n = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & c(\theta) & s(\theta) & s(\ell\theta) & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & c(2\theta) & s(2\theta) & s(2\ell\theta) & 1/\sqrt{2} \\ \vdots & & & \dots & \\ 1/\sqrt{2} & & & & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & c((n-1)\theta) & s((n-1)\theta) & s((n-1)\ell\theta) & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

を用いて

$$x = H_n y \tag{5.50}$$



と座標変換すると、式 (5.34) は次式となる.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\{c_0 I_n + c_1 \Lambda_{even}\} y \quad (5.51)$$

ここに,

$$\Lambda_{even} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & c(\theta) & 0 & & & \\ & 0 & c(\theta) & & & \\ & & & c(\ell\theta) & 0 & \\ & & & 0 & c(\ell\theta) & \\ 0 & & & & & -1 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

とおいた.

奇数の場合との違いは,  $\ell$  番目の基本解

$$y_\ell(t) = (A_\ell \cos \omega_\ell t + B_\ell \sin \omega_\ell t) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

である. ここに

$$\omega_\ell = \sqrt{c_0 - c_1} \quad (5.54)$$

とおいた.

### 5.3.2 $C = c_0 I_n + c_1 (P_n + P_n^{-1}) + c_2 (P_n^2 + P_n^{-2})$ の場合

微分方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -Cx = -\{c_0 I_n + c_1 (P_n + P_n^{-1}) + c_2 (P_n^2 + P_n^{-2})\} x \quad (5.55)$$

を考える.

前小節との違いは, 角周波数だけであるので,  $n$  が偶数の場合の固有値をみておこう.

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{c_0 + c_1 + c_2} \\ \omega_k &= \sqrt{c_0 + 2c_1 \cos k\theta + 2c_2 \cos 2k\theta} = \sqrt{c_0 + 2c_1 \cos \frac{2\pi k}{n} + 2c_2 \cos \frac{4\pi k}{n}}, \\ & \quad k = 1, 2, \dots, \ell \\ \omega_0 &= \sqrt{c_0 - c_1 + c_2} \end{aligned} \quad (5.56)$$

とおく. なお, これら角周波数の分布図については, 図 3.3(b) を参照.

## 5.4 結合のトポロジー再考

第3章 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 でみた結合のトポロジーについて再び考えてみよう。ここでは、環状結合として

1. 巡回群  $C_n$  を与える回路トポロジー,
2. 巡回群の直積で与えられる有限群のうち, 最も簡単な  $C_n \times C_m$  対称性をもつ接続, すなわち離散トーラス上の力学系となる回路トポロジー,
3. 結合を一方向としなかった場合に考えられる, 二面体群に関連した回路トポロジー

を取り上げよう。

### 5.4.1 巡回群 $C_n$ を与える回路トポロジー

単位となる力学系を  $n$  個用意して, これらを環状に接続すると, 接続の影響が一方向の性質を持つとき, 巡回群  $C_n$  の対称性が現れる。このトポロジーは,  $C_n$  に関する Cayley 図 (diagram) であり, 最も自然に考えられるトポロジーである。第3章で考えたように, 接続が隣り合わせ (距離1) 以外にも, もっと遠くからの影響を考慮した接続も考えられる。したがってこれらを組み合わせると, 色々な接続が実現できる。図 5.7 に  $n = 10$  の場合の環状結合トポロジーの例を示した。黒丸が単位力学系を, 黒丸の間を結ぶ直線が結合関係を示している。一方向結合を考える場合は有向グラフを考えればよい。

単位回路を2重にして, 環状結合を重ねると一つのトポロジーが考えられる。その一例を図 5.8 に示した。節点間の距離と枝の向きの組み合わせの違いによって色々な場合が考えられよう。

### 5.4.2 $C_n \times C_m$ 対称性をもつ回路トポロジー

巡回群の直積からなる結合トポロジーは一般に離散トーラスとなる。2つの巡回群からなるトーラスの例を図 5.9 に示した。この場合にも結合の枝をどう結ぶかによって様々な結合トポロジーが実現できる。たとえば, 図 5.10 は離散トーラス型環状結合トポロジーの展開図であるが, この図で上下, 左右の対応する数字と文字を適当に置換して結ぶと, それぞれ異なるトポロジーが実現できる。

### 5.4.3 二面体群 $D_n$ を与える回路トポロジー

前の二つの小節で示したグラフを無向グラフ, すなわち双方向結合とみると, これらの結合の対称性は二面体群となる。この場合

1. 巡回群が部分群として含まれるので, 環状結合の性質はとりあえずこの巡回群で検討できる,
2. 対称性が高くなっているため, 巡回群を用いて得られた結果を反転し, 新しい群軌道を得ることができる場合がある,
3. 相反定理の成り立つ系は, 双方向性結合となっていることから, 応用面ではこの結合が自然な場合が多い

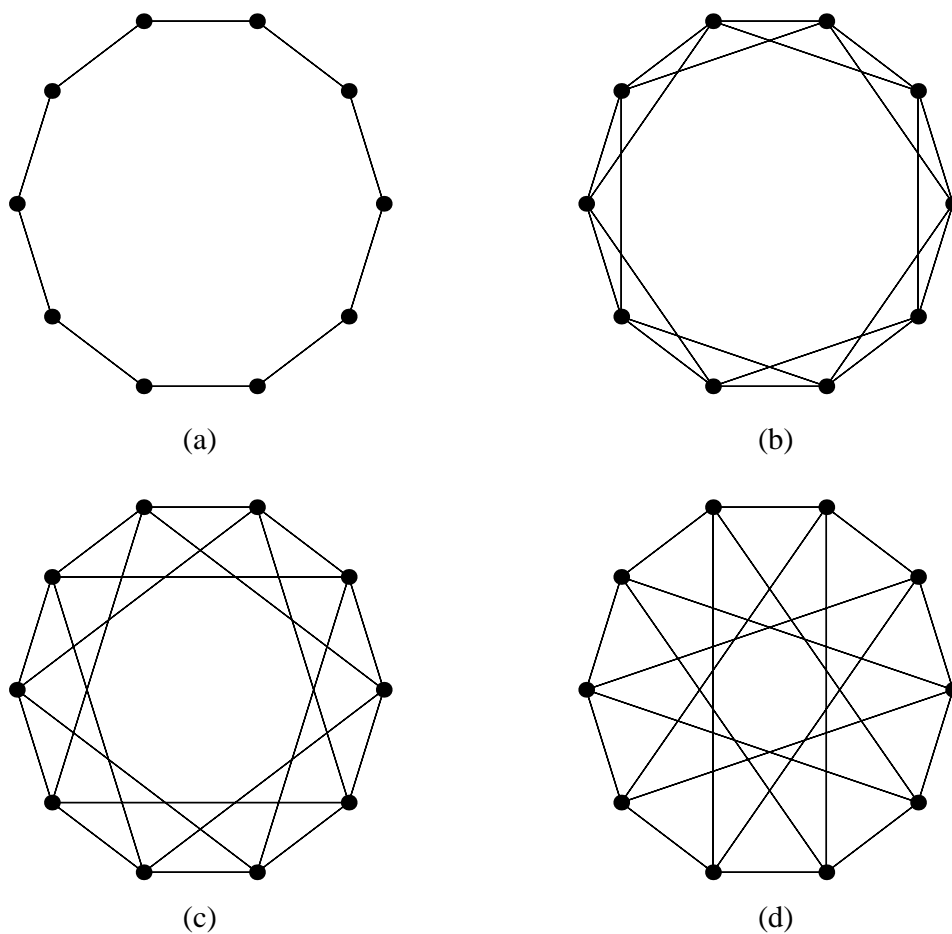


図 5.7  $n = 10$  の場合の環状結合トポロジーの例.

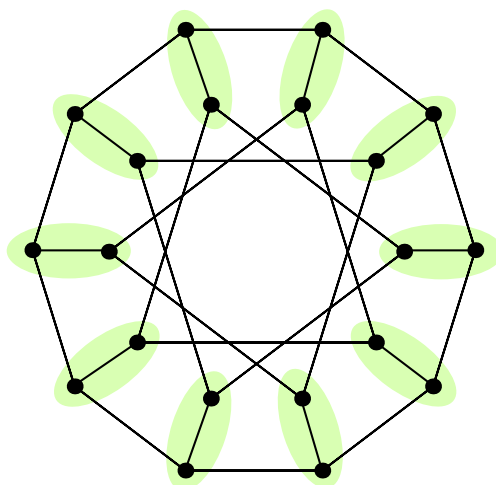


図 5.8 環状結合を二つもつトポロジーの例.

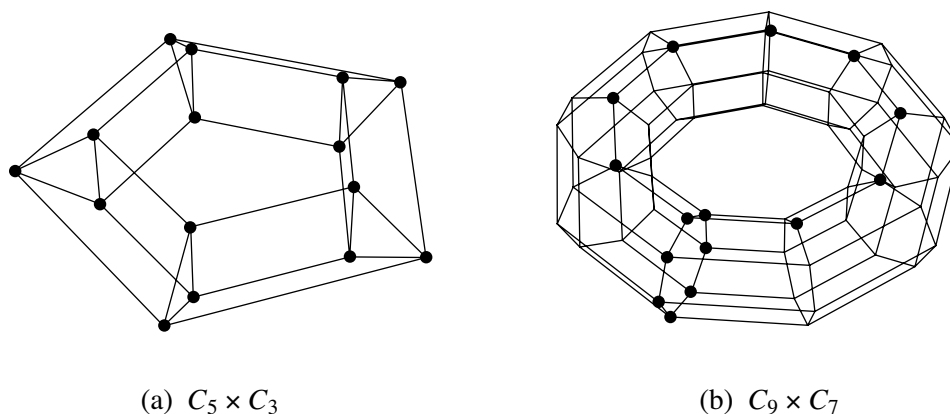


図 5.9 離散トーラス型環状結合トポロジーの例.

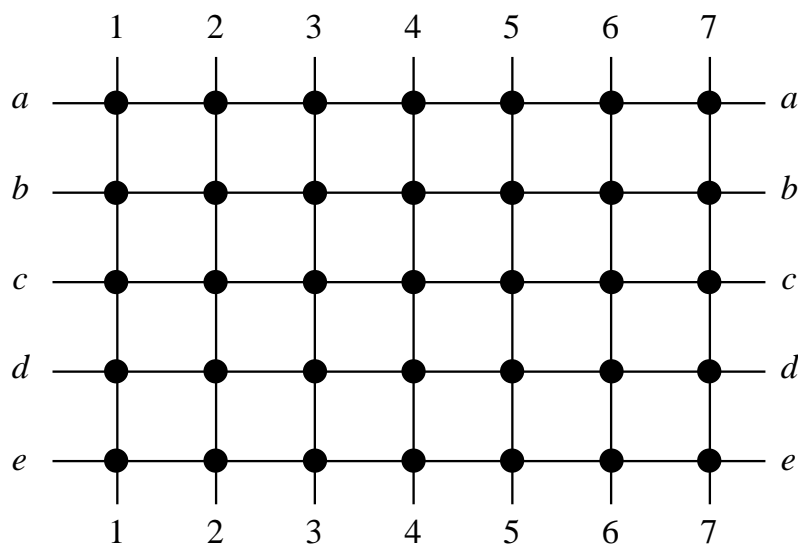


図 5.10 離散トーラス型環状結合トポロジーの展開図.

等の特徴を持っている.

