

# ウィーンブリッジ型発振回路のダイナミクスについて

川上 博

2002 年 1 月 19 日

## 目次

1	はじめに	1
2	ウィーンブリッジ型発振回路	2
2.1	$R_4$ を非線形抵抗とした発振器	2
2.1.1	図 2(a) に示した回路の回路方程式	2
2.1.2	図 2(b) に示した回路の回路方程式	5
2.1.3	図 2(c) に示した回路の回路方程式	5
2.2	$R_1$ を非線形抵抗とした発振器	6
2.2.1	図 3(a) に示した回路の回路方程式	6
2.2.2	図 3(b) に示した回路の回路方程式	6
2.2.3	図 3(c) に示した回路の回路方程式	8
3	回路のダイナミクス	8
3.1	回路方程式 (26) の動的性質	9
3.1.1	回路方程式 (26) の正規化	9
3.2	回路方程式 (27) の動的性質	10
3.2.1	回路方程式 (27) の正規化	10

## 1 はじめに

発振回路は、電子回路の中でも定常状態が動的に変化する特殊な回路である。このことから、回路の設計には回路方程式の動的性質を十分に解析し、本質を見失うことのないようにしなければならない。

しかし、実際には次の 2 点に注意して回路を設計すると、大抵の場合うまく動作する回路ができる。

1. 回路の平衡点を不安定化し、振動状態を実現する。
2. 非線形素子を用いて、振動状態の振幅を適切な値に落ち着かせる。

第 1 番目の条件は、平衡点まわりの線形回路の考察から、平衡点が不安定となる条件を導き、回路定数をそのように選択すればよい。具体的には、負性抵抗やフィードバック回路を使用して

この条件を実現する．これは言い換えると，平衡点まわりの線形化システムが持つ固有値の一组を純虚数とする条件である．力学系理論ではこの条件のことを Hopf 分岐の条件と呼んでいる．そこで，この部分の設計には，線形システム理論で用いられる種々の方法を適用できる．電子回路の教科書では，この不安定化手法のみが述べられている．

第 2 番目の条件は，振動状態の振幅を適切な値に落ち着かせることである．このためには，回路に含まれるどれかの線形抵抗を非線形抵抗に置き換えるとよい．置き換える抵抗の電圧が，キャパシタ電圧の一次結合で表されている場合には電圧制御型の非線形抵抗を，置き換える抵抗の電流が，インダクタ電流の一次結合で表されている場合には電流制御型の非線形抵抗を用いる．

しかし，このようにして構成した回路が，必ずしも大域的に安定な回路となっていない．この点が最初に注意した動的性質の重要性に関係している．動的性質を解析するには，力学系の理論が役にたつ．回路方程式の定性的な考察と，数値計算を組み合わせると大域的な性質の理解が容易になる．

実際，長嶺君が卒業研究のテーマで苦しんだのはこの大域安定性の問題であった．以下，ウィーンブリッジ型発振回路を例にして，このことを検討してみよう．

## 2 ウィーンブリッジ型発振回路

ウィーンブリッジ (Wien bridge) は，図 1 に描いた抵抗とキャパシタからなる閉路を用いる．この図の (a) と (b) は同じ閉路を表している．以後，オペアンプをつないだ回路の表現には図 (b) を使うことにする．