### 5.5 ブロック形巡回行列を係数として持つ線形方程式

この節では、結合のトポロジーを与えて、ブロック形巡回行列を係数として持つ線形方程式を導く例を幾つか取り上げる。ブロック形の方程式を導くことの利点としては、結合の構造を方程式に反映させることができることである。したがって、結果として特性根の分布等を系の構造から決定できたりする。

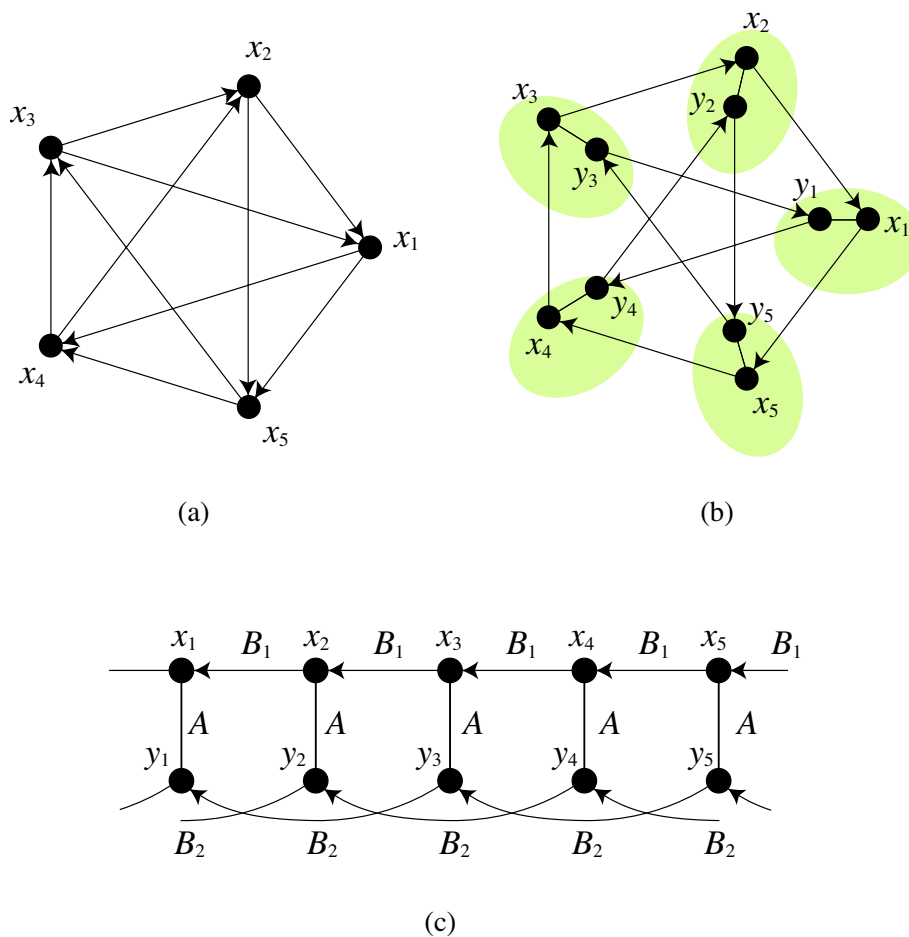


図 5.11  $n = 5$  の場合の環状結合トポロジーの例.

### 5.5.1 巡回群 $C_5$ の例

図 5.11 に  $n = 5$  の場合の環状結合トポロジーの例を示した。黒丸が単位力学系を、黒丸の間を結ぶ枝が結合関係を示している。矢印は影響が一方向に矢印方向に伝わることを表す。図 5.11(a) の系は状態  $x_k$  達のスカラー系を表している。自分自身への影響と他の 2 つの状態からの影響があることから、状態方程式は次式となる。

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= -c_0x_1 - c_1x_2 - c_2x_3 \\
 \frac{dx_2}{dt} &= -c_0x_2 - c_1x_3 - c_2x_4 \\
 &\dots \\
 \frac{dx_5}{dt} &= -c_0x_5 - c_1x_1 - c_2x_2
 \end{aligned}
 \tag{5.57}$$

そこで,  $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_5 \end{bmatrix}^T$  を定義すると, 次の方程式を得る.

$$\frac{dx}{dt} = -(c_0 I_5 + c_1 P_5 + c_2 P_5^2) x \quad (5.58)$$

図 5.11(b) の系を考えよう. 色づけした 2 つの状態をもつ単位力学系が 5 個環状につながった系とみることにしよう. まず, 各単位力学系の方程式を求める.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}y_1 - c_1x_2 \\ \frac{dy_1}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}y_1 - c_2y_3 \end{aligned} \quad (5.59)$$

いま, ベクトル

$$u_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix}, u_5 = \begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

を定義し, 式 (5.59) を書き換えると次式となる.

$$\frac{du_1}{dt} = Au_1 - c_1 B_1 u_2 - c_2 B_2 u_3 \quad (5.61)$$

ここで,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

とおいた. 最後に, 式 (5.61) をまとめてブロック行列で表そう.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & & & & \\ & A & & & \\ & & A & & \\ & & & A & \\ & & & & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} - c_1 \begin{bmatrix} 0 & B_1 & & & \\ & 0 & B_1 & & \\ & & 0 & B_1 & \\ & & & 0 & B_1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} \\ &\quad - c_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_2 & & \\ & 0 & 0 & B_2 & \\ & & 0 & 0 & B_2 \\ B_2 & & & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.63)$$

この方程式より, 状態  $x = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{bmatrix}^T$  についての次式へとまとめることができる.

$$\frac{dx}{dt} = (I_5 \otimes A - c_1 P_5 \otimes B_1 - c_2 P_5^2 \otimes B_2) x \quad (5.64)$$

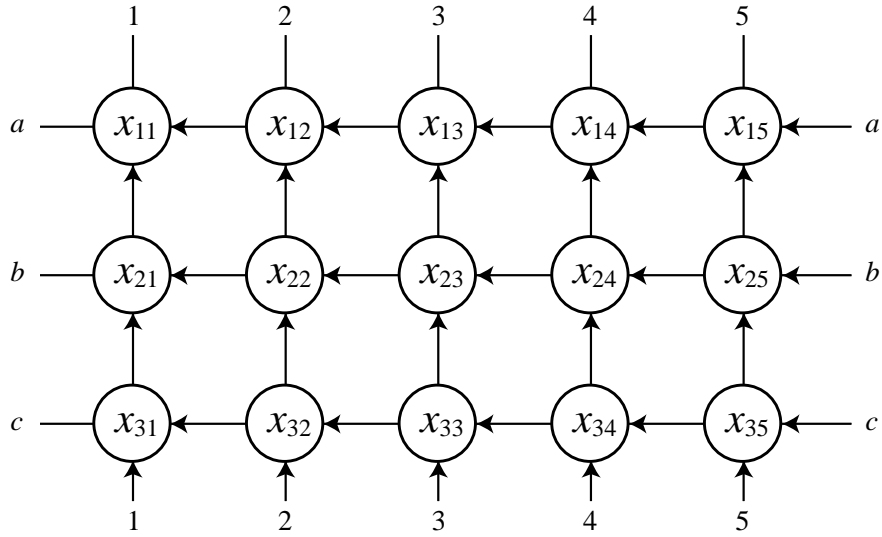


図 5.12 離散トーラスの例. 基本的な格子の場合.

### 5.5.2 離散トーラス上の方程式の例

基本的な格子の場合

図 5.12 に示した接続では、単位力学系が 2 次元格子状に配置されている。上下と左右は同じ番号あるいは文字の枝がつながっていると考える。そうすると、この格子はトーラス上に描かれたグラフと考えるとよい。各単位力学系の状態が  $x_{ij}$  であるとして、微分方程式を導こう。とりあえず  $x_{11}$  に関する方程式は次式となる。

$$\frac{dx_{11}}{dt} = -c_0 x_{11} - c_1 x_{12} - c_2 x_{21} \quad (5.65)$$

次にまず、列方向に並んだ 3 個の状態をひとまとめにして、改めて単位の力学系と考え方程式を導く。すなわち、ベクトル

$$u_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} x_{14} \\ x_{24} \\ x_{34} \end{bmatrix}, u_5 = \begin{bmatrix} x_{15} \\ x_{25} \\ x_{35} \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

を用いて、式 (5.65) 達をまとめる。

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= -au_1 - c_1 P_3 u_1 - c_2 u_2 \\ \frac{du_2}{dt} &= -au_2 - c_1 P_3 u_2 - c_2 u_3 \\ \frac{du_3}{dt} &= -au_3 - c_1 P_3 u_3 - c_2 u_4 \\ \frac{du_4}{dt} &= -au_4 - c_1 P_3 u_4 - c_2 u_5 \\ \frac{du_5}{dt} &= -au_5 - c_1 P_3 u_5 - c_2 u_1 \end{aligned} \quad (5.67)$$

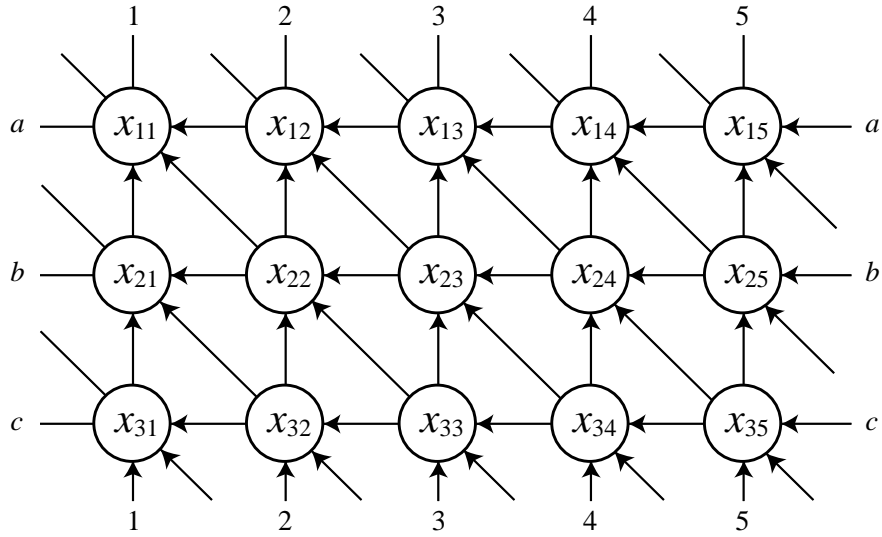


図 5.13 離散トーラスの別の例.

この方程式より、状態  $x = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5]^T$  についての次式へとまとめることができる.

$$\frac{dx}{dt} = -(aI_5 \otimes I_3 + c_1I_5 \otimes P_3 + c_2P_5 \otimes I_3) x \tag{5.68}$$

基本的な格子に 1 本枝を付加した場合

図 5.13 に示した接続は、図 5.12 に示した離散トーラスの接続にさらにもう一本枝を付加したものとなっている.  $x_{11}$  に関する方程式は次式となる.

$$\frac{dx_{11}}{dt} = -c_0x_{11} - c_1x_{12} - c_2x_{21} - c_3x_{22} \tag{5.69}$$

前小節と同様な状態変数ベクトルを定義して用いると、式 (5.68) に付加する項として、式 (5.69) の最後の項を参考にして、項

$$c_3 \begin{bmatrix} 0 & P_3 & & & \\ & 0 & P_3 & & \\ & & 0 & P_3 & \\ & & & 0 & P_3 \\ P_3 & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

があげられる. そこで、最終的に次式を得る.

$$\frac{dx}{dt} = -(aI_5 \otimes I_3 + c_1I_5 \otimes P_3 + c_2P_5 \otimes I_3 + c_3P_5 \otimes P_3) x \tag{5.70}$$

これらの例から、一般に単位力学系  $nm$  個からなる結合力学系の方程式を求めるには、次の手順に従うとよい.



1. 単位となる単体の力学系の方程式を求めておく。これは、結合がどのようなグループにまとめられるかをみるときに役立つ。
2. 単位力学系  $m$  個（あるいは  $n$  個）の部分系からなる結合力学系の方程式を求める。
3. 上で求めた「部分系からなる結合力学系の方程式」を一つの式にまとめる。ここで Kronecker 積が有効に使われる。
4. 少し練習すると、結合格子の様子をみただけで最終の方程式が書けるようになる。

### 5.5.3 方程式 (5.68) の特性根

前節で導出した方程式を解くことを考える。直交行列を使って座標変換し、スカラー方程式を解いて基本解を得る方法はこれまでと同じである。

以下、方程式

$$\frac{dx}{dt} = -(aI_5 \otimes I_3 + c_1 I_5 \otimes P_3 + c_2 P_5 \otimes I_3) x \quad (5.71)$$

の特性根がどのように分布しているか調べることにしよう。

まず、座標変換

$$x = (H_5 \otimes H_3) y \quad (5.72)$$

を考える。ここに、 $H_5, H_3$  は第3章 3.2 式 (3.18) で定義したユニタリ行列である。すると、

$$\frac{dx}{dt} = (H_5 \otimes H_3) \frac{dy}{dt} = -(c_0 I_5 \otimes I_3 + c_1 I_5 \otimes P_3 + c_2 P_5 \otimes I_3) (H_5 \otimes H_3) y$$

より、式 (5.71) は次式に変換される。

$$\frac{dy}{dt} = -\Lambda y \quad (5.73)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Lambda &= (H_5 \otimes H_3)^{-1} (c_0 I_5 \otimes I_3 + c_1 I_5 \otimes P_3 + c_2 P_5 \otimes I_3) (H_5 \otimes H_3) \\ &= c_0 I_5 \otimes I_3 + c_1 I_5 \otimes \Lambda_3 + c_2 \Lambda_5 \otimes I_3 \end{aligned} \quad (5.74)$$

とおいた。さらに

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \varepsilon & & & \\ & & \varepsilon & & \\ & & & \varepsilon^2 & \\ & & & & \varepsilon^3 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = e^{j\frac{2\pi}{3}}, \quad \Lambda_5 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & a & & & \\ & & a^2 & & \\ & & & a^3 & \\ & & & & a^4 \end{bmatrix}, \quad a = e^{j\frac{2\pi}{5}} \quad (5.75)$$

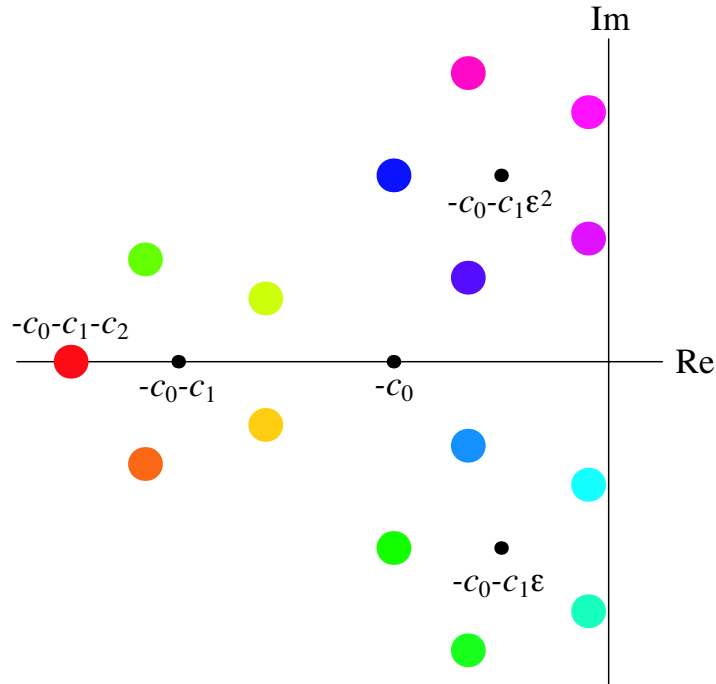


図 5.14 特性根の配置図.

である。そこで、 $-\Lambda$  の 15 個の対角要素が特性根を与える。これらを書き出すと次の 15 個となる。

$$\begin{aligned}
 1: & -c_0 - c_1 - c_2 & 2: & -c_0 - c_1\epsilon - c_2 & 3: & -c_0 - c_1\epsilon^2 - c_2 \\
 4: & -c_0 - c_1 - c_2a & 5: & -c_0 - c_1\epsilon - c_2a & 6: & -c_0 - c_1\epsilon^2 - c_2a \\
 7: & -c_0 - c_1 - c_2a^2 & 8: & -c_0 - c_1\epsilon - c_2a^2 & 9: & -c_0 - c_1\epsilon^2 - c_2a^2 \\
 10: & -c_0 - c_1 - c_2a^3 & 11: & -c_0 - c_1\epsilon - c_2a^3 & 12: & -c_0 - c_1\epsilon^2 - c_2a^3 \\
 13: & -c_0 - c_1 - c_2a^4 & 14: & -c_0 - c_1\epsilon - c_2a^4 & 15: & -c_0 - c_1\epsilon^2 - c_2a^4
 \end{aligned} \tag{5.76}$$

これらの特性根を複素平面上に描くと図 5.14 となる。図から分かるように 2 組の特性根が同時に虚軸を横切る。これは、 $n$  と  $m$  が共に奇数の場合はいつも実現される性質である。

図 5.14 の場合の虚軸上にくる条件を求めておこう。図から分かるように特性根番号 8, 9, 11, 12 がこれらの根である。これらの特性根の実部が 0 となる条件を求めるとよい。

$$\begin{aligned}
 \Re(-c_0 - c_1\epsilon - c_2a^2) &= \Re\left(-c_0 - c_1e^{j\frac{2\pi}{3}} - c_2e^{j\frac{4\pi}{5}}\right) \\
 &= -c_0 - c_1 \cos \frac{2\pi}{3} - c_2 \cos \frac{4\pi}{5} = 0
 \end{aligned} \tag{5.77}$$

となる。

## 第6章

# 環状結合したニューロン回路

1次おくれ系の状態を飽和特性を加味した出力で互いに結合した力学系が、神経回路網の活動を巨視的にみた力学系モデルといえる。これは多数個の生きたニューロンからなる集合の平均的な活動状況をマクロにとらえた最も簡単な力学系である。

このように、集合体としてのニューロンの活動をマクロにとらえて1個の仮想的なニューロンと考え、スカラーの状態変数で表現し、これらのニューロン達が互いに影響を及ぼしている結合系を考える。各集合体としての平均活動状態のダイナミクスを定義し、これらを基本単位力学系と考え、種々の結合方式を検討して、集合体の力学系の挙動をみるのがこの章の目的である。

すなわち、この章では最も簡単な力学系を環状に接続し、接続から導かれる非線形現象を検討する。できれば、現象と接続方法の対応を明確にし、環状結合回路の設計に役立てたい。神経回路網モデルはこれらを検討するための典型的な例となっている。

### 6.1 巨視的ニューロンモデル

結合時の結合の重み係数の符号に注目すると、以下に定義する仮想的なニューロンは興奮性ニューロン (excitatory neuron) と抑制性ニューロン (inhibitory neuron) の2種類である。

興奮性ニューロンは正の出力 (正の重み係数) を他のニューロンに入力として供給し、抑制性のニューロンは負の出力 (負の重み係数) を他のニューロンに入力として供給する。

これら2種類のニューロンを考えることは、電気回路においてインダクタとキャパシタの二つの素子を考えることにも対応する。このことは神経回路網と電気回路網のあいだの類推を考えることを可能とする。他方、神経回路網モデルは非線形一方向結合であり、電気回路素子の接続は線形双方向である。このような接続の相反性の有無などの違いもみられる\*1。

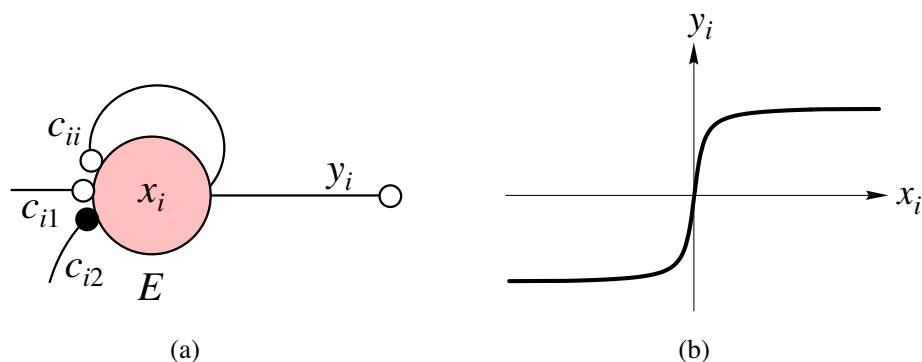


図 6.1 興奮性ニューロンとその出力特性.

### 6.1.1 興奮性ニューロンと抑制性ニューロン

#### 興奮性ニューロン

興奮性ニューロン (Excitatory neuron) は図 6.1(a) で示される神経細胞のモデルで, その特性は次式で表される.

$$\begin{aligned} \tau \frac{dx_i}{dt} + x_i &= a_i + \sum_{j=1}^n c_{ij} y_j \\ y_i = \sigma(x_i) &= \tan^{-1} x_i \end{aligned} \quad (6.1)$$

ここに  $x_i$  は  $i$  番目のニューロンの内部状態,  $y_i$  はこの素子の出力を表す, 図 6.1(b). また,  $a_i$  はこのニューロンへの定数入力を表す. 右辺の加算は, このニューロンへの入力を表す. 係数  $c_{ij}$  は入力加算の重み係数である. 図では 3 個の入力が加えられた例を示している. 入力の重みは  $c_{i1}$ ,  $c_{i2}$ ,  $c_{ii}$  でいずれも正の値とする. 入出力の○印は興奮性からの, また●印は抑制性からの入出力であることを表すこととする.

なお, 出力  $y_i$  は, 飽和特性を表すシグモイド関数で, たとえば  $\tan^{-1} x$  や  $\tanh x$  のような関数である.

#### 抑制性ニューロン

抑制性ニューロン (Inhibitory neuron) は図 6.2(a) で示される神経細胞のモデルで, その特性は次式で表される.

$$\begin{aligned} \tau \frac{dx_i}{dt} + x_i &= a_i + \sum_{j=1}^n c_{ij} y_j \\ y_i = -\sigma(x_i) &= -\tan^{-1} x_i \end{aligned} \quad (6.2)$$

\*1 これらのアナロジーについては, 信学技報 NLP94-114(1995-03)「アナログ神経回路と電気回路の 1 アナロジーについて」を参照.

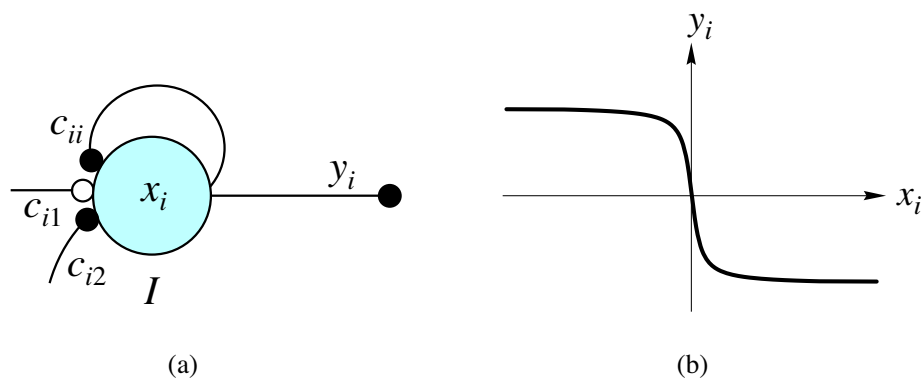


図 6.2 抑制性ニューロンとその出力特性.

興奮性ニューロンとの違いは、唯一は出力の負特性である、図 6.2(b) . したがって、この出力が接続される場合の重み係数は常に非正值とする。図では、入力として前の興奮性の場合と同様 3 個の例を示しておいた。

### Wilson-Cowan モデルとの関係

集合体としてのニューロンモデルとして、Wilson-Cowan モデルが知られている。ここで、上記のニューロンモデルが Wilson-Cowan モデルと等価であることをみておこう。Wilson-Cowan モデルは次式で定義される。

$$\tau \frac{dx_i}{dt} + x_i = \sigma \left( a_i + \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \right) \quad (6.3)$$

式中的変数は、上で考えたものと同じである。なお、出力特性  $\sigma$  は、通常次式が用いられている。

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (6.4)$$

等価性をみるために、式 (6.3) をベクトル表示すると次式となる。

$$\tau \frac{dx}{dt} + x = S(a + Cx) \quad (6.5)$$

ここに、

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, S(x) = \begin{bmatrix} \sigma_1(x_1) \\ \sigma_2(x_2) \\ \vdots \\ \sigma_n(x_n) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ & & & \\ & & \ddots & \\ c_{n1} & c_{n2} & & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

を表す。

さて、変数変換

$$u = a + Cx \quad (6.7)$$

を行うと、式 (6.3) は次式となる.

$$\tau \frac{du}{dt} + u = a + CS(u) \quad (6.8)$$

これは、式 (6.1) や式 (6.2) のベクトル表示にほかならない. なお、非線形特性は、定数入力  $a$  を調整して奇関数特性と仮定しても一般性は失われない.

以上のことから等価性が言えた. この報告では、原点に対する対称性を論じやすくするために、式 (6.1) や式 (6.2) の表現を用いることにする.

## 6.2 少数個のニューロンからなるニューロン回路

### 6.2.1 環状結合したニューロン回路の例

興奮性ニューロンと抑制性ニューロンを組み合わせる環状結合回路を構成しよう. 2 種類のニューロンを  $n$  個用いて環状結合した場合の異なる回路を数え上げると、図 6.3 と図 6.4 に示した回路が構成できる.

具体的な数え上げは、次のようにすればよい. まず、ニューロンの個数  $n$  を与えると、各ニューロンを興奮性あるいは抑制性と考えることによって  $2^n$  個の回路が考えられる. しかし、これらの回路間には、円環の回転によって重なる回路が存在する. すなわち、これら重なる回路は巡回群による一つの軌道に属する. そこで、軌道同値な回路を一つと考え、異なる軌道の代表元を示した図が図 6.3 や図 6.4 である.

なお、環状回路を円環に沿った回転と裏返しを許した二面体群で軌道同値を考えると、軌道の個数は変わってくる. 結合が双方向性の場合には二面体群の軌道を考えることとなる.

さて、これらの環状回路の挙動について概観することにしよう. 興味は、平衡点や周期解の個数と安定性、対称性によるこれらの分類である.