### 2.1 $R_4$ を非線形抵抗とした発振器

図 2 に示した回路は，ウィーンブリッジ型発振回路である．まず，この図の回路の回路方程式を導こう．

#### 2.1.1 図 2 (a) に示した回路の回路方程式

抵抗  $R_4$  を次式で定義される電圧型非線形抵抗と仮定する．

$$i_{R4} = g(v_{R4}) \quad (1)$$

すると，図中の電圧  $v_0$  は次式となる．

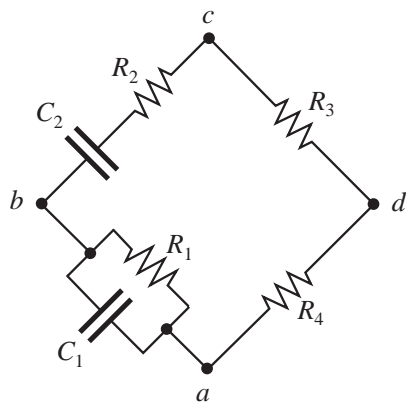
$$v_0 = v_1 + R_3 g(v_1) \quad (2)$$

$R_2$  を流れる電流から，次の回路方程式を得る．

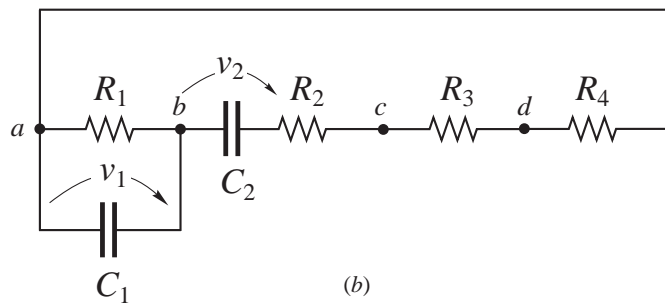
$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{v_1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \{R_3 g(v_1) - v_2\} \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{R_2} \{R_3 g(v_1) - v_2\} \end{aligned} \quad (3)$$

この式から  $v_2$  を消去して  $v_1$  の方程式を求めると次式となる．

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} - \frac{R_3}{R_2 C_1} g'(v_1) \right) \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} v_1 = 0 \quad (4)$$



(a)



(b)

図 1: ウィーンブリッジを構成する抵抗とキャパシタ.