### 6.2.2 ニューロン発振器： $n = 2$ の場合

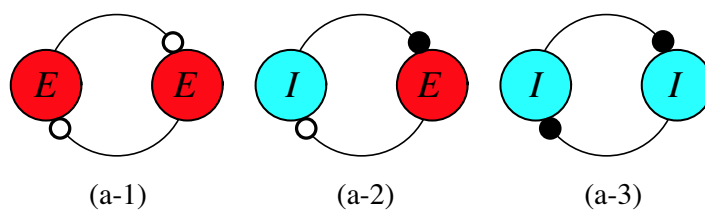
まず、図 6.3(a) に示した回路の回路方程式を導こう.

図 6.3(a-1) の回路

$$\begin{aligned} \tau \frac{dx_1}{dt} + x_1 &= c\sigma(x_2) \\ \tau \frac{dx_2}{dt} + x_2 &= c\sigma(x_1) \end{aligned} \quad (6.9)$$

図 6.3(a-2) の回路

$$\begin{aligned} \tau \frac{dx_1}{dt} + x_1 &= -c\sigma(x_2) \\ \tau \frac{dx_2}{dt} + x_2 &= c\sigma(x_1) \end{aligned} \quad (6.10)$$

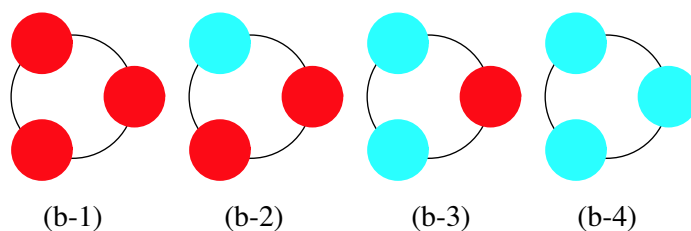


(a-1)

(a-2)

(a-3)

(a)  $n = 2$  の場合



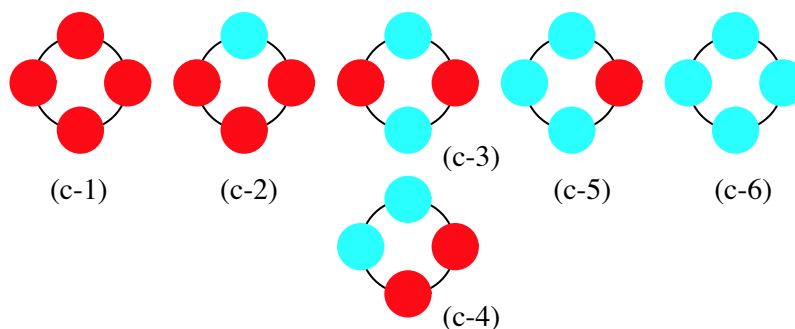
(b-1)

(b-2)

(b-3)

(b-4)

(b)  $n = 3$  の場合



(c-1)

(c-2)

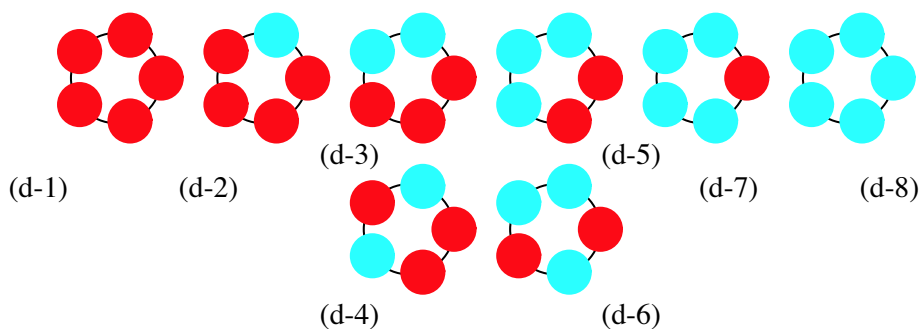
(c-3)

(c-5)

(c-6)

(c-4)

(c)  $n = 4$  の場合



(d-1)

(d-2)

(d-3)

(d-5)

(d-7)

(d-8)

(d-4)

(d-6)

(d)  $n = 5$  の場合

図 6.3 環状結合ニューロン回路の例.

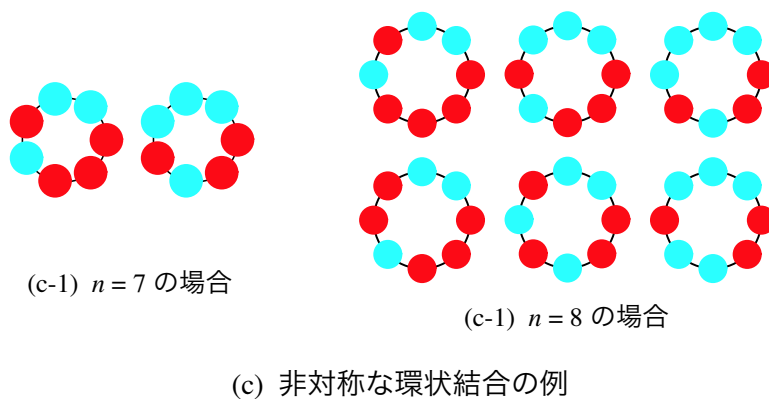
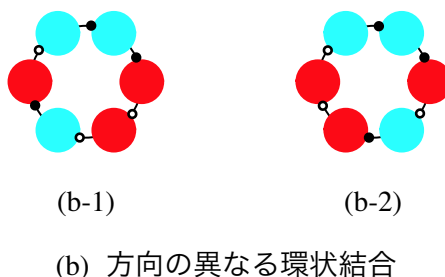
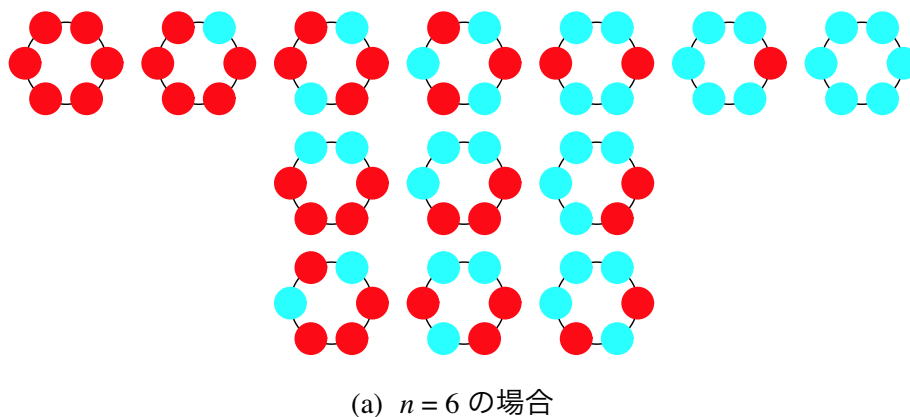


図 6.4 環状結合ニューロン回路の例.  $n = 6$  と  $n = 7$  の場合.

図 6.3(a-3) の回路

$$\begin{aligned} \tau \frac{dx_1}{dt} + x_1 &= -c\sigma(x_2) \\ \tau \frac{dx_2}{dt} + x_2 &= -c\sigma(x_1) \end{aligned} \tag{6.11}$$

となる.

式 (6.9) および式 (6.11) の回路では, 平衡点 (原点) での特性方程式が

$$\chi(\mu) = (\mu + 1)^2 - (c\sigma(0))^2 = (\mu + 1 + c\sigma(0))(\mu + 1 - c\sigma(0)) = 0 \tag{6.12}$$

となる. 従って



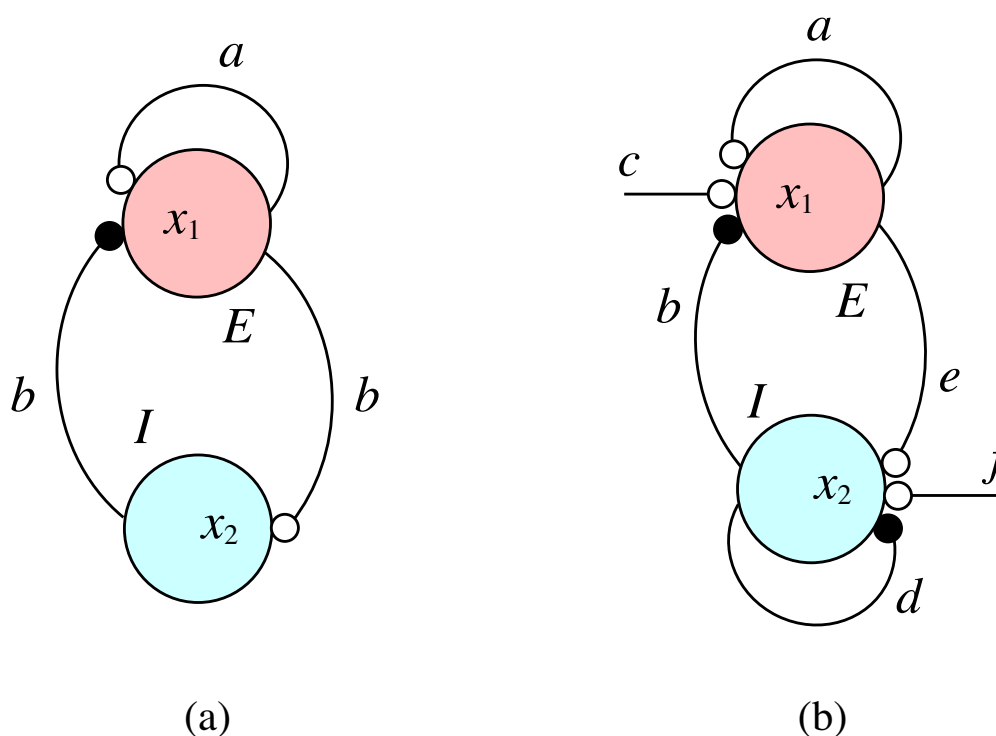


図 6.5 自励発振回路.

1.  $c\sigma(0) > 1$  の場合, 原点は安定. 平衡点はこの原点のみとなる. また, 原点は大域的に安定となる.
2.  $c\sigma(0) < 1$  の場合, 原点はサドル. したがって, 原点以外に
  - (a) 式 (6.9) では, 点  $P_+(x_0, x_0)$  と点  $P_-(-x_0, -x_0)$  が安定平衡点となる,
  - (b) 式 (6.11) では, 点  $P_+(x_0, -x_0)$  と点  $P_-(-x_0, x_0)$  が安定平衡点となる.
 すなわち, いずれの回路も 2 つの安定平衡点を持つ双安定回路となる.

式 (6.10) は原点を唯一の平衡点として持つ. 特性方程式は

$$\chi(\mu) = (\mu + 1)^2 + (c\sigma(0))^2 = 0 \tag{6.13}$$

となるので, 原点は漸近安定であることが分かる.

さて, 図 6.3(a-2) の回路に, 興奮性ニューロンに自己フィードバックを施して自励発振を起こさせよう. 図 6.5(a) の回路を考える.

回路方程式は次式となる.

$$\begin{aligned} \tau \frac{dx_1}{dt} + x_1 &= a\sigma(x_1) - b\sigma(x_2) \\ \tau \frac{dx_2}{dt} + x_2 &= b\sigma(x_1) \end{aligned} \tag{6.14}$$

原点での特性方程式は次式となる.

$$\chi(\mu) = \mu^2 + (2 - a\sigma(0))\mu + 1 - a\sigma(0) + (b\sigma(0))^2 = 0 \tag{6.15}$$

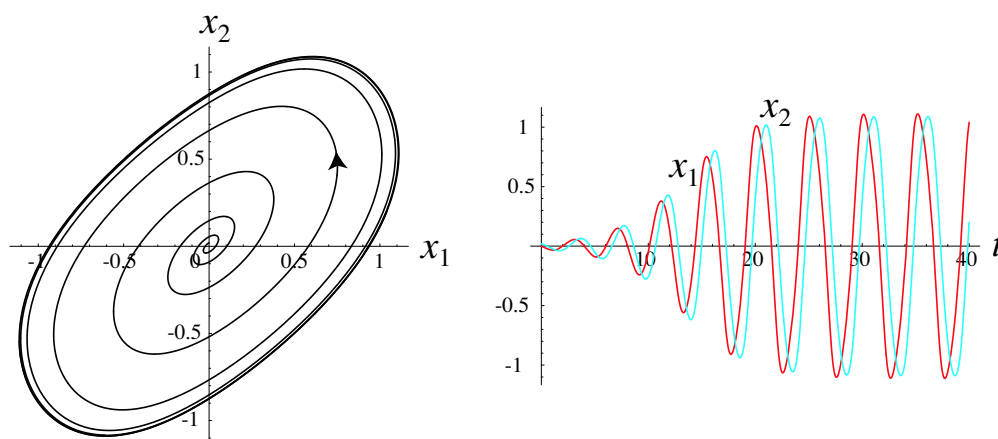


図 6.6 自励発振の例.

したがって、Hopf 分岐の条件は

$$\begin{aligned} 2 - a\sigma(0) &= 0 \\ (b\sigma(0))^2 - 1 &> 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

となる. そこで,  $a\sigma(0) > 2$  となるように係数  $a$  を調整すると発振し, その角周波数はほぼ  $\omega = \sqrt{(b\sigma(0))^2 - 1}$  と見積もることができる. 図 6.6 に自励発振の例を示した. この例では, 式 (6.14) のパラメータを  $\tau = 1.0$ ,  $a = 2.5$ ,  $b = 2.0$  とおいた.

ここでは, 環状結合の最も単純な場合を示すために, 時定数や結合パラメータの数を少なくした. 式 (6.14) に含まれるパラメータをそれぞれ独立な数におくと, 一般的な発振回路となる. 図 6.5(b) の回路を参照\*2. 今後このノートでは, これら回路をニューロン発振回路の単位回路として用いることにしよう.

なお, 式 (6.14) はパラメータ  $a$ ,  $b$  を適切に選んだ場合

$$a\sigma(x_1) = a \tan^{-1}(x_1) \cong a \left( x_1 - \frac{x_1^3}{3} \right), \quad b\sigma(x) \cong bx$$

の近似ができる. その場合は式 (6.14) は次式となる.

$$\begin{aligned} \tau \frac{dx_1}{dt} &= (a-1)x_1 - \frac{a}{3}x_1^3 - bx_2 \\ \tau \frac{dx_2}{dt} &= bx_1 \end{aligned} \quad (6.17)$$

これは, van der Pol 方程式あるいは Rayleigh 方程式とみることができる.

\*2 この回路の分岐解析は興味ある未解決問題と思われる. BVP 方程式に似ているのでリミットサイクルを 3 個もつパラメータが見つかりそうだ.

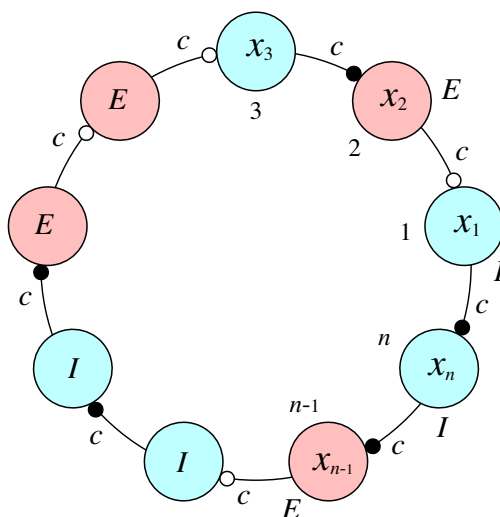


図 6.7 環状に結合したニューロン回路.

### 6.3 近傍からの結合による環状ニューロン回路

#### 6.3.1 最隣接素子との結合による環状ニューロン回路

この小節では、2種類のニューロンからなる環状回路の一般的な性質を調べよう。すなわち、図 6.7 のような  $n \geq 3$  個のニューロンを環状に結合した回路を解析する。

これらの回路は、 $n$  が大きくなると結合回路の数（回路の種類）も多くなるが、一般的に次の簡単な性質を持つ。

1. 環状回路に含まれる抑制性ニューロンの個数が偶数か奇数かによって大別して次の二つの場合に分かれる。
  - (a) 抑制性ニューロンの個数が偶数の場合：原点の  $D$  型分枝により、2つの安定平衡点を持つ。発振は起こらない。
  - (b) 抑制性ニューロンの個数が奇数の場合：原点の Hopf 型分枝により、安定リミットサイクルが生じる。このリミットサイクルは円環に沿った進行波である。
2. 原点の固有値の分布は、抑制性ニューロンの個数が偶数か奇数かによって定まる。すなわち、2種類の分布しかない。
3. 原点の固有値の内、実部が最大の固有値が虚軸を横切るとき、上述の性質の解が分岐する。このときの固有ベクトルの方向が平衡点のパターンや周期解の位相差を決定する。

これらの性質をみるために、次のような  $n$  個のニューロンからなる環状結合系を考えよう。

$$\begin{aligned} \tau \frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + c\sigma_2 f(x_2) \\ \tau \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + c\sigma_3 f(x_3) \\ &\dots \\ \tau \frac{dx_{n-1}}{dt} &= -x_{n-1} + c\sigma_n f(x_n) \\ \tau \frac{dx_n}{dt} &= -x_n + c\sigma_1 f(x_1) \end{aligned} \quad (6.18)$$

ここで、 $\sigma_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  を  $\sigma_k = 1$  または  $\sigma_k = -1$  のように符号を表す  $n$  個の数とする。勿論、 $\sigma_k = 1$  を与えるニューロンは興奮性ニューロンを、また  $\sigma_k = -1$  を与えるのは抑制性ニューロンを意味する。

なお、非線形関数はシグモイド関数（奇関数）で、この節では  $f(x)$  で表す。上式をベクトルで表すと

$$\tau \frac{dx}{dt} = -x + cP_n S_n f(x) = -x + cQ_n f(x) \quad (6.19)$$

となる。ここに、 $P_n$  は単位巡回行列を、

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Q_n = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \\ \sigma_1 & & & 0 \end{bmatrix}, \quad S_n = \text{diag} [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_n] \quad (6.20)$$

を表す。

この方程式 (6.19) の原点は平衡点である。また、原点の分岐現象を解析すれば上述の性質を導くことができる。しかも、原点の分岐に関するヤコビ行列の固有値問題は、本質的には第3章3.9でみた行列  $Q_n$  の固有値問題に帰着できる。以下、このことを具体的に検討しよう。

まず、式 (6.19) の平衡点は次式を満足する。

$$\begin{aligned} x_k &= c\sigma_{k+1} f(x_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \\ x_n &= c\sigma_1 f(x_1) \end{aligned} \quad (6.21)$$

したがって、これらの式を逐次代入して  $x_1$  に関するスカラー方程式

$$x_1 = c\sigma_2 f(c\sigma_3 f(\dots c\sigma_1 f(x_1) \dots)) = \left\{ \prod_{k=1}^n \sigma_k \right\} cf(cf(\dots cf(x_1) \dots)) \quad (6.22)$$

を得る。この方程式から次の事がわかる。今、

$$\sigma = \prod_{k=1}^n \sigma_k \quad (6.23)$$

とおくと、

1.  $\sigma = -1 < 0$  の場合, すなわち奇数個の抑制性ニューロンを含んでいる場合は, 式 (6.22) の右辺が単調減少となり, 原点以外に平衡点は存在しない.
2.  $\sigma = 1 > 0$  の場合, すなわち偶数個の抑制性ニューロンを含んでいる場合は, 複数個の平衡点の可能性が起こる.

いずれの場合にも, 原点の安定性を検討する必要がある. 以下, 簡単のために

$$cf'(0) = \delta \quad (6.24)$$

とおく. 式 (6.19) の原点での変分方程式は次式となる.

$$\begin{aligned} \tau \frac{d\xi_k}{dt} &= -\xi_k + c\sigma_{k+1}f'(0)\xi_{k+1} = -\xi_k + \delta\sigma_{k+1}\xi_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \\ \tau \frac{d\xi_n}{dt} &= -\xi_n + c\sigma_1f'(0)\xi_1 = -\xi_n + \delta\sigma_1\xi_1 \end{aligned} \quad (6.25)$$

したがって, 特性方程式は次式となる.

$$\begin{aligned} \chi(\mu) &= \begin{vmatrix} -1-\mu & \delta\sigma_2 & & & \\ & -1-\mu & \delta\sigma_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1-\mu & \delta\sigma_n \\ \delta\sigma_1 & & & & -1-\mu \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n \{(1+\mu)^n - \sigma\delta^n\} = 0 \end{aligned} \quad (6.26)$$

このことから, 特性根および固有ベクトルは,  $a = e^{j\frac{2\pi}{n}}$ ,  $b = e^{j\frac{\pi}{n}}$  において, 次のように計算できる.

1.  $\sigma = 1 > 0$  の場合,

$$(1+\mu)^n = \delta^n \quad (6.27)$$

より,

$$\mu_k = -1 + \delta a^{k-1} \quad k = 1, \dots, n \quad (6.28)$$

となる. また, それぞれの特性根に対する固有ベクトルは, 式 (3.85) より,

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ a^{k-1}s_2 \\ a^{2(k-1)}s_3 \\ \vdots \\ a^{(n-1)(k-1)}s_n \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6.29)$$

で与えられる. ここで,

$$s_\ell = \prod_{k=2}^{\ell} \sigma_k, \quad \ell = 2, \dots, n \quad (6.30)$$

とおいた.

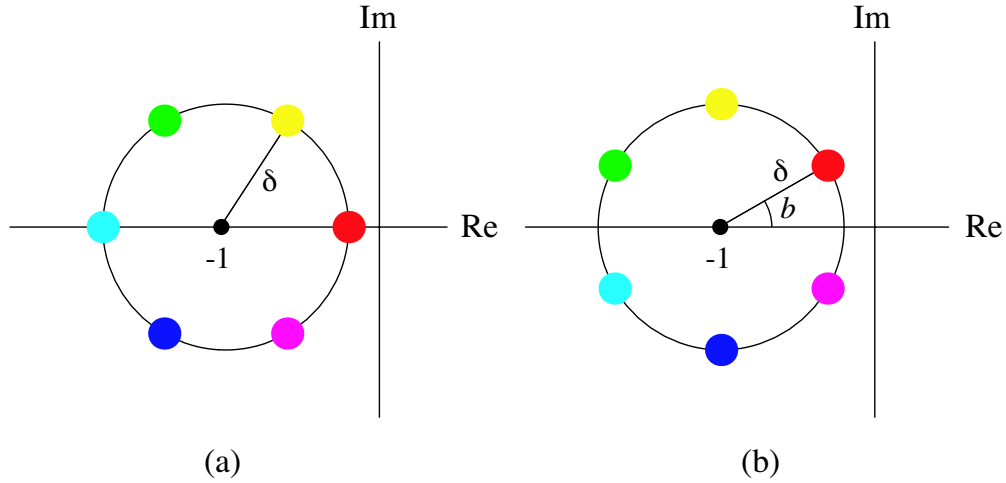


図 6.8  $n = 6$  の場合の特性根の配置図. (a)  $\sigma = 1 > 0$  の場合, (b)  $\sigma = -1 < 0$  の場合.

2.  $\sigma = -1 < 0$  の場合,

$$(1 + \mu)^n = -\delta^n = e^{j\pi} \delta^n \tag{6.31}$$

より,

$$\mu_k = -1 + \delta b a^{k-1} \quad k = 1, \dots, n \tag{6.32}$$

となる. また, それぞれの特性根に対する固有ベクトルは, 式 (3.93) より,

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ a^{k-1} b s_2 \\ (a^{k-1} b)^2 s_3 \\ \vdots \\ (a^{k-1} b)^{n-1} s_n \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{6.33}$$

で与えられる.

このことから, 特性根は, 環状回路に含まれる抑制性ニューロンが偶数か奇数かの違いだけで 2 つの場合に分かれ, 個々の抑制性ニューロンがどう配置されるかには依存しない. 他方, 固有ベクトルは, 式 (6.30) で定まる符号数によって, 各成分の符号が変化する.

特性根の配置図の一例を図 6.8 に示した.

### 6.3.2 小数個のニューロンによる環状回路例: $\sigma = 1$ の場合

図 6.3 と図 6.4 に示した  $n = 3, 4, 5, 6$  個のニューロンを環状に結合した回路を解析しよう. 抑制性ニューロンが偶数個含まれる場合と奇数個含まれ場合を別々に検討しよう.

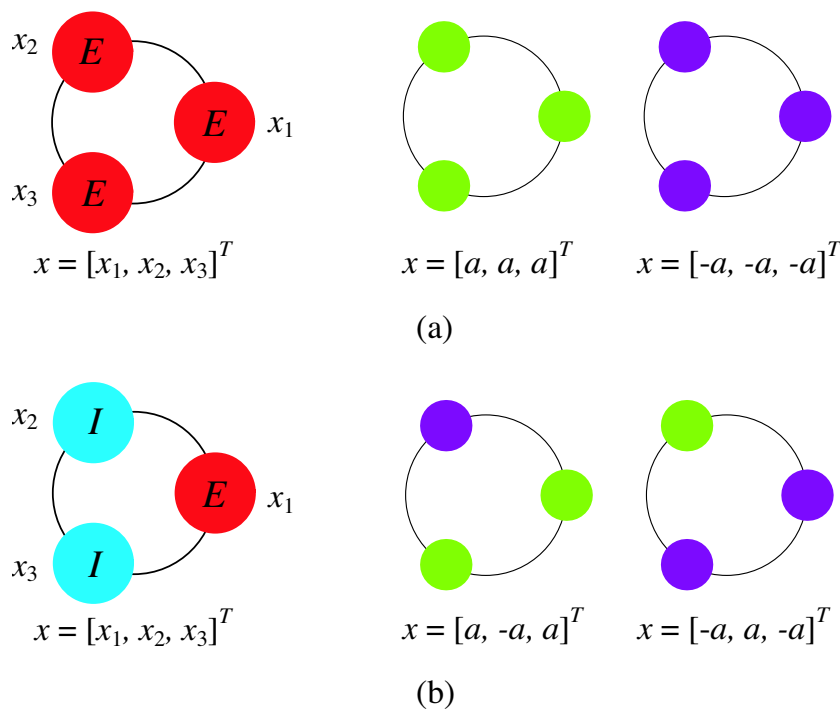


図 6.9  $n = 3$  で抑制性ニューロンが偶数個の場合の平衡点パターン.