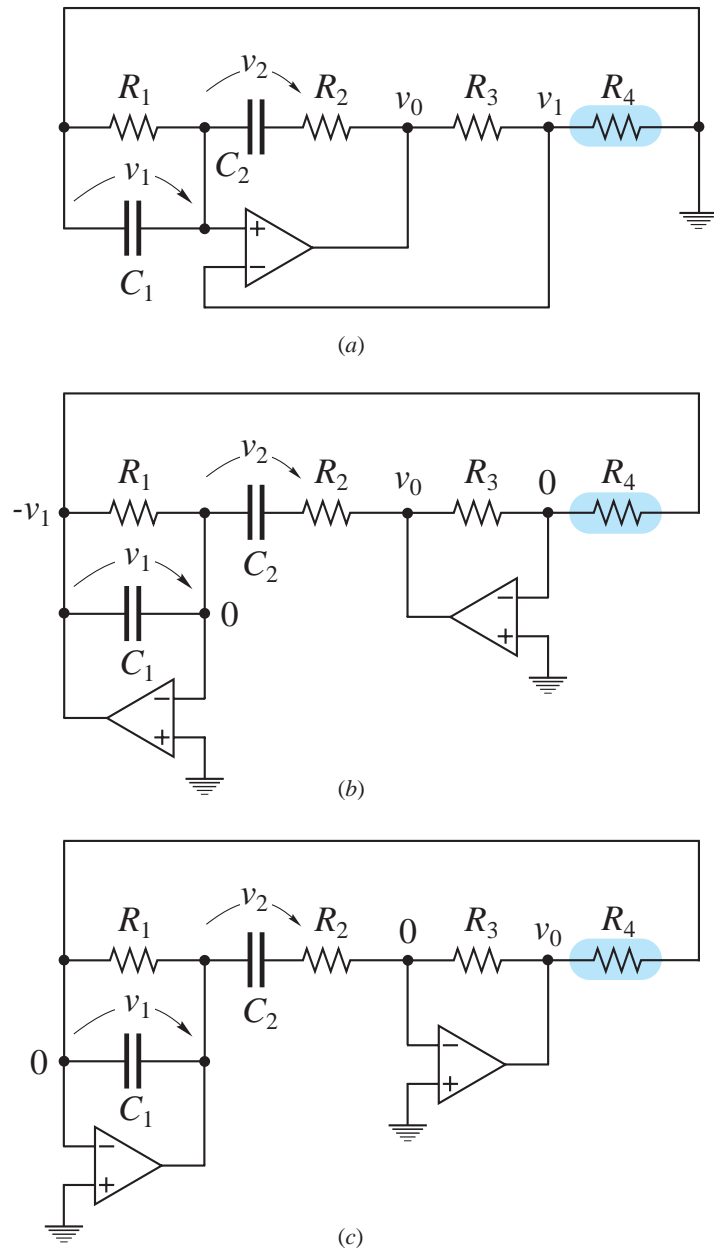


図 2: ウィーンブリッジ型発振回路 .  $R_4$  を非線形抵抗とした場合 .

なお，抵抗  $R_4$  が線形の場合の回路方程式は次式となる．

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{v_1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \left\{ \frac{R_3}{R_4} v_1 - v_2 \right\} \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{R_2} \left\{ \frac{R_3}{R_4} v_1 - v_2 \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

### 2.1.2 図 2 (b) に示した回路の回路方程式

図中の電圧  $v_0$  は次式となる．

$$v_0 = -R_3 g(-v_1) \quad (6)$$

$R_2$  を流れる電流から，次の回路方程式を得る．

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{v_1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \{-R_3 g(-v_1) - v_2\} \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{R_2} \{-R_3 g(-v_1) - v_2\} \end{aligned} \quad (7)$$

また，抵抗  $R_4$  が線形の場合の回路方程式は次式となる．

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{v_1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \left\{ \frac{R_3}{R_4} v_1 - v_2 \right\} \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{R_2} \left\{ \frac{R_3}{R_4} v_1 - v_2 \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

これらの方程式から，非線形抵抗 (1) が奇関数の場合，2つの回路は同じ回路方程式となるので等価となる．

### 2.1.3 図 2 (c) に示した回路の回路方程式

図中の電圧  $v_0$  は次式となる．

$$v_0 = -\frac{R_3}{R_2} (v_1 + v_2) \quad (9)$$

$R_2$  を流れる電流から，次の回路方程式を得る．

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{v_1}{R_1} - g(v_0) = -\frac{v_1}{R_1} - g \left\{ -\frac{R_3}{R_2} (v_1 + v_2) \right\} \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{1}{R_2} (v_1 + v_2) \end{aligned} \quad (10)$$

この式から  $v_1$  を消去して  $v_2$  の方程式を求めると次式となる．

$$\frac{d^2 v_2}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) \frac{dv_2}{dt} - \frac{1}{R_2 C_1 C_2} g \left( R_3 C_2 \frac{dv_2}{dt} \right) + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} v_2 = 0 \quad (11)$$

これは，Rayleigh の方程式とみることができる．したがって，適当な条件のもとで発振させることができる．

また，抵抗  $R_4$  が線形の場合の回路方程式は次式となる．

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{v_1}{R_1} + \frac{R_3}{R_2 R_4} (v_1 + v_2) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{1}{R_2} (v_1 + v_2) \end{aligned} \quad (12)$$

## 2.2 $R_1$ を非線形抵抗とした発振器

図 3 に示した回路は、ウィーンブリッジ型発振回路である。図 2 の回路との違いは、単に非線形抵抗の位置が異なるだけである。したがって、線形回路の場合は、前節で導いた回路方程式と同じとなる。とうあえず、回路方程式を導こう。