$n = 3$  個のニューロンからなる環状回路

図 6.9 に示したように、すべてが興奮性ニューロンからなる回路と、2 つの抑制性ニューロンを含む回路の場合が考えられる。いずれの回路も原点は  $\delta = 1$  で  $D$  型分枝を起し、

$$O_0 \rightarrow O_1 + 2O_0$$

に従って、 $\delta > 1$  で 2 つの安定な平衡点が原点から分枝する。この平衡点は、複素平面で実軸上原点を横切って変化する特性根に対応した固有ベクトル方向に位置する。これらの固有ベクトルは、式 (6.29) および式 (6.33) より、

$$\text{図 (a) では, } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix}; \text{ 図 (b) では, } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -a \\ a \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

となる。なお、この式では分枝した一方の平衡点の座標を示した。図に描いてあるように、原点对称 (反転対称) な平衡点が対称性から自動的に求められる。

以下、このような  $D$  型分枝の状況を、単に「原点が  $D$  型分枝し、パターン  $(a, a, a)$  の平衡点が発生する」のように言うことにする。この場合、反転対称な平衡点  $(-a, -a, -a)$  は、パターン  $(a, a, a)$  で代表し表現していると考ええる。

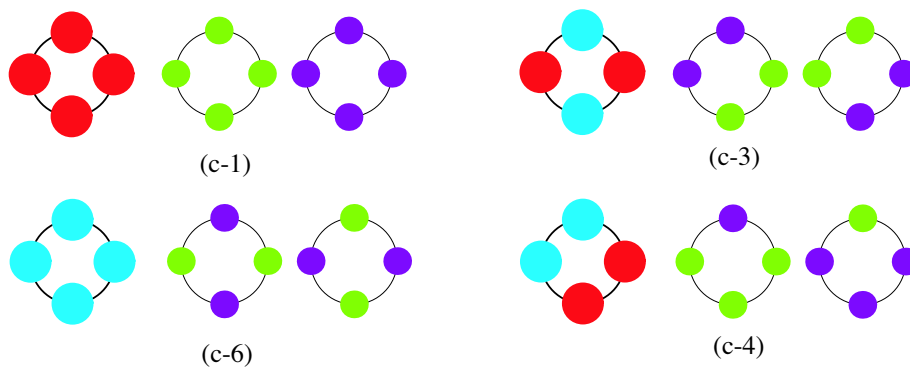


図 6.10  $n = 4$  で抑制性ニューロンが偶数個の場合の平衡点パターン.

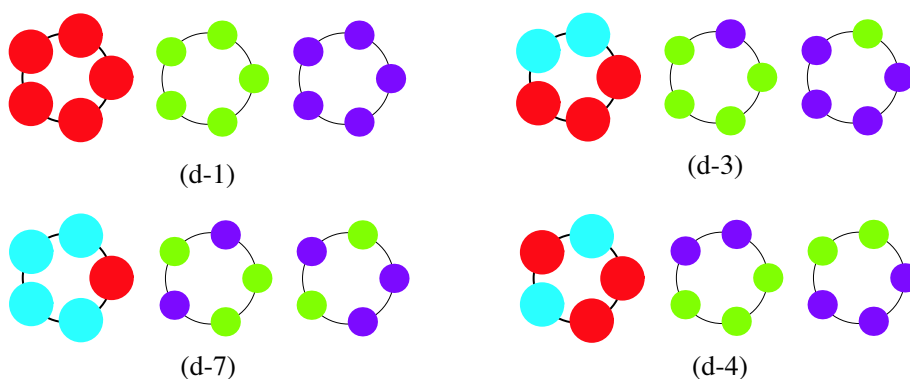


図 6.11  $n = 5$  で抑制性ニューロンが偶数個の場合の平衡点パターン.

$n = 4, 5, 6$  個のニューロンからなる環状回路

図 6.10 から図 6.12 に  $n = 4$  から  $n = 6$  の場合の平衡点パターンを示した.

### 6.3.3 小数個のニューロンによる環状回路例： $\sigma = -1$ の場合

$n = 3$  個のニューロンからなる環状回路

抑制性ニューロンが 1 個の場合と 3 個の場合が考えられる. それぞれの回路方程式は次式となる.

$$\begin{aligned} \tau \frac{dx_1}{dt} &= x_1 - cf(x_2) \\ \tau \frac{dx_2}{dt} &= x_2 + cf(x_3) \\ \tau \frac{dx_3}{dt} &= x_3 + cf(x_1) \end{aligned} \tag{6.35}$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{dx_1}{dt} &= x_1 - cf(x_2) \\ \tau \frac{dx_2}{dt} &= x_2 - cf(x_3) \\ \tau \frac{dx_3}{dt} &= x_3 - cf(x_1) \end{aligned} \tag{6.36}$$



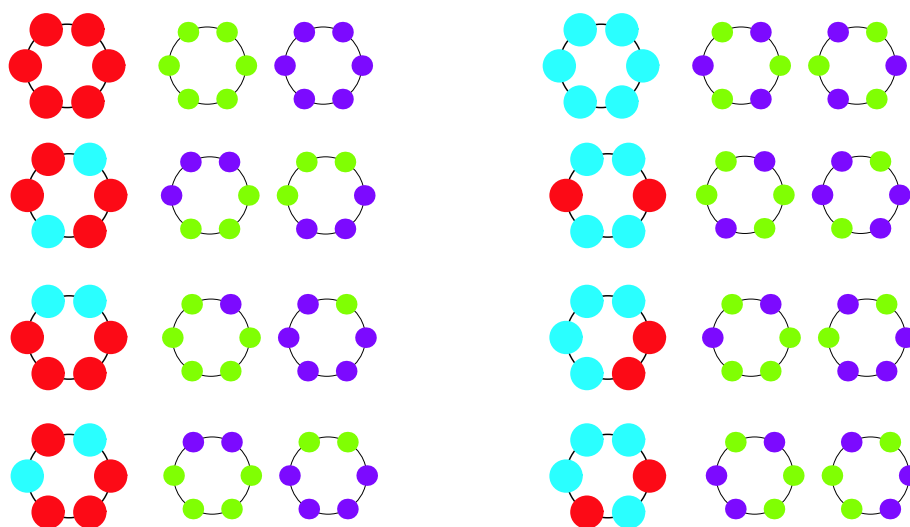


図 6.12  $n = 6$  で抑制性ニューロンが偶数個の場合の平衡点パターン.

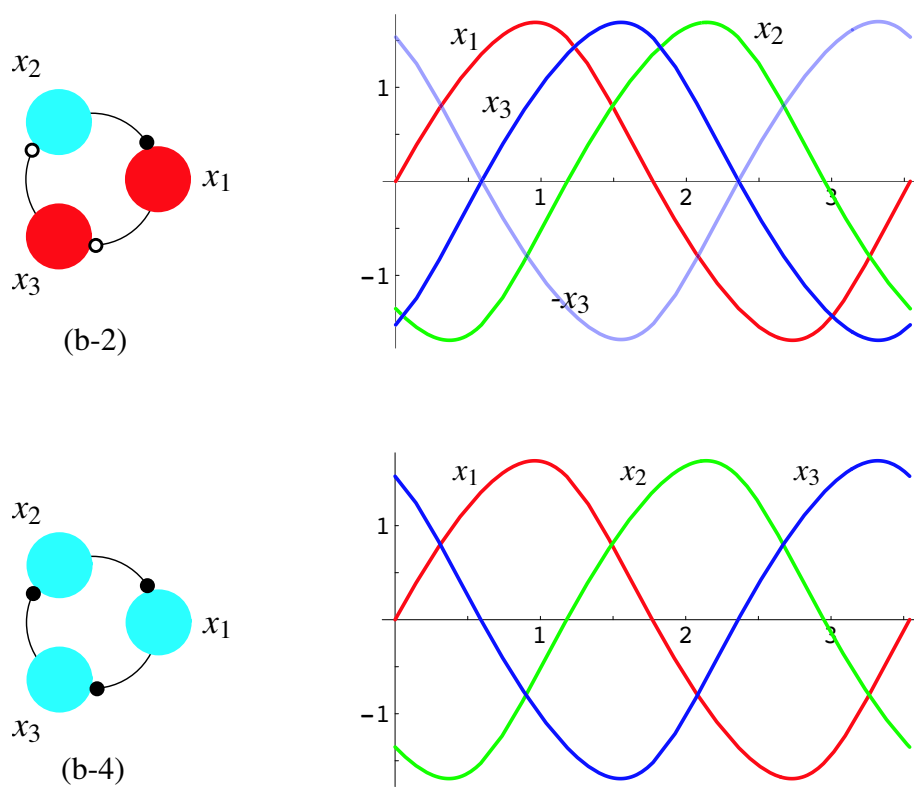


図 6.13  $n = 3$  で抑制性ニューロンが奇数個の場合の周期波形のパターン.

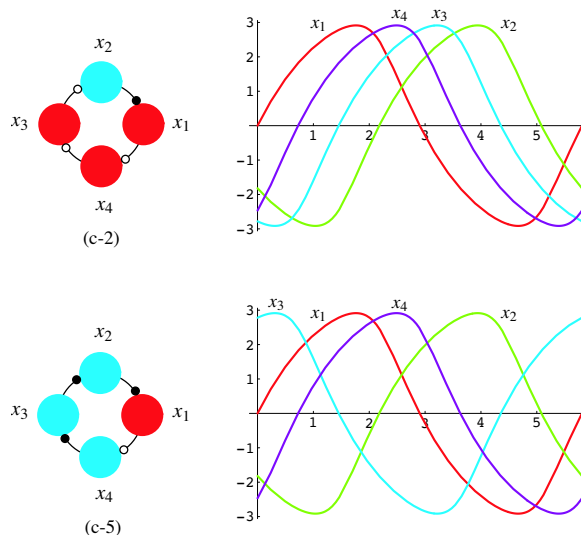


図 6.14  $n = 4$  で抑制性ニューロンが奇数個の場合の周期波形のパターン.

図 6.13 にそれぞれの場合の発振波形の一例を示した. ここで,  $c = 3$  とおき,  $f(x) = \tan^{-1} x$  とおいた.

図から分かるように, もし  $x_3$  の符号を変えると, 図中の回路 (b-2) は回路 (b-4) となる. これは, 式 (6.35) で考えると容易に理解できる. すなわち, 2 つの回路は線形変換で移り合える等価な回路といえる. このような, 力学系の族の間に成り立つ対称性については, 次の小節で考察する.

### $n = 4, 5, 6$ 個のニューロンからなる環状回路

図 6.14 から図 6.16 に  $n = 4$  から  $n = 6$  の場合の周期波形のパターンを示した.

### 6.3.4 環状ニューロン回路族が持つ対称性

#### 直感的な考察

これまでに見た幾つかの環状ニューロン回路の平衡点や周期振動のパターンから, ニューロン回路間にある種の等価性があることが分かる. すなわち, 環状ニューロンの個数  $n$  を固定して考えると,

1. 抑制性ニューロンの個数が偶数か奇数かによって環状回路の挙動は, 平衡点をもつ力学系であるか, あるいは周期振動を持つ力学系であるか, 2 種類に分かれる.
2. どちらの力学系についても, 平衡点や周期振動のパターンが適当な状態の符号変換のみで互いに移り変わる.

という性質が読みとれる. このことは個数  $n$  を固定して考えると, 本質的に 2 種類の力学系しか存在していないことを意味している.

以上の性質を証明する前に, ここでは  $n = 6$  の場合について具体的に検討しておこう.