### 2.2.1 図 3 (a) に示した回路の回路方程式

抵抗  $R_1$  を次式で定義される電圧型非線形抵抗と仮定する。

$$i_{R1} = g(v_{R1}) \quad (13)$$

すると、図中の電圧  $v_0$  は次式となる。

$$v_0 = v_1 + \frac{R_3}{R_4}v_1 \quad (14)$$

$R_2$  を流れる電流から、次の回路方程式を得る。

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= \frac{R_3}{R_2 R_4} v_1 - \frac{1}{R_2} v_2 - g(v_1) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= \frac{R_3}{R_2 R_4} v_1 - \frac{1}{R_2} v_2 \end{aligned} \quad (15)$$

この式から  $v_2$  を消去して  $v_1$  の方程式を求めると次式となる。

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{C_1} g'(v_1) - \frac{1}{R_2 C_1} \frac{R_3}{R_4} \right) \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{R_2 C_1 C_2} g(v_1) = 0 \quad (16)$$

なお、抵抗  $R_1$  が線形の場合の回路方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= \frac{R_3}{R_2 R_4} v_1 - \frac{1}{R_2} v_2 - \frac{1}{R_1} v_1 \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= \frac{R_3}{R_2 R_4} v_1 - \frac{1}{R_2} v_2 \end{aligned} \quad (17)$$

### 2.2.2 図 3 (b) に示した回路の回路方程式

図中の電圧  $v_0$  は次式となる。

$$v_0 = \frac{R_3}{R_4} v_1 \quad (18)$$

$R_2$  を流れる電流から、次の回路方程式を得る。

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{R_2} \left( \frac{R_3}{R_4} v_1 - v_2 \right) - g(v_1) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{R_2} \left( \frac{R_3}{R_4} v_1 - v_2 \right) \end{aligned} \quad (19)$$

この式から  $v_2$  を消去して  $v_1$  の方程式を求めると次式となる。

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{C_1} g'(v_1) - \frac{1}{R_2 C_1} \frac{R_3}{R_4} \right) \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{R_2 C_1 C_2} g(v_1) = 0 \quad (20)$$