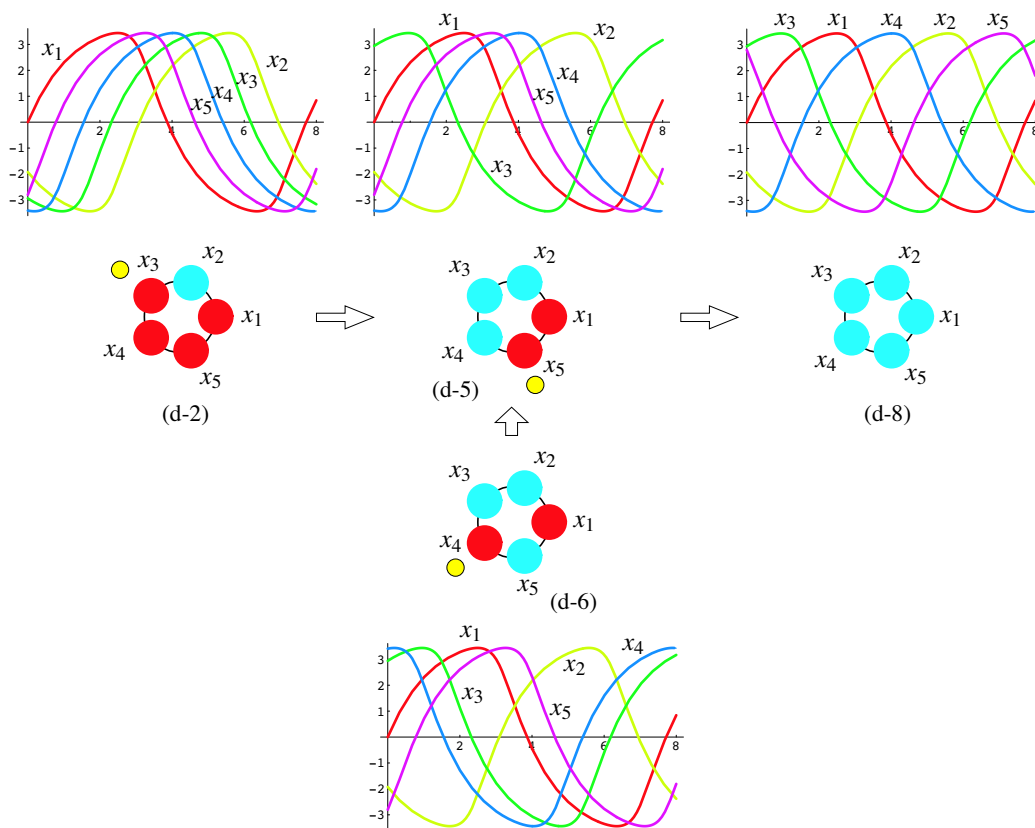


図 6.15  $n = 5$  で抑制性ニューロンが奇数個の場合の周期波形のパターン.

一般に、環状結合回路の一つのニューロンの状態  $x_k$  の状態方程式は、図 6.17(a) を例のとして考えると、次式となる.

$$\begin{aligned} \tau \frac{dx_{k-1}}{dt} &= -x_{k-1} + cf(x_k) \\ \tau \frac{dx_k}{dt} &= -x_k + cf(x_{k+1}) \end{aligned} \tag{6.37}$$

ここで、状態  $x_k$  の符号を  $-x_k$  のように変えた場合を考えよう. 式 (6.37) は次式となる.

$$\begin{aligned} \tau \frac{dx_{k-1}}{dt} &= -x_{k-1} - cf(x_k) \\ \tau \frac{dx_k}{dt} &= -x_k - cf(x_{k+1}) \end{aligned} \tag{6.38}$$

この式は、符号変換後の力学系が図 6.17(a) の下段のようなニューロン結合系に変わった回路の方程式を表している. 同様な考察が、図 6.17(b) についても成り立つ. すなわち、次の性質が成り立つ.

1. 引き続き  $k$  番目と  $k+1$  番目の二つのニューロンが同種類の場合、 $k$  番目の符号を変えた回路は、これら二つのニューロンの特性を興奮性なら抑制性に、抑制性なら興奮性に変えた回路となる. この場合、変換前の回路と変換後の回路では、興奮性あるいは抑制性ニューロンの個数が 2 個増減する.

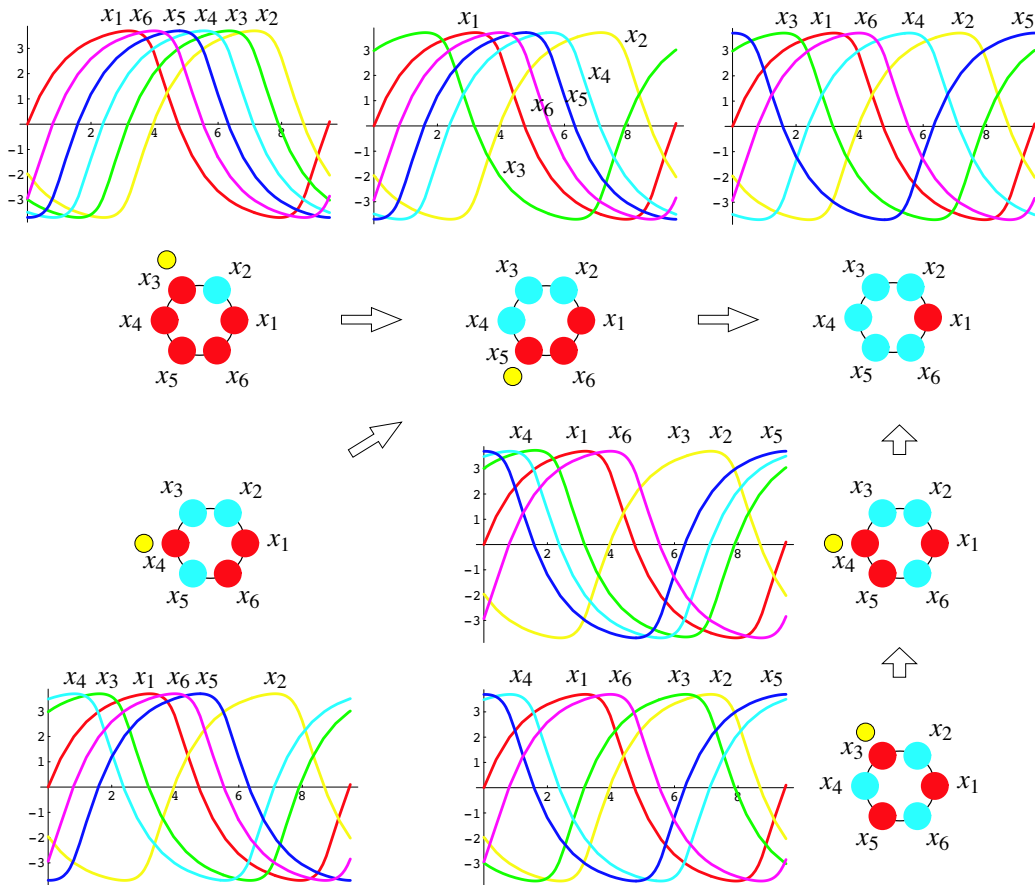


図 6.16  $n = 6$  で抑制性ニューロンが奇数個の場合の周期波形のパターン.

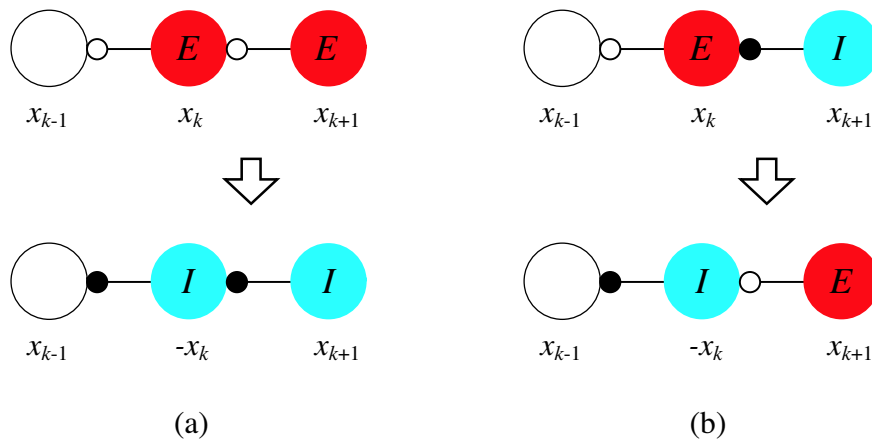


図 6.17 ニューロンの状態を反転した場合の等価変換の例.

2. 引き続き  $k$  番目と  $k+1$  番目の二つのニューロンが異種類の場合,  $k$  番目の符号を変えた回路は, これら二つのニューロンの特性が入れ替わる. 変換前後の回路で, 興奮性あるいは抑制性ニューロンの個数は変化しない.
3. これらの符号変換は, 力学系間の状態の線形変換であるから, 動的特性は変換前後で等価といえる.

さて, この性質を用いて  $n=6$  の場合の環状回路族を分類してみよう. 図 6.17(a), (b) に, 黄色の○印で示したニューロンの状態を反転した場合に移り変わる環状回路を矢印で示した. この図と, 先に示した図 6.12 と図 6.16 から上の事実が容易に読みとれるであろう. 同様な反転操作は図 6.15 にも示しておいた.

### 環状力学系に働く群

さて, これまでの結果を少し整理しながら上で述べた直感的な事実を検証しよう. 最初に, 環状ニューロン回路族に働く巡回群について考える.

興奮性ニューロンと抑制性ニューロン 2 種類のニューロンを  $n$  個使って環状回路を構成する.

まず,  $n$  個の各ニューロンとしてどちらのニューロンを選択するかによって,  $2^n$  個の回路が考えられる. これが  $n$  個のニューロンで構成できる最大数の回路集合である. 図 6.19(a) 参照.

次に, 円環に沿って互いに重なる回路は, 明らかに同じ動的挙動を示すから,  $n$  次の巡回群  $C_n$  を  $2^n$  個の回路に作用させて, 軌道による同値類に分類する. 図 6.19(b) 参照. これまでに考察した回路集合はすべてこの軌道の代表元についてであった.

その結果, 群軌道による同値類の代表元として得られた回路達について動的性質を考察することとなる.

### 座標変換が作る群

$n$  個のニューロンからなる環状回路の回路方程式は, 一般にベクトル表示で式 (6.19) で示される. すなわち,

$$\tau \frac{dx}{dt} = -x + cP_n S_n f(x) = -x + cQ_n f(x) \quad (6.39)$$

となる. ここに,  $P_n$  は単位巡回行列を,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Q_n = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \\ \sigma_1 & & & 0 \end{bmatrix}, \quad S_n = \text{diag} [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \cdots \quad \sigma_n] \quad (6.40)$$

を表す. また, 非線形関数はシグモイド関数 (奇関数) で,  $f(x)$  で表す.

さて, 状態の符号を反転させる座標変換

$$u = \text{diag} [1 \quad 1 \quad \cdots \quad -1 \quad \cdots \quad 1] x = g_k x, \quad k = 1, 2, \cdots, n \quad (6.41)$$

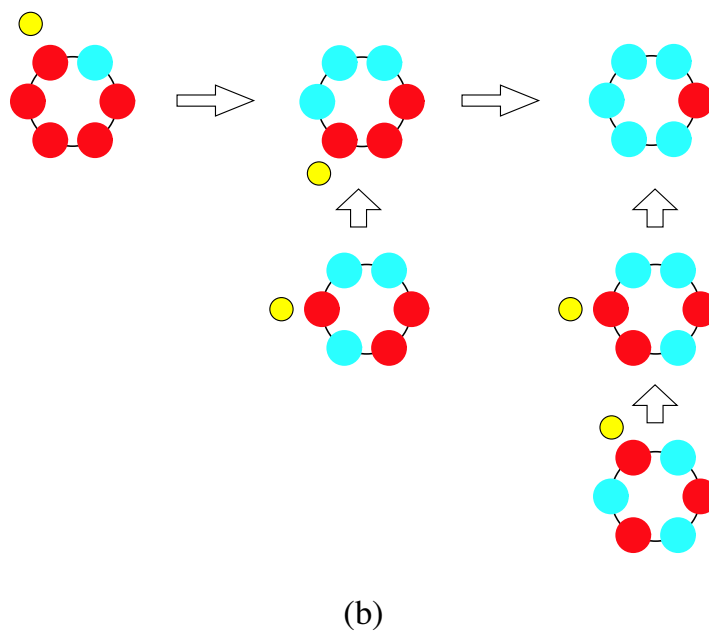
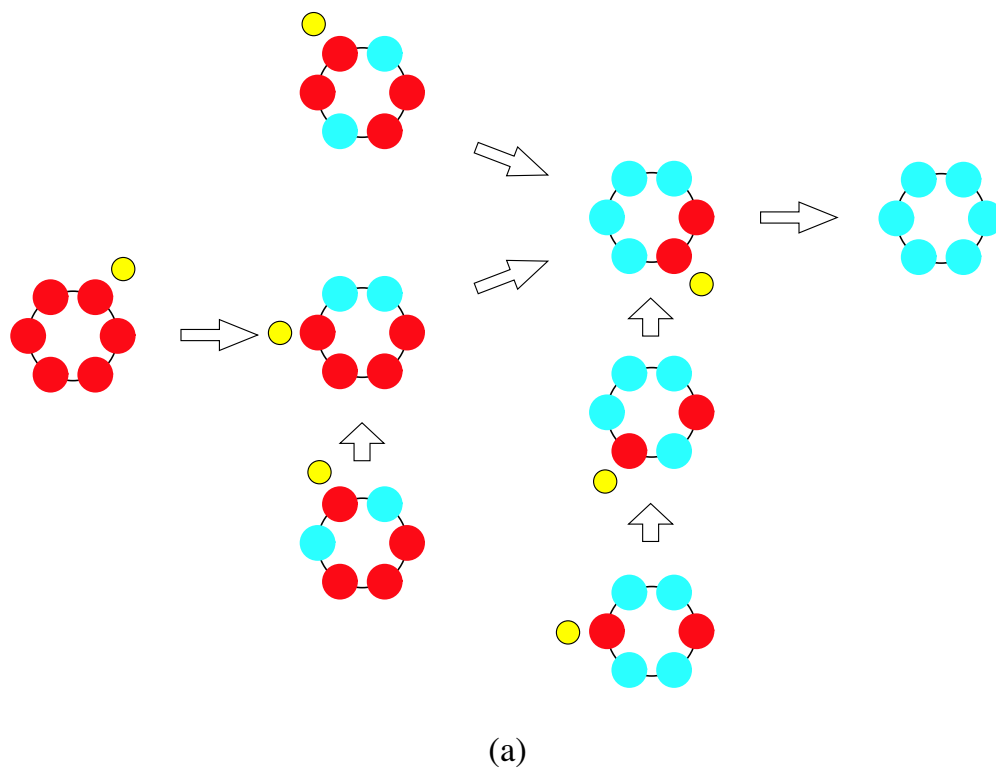


図 6.18 ニューロンの状態を反転した場合の等価変換.  $n = 6$  の例.

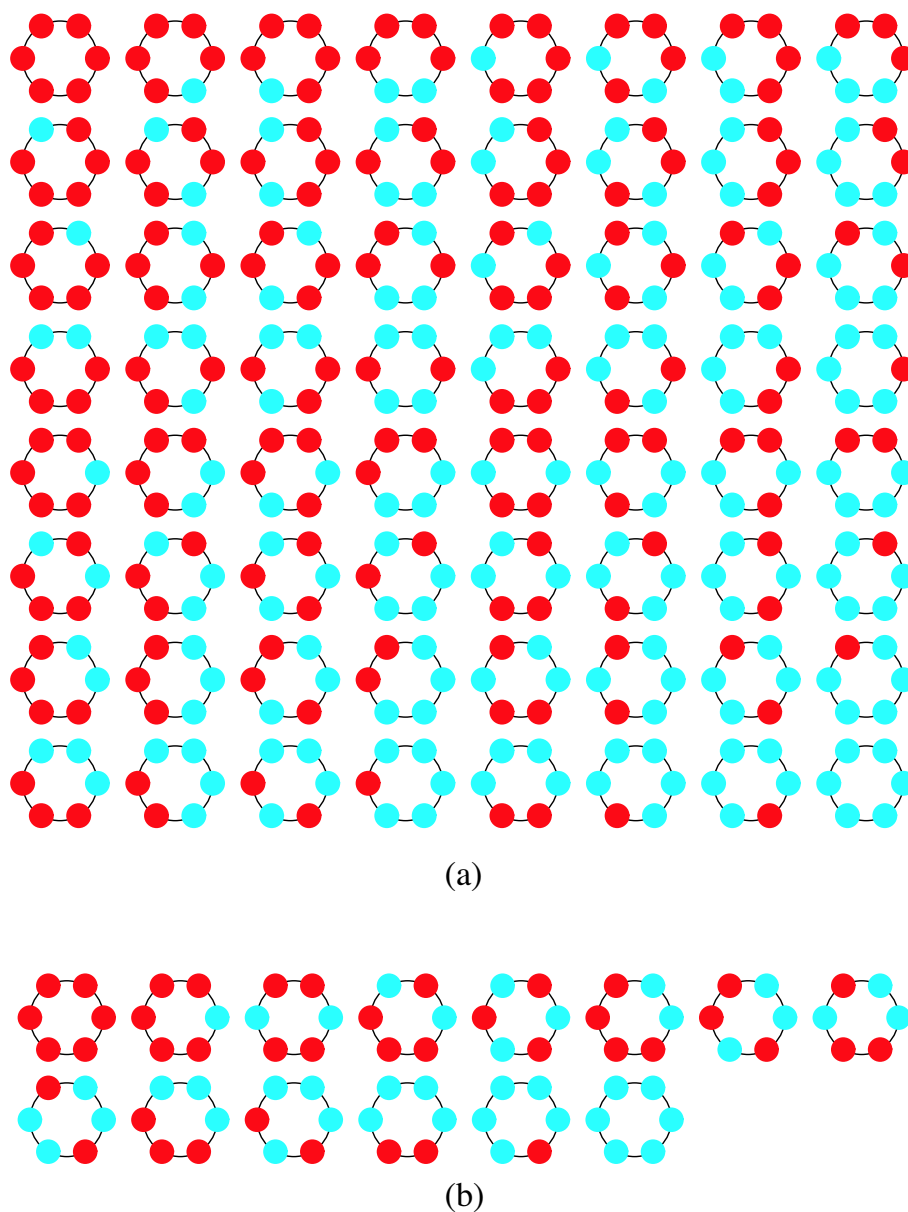


図 6.19 2 種類のニューロンを  $n$  個使った環状力学系,  $n = 6$  の例. (a)  $2^n$  個の回路, (b) 巡回群による軌道の代表元.

と, これらを生成元とする行列群  $G$  を考えよう.  $G \cong C_2 \times C_2 \times \cdots \times C_2 \times C_2$   <sup>$n$  copy</sup> であり, 従って,  $|G| = 2^n$  である. このことから,

$$\forall g \in G \Rightarrow g^{-1} = g \tag{6.42}$$

の性質が導かれる.

環状力学系の特徴づけ

各環状回路に対応する回路方程式 (6.39) は、各ニューロンと結合の情報を、隣のニューロンからの入力項の係数に持っている。すなわち、

$$P_n S_n = Q_n \quad (6.43)$$

が個々の回路の特徴を示している。

そこで、 $\forall g \in G$  を用いて状態の座標変換

$$u = gx \quad (6.44)$$

を行った場合、方程式 (6.39) がどう変換されるかをみてみよう。

$$\tau \frac{du}{dt} = -u + cg P_n S_n f(g^{-1}u) = -u + cg P_n S_n g^{-1} f(u) \quad (6.45)$$

となる。従って、 $g \in G$  はこの方程式に  $g P_n S_n g^{-1}$  の形で作用している。

実際、これが作用になっていることは簡単にみることができる。すなわち、

1.  $\forall P_n S_n, I_n \in G \Rightarrow I_n P_n S_n I_n = P_n S_n$
2.  $\forall P_n S_n, \forall g_1, g_2 \in G \Rightarrow g_2 (g_1 P_n S_n g_1^{-1}) g_2^{-1} = (g_2 g_1) P_n S_n (g_2 g_1)^{-1}$

である。

最後に、この作用によって  $2^n$  個の力学系 (6.39) が 2 つの軌道に分けられることは、直感的な考察の項で検討したとおりである。

### 6.3.5 環状ニューロン回路の発振：比較的ニューロン数の大きい場合

ここでは、多数個のニューロンからなる環状回路の発振の様子を観察しておく。これまでは、比較的少数個の環状結合回路をみてきた。ニューロン数を増やすとどのような振動がみられるであろうか。幾つかの例で観察しよう。

抑制性ニューロンのみからなる環状回路

奇数個の抑制性ニューロンのみからなる環状回路には、隣のニューロンと互いにほとんど逆相で振動する発振がみられる。この発振は、円環に沿って包絡線波動が進行する。この様子の例を図 6.20 に示した。

この図で (a) は  $n = 21$  の場合、(b) は  $n = 61$  の場合を示している。それぞれ、(a-1)、(b-1) は円環に沿ったニューロンの並びで、ある時刻でみたニューロン間の位相の状況を、(a-2)、(b-2) はそれらを横軸に展開した図を、また (a-3)、(b-3) は時間波形を表している。互いに隣り合わせて逆位相になっているが、一部で相の反転する場所があり、この反転場所が時計回りに進行波となって回転する。



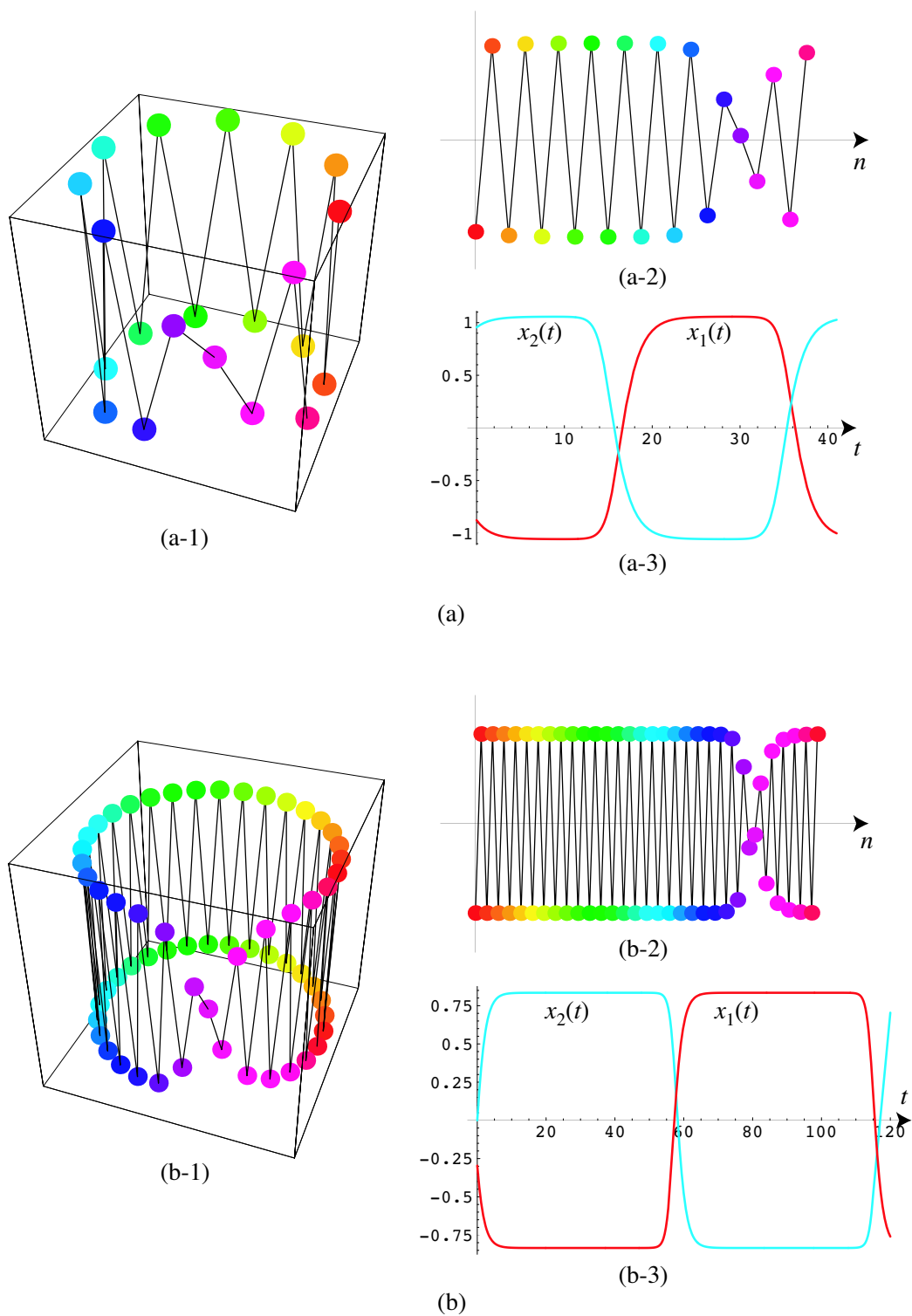


図 6.20 抑制性ニューロンのみからなる環状回路の振動. (a)  $n = 21$  個の回路, (b)  $n = 61$  個の回路.

- 6.4 多重結合した環状ニューロン回路
- 6.5 ねじれ環状結合したニューロン回路
- 6.6 指定した平衡点を持つニューロン回路