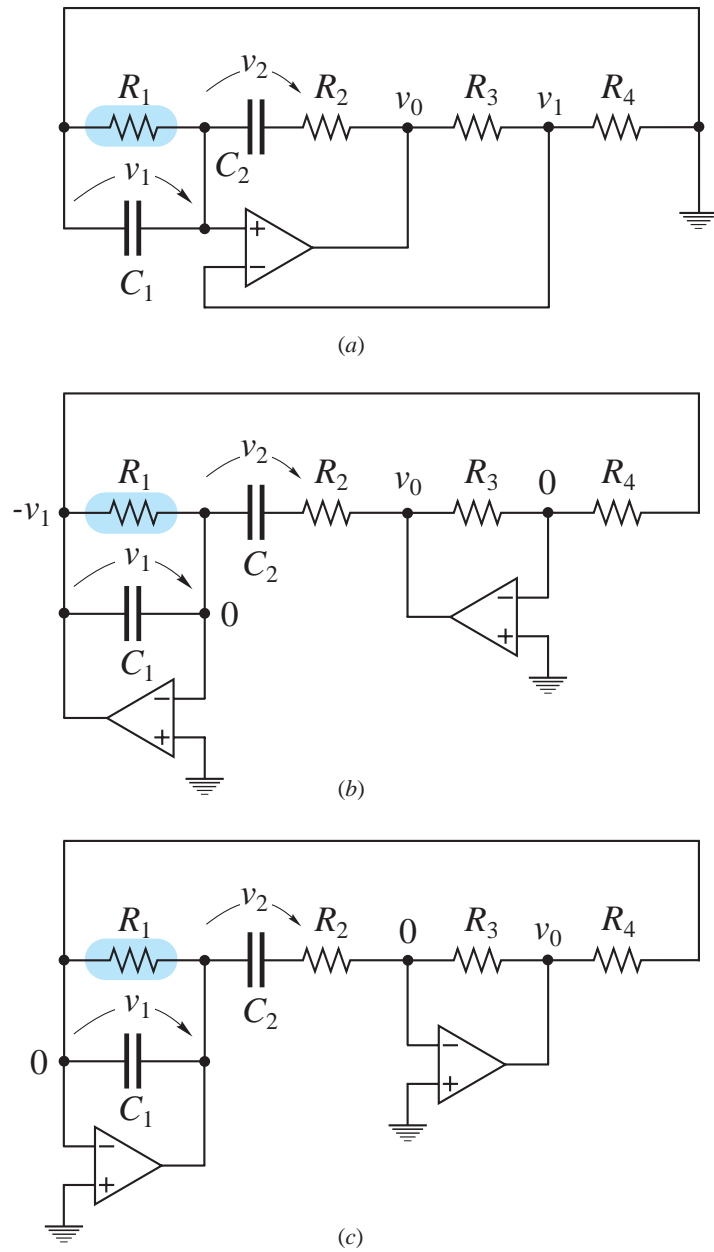


図 3: ウィーンブリッジ型発振回路 .  $R_1$  を非線形抵抗とした場合 .

これは式 (16) と同じである .

また , 抵抗  $R_1$  が線形の場合の回路方程式は次式となる .

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{R_2} \left( \frac{R_3}{R_4} v_1 - v_2 \right) - \frac{1}{R_1} v_1 \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{R_2} \left( \frac{R_3}{R_4} v_1 - v_2 \right) \end{aligned} \quad (21)$$

これらの方程式から , 非線形抵抗 (1) が奇関数の場合 , 2つの回路は同じ回路方程式となるので等価となる .

### 2.2.3 図 3 (c) に示した回路の回路方程式

図中の電圧  $v_0$  は次式となる .

$$v_0 = -\frac{R_3}{R_2} (v_1 + v_2) \quad (22)$$

$R_2$  を流れる電流から , 次の回路方程式を得る .

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= \frac{R_3}{R_2 R_4} (v_1 + v_2) - g(v_1) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{1}{R_2} (v_1 + v_2) \end{aligned} \quad (23)$$

この式から  $v_2$  を消去して  $v_1$  の方程式を求めると次式となる .

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{C_1} g'(v_1) - \frac{1}{R_2 C_1} \frac{R_3}{R_4} \right) \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{R_2 C_1 C_2} g(v_1) = 0 \quad (24)$$

これは , またしても式 (16) と同じである .

また , 抵抗  $R_1$  が線形の場合の回路方程式は次式となる .

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= \frac{R_3}{R_2 R_4} (v_1 + v_2) - \frac{1}{R_1} v_1 \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{1}{R_2} (v_1 + v_2) \end{aligned} \quad (25)$$

## 3 回路のダイナミクス

$R_4$  を非線形抵抗とした図 2 (a) に示した回路の回路方程式 (4)

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} - \frac{R_3}{R_2 C_1} g'(v_1) \right) \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} v_1 = 0 \quad (26)$$

と ,  $R_1$  を非線形抵抗とした図 3 (c) に示した回路の回路方程式 (24)

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{C_1} g'(v_1) - \frac{1}{R_2 C_1} \frac{R_3}{R_4} \right) \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{R_2 C_1 C_2} g(v_1) = 0 \quad (27)$$

の動的性質 , すなわちダイナミクス , を調べることにしよう . まず , それぞれの方程式を正規化し , そのあと位相面解析を行う .



### 3.1 回路方程式 (26) の動的性質

#### 3.1.1 回路方程式 (26) の正規化

式 (26) の時間スケールを次式で変換する .

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} t \quad (28)$$

すると , 式 (26) は次式となる .

$$\frac{d^2 v_1}{d\tau^2} + \left( \sqrt{\frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}} + \sqrt{\frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}} - R_3 g'(v_1) \sqrt{\frac{R_1 C_2}{R_2 C_1}} \right) \frac{dv_1}{d\tau} + v_1 = 0 \quad (29)$$

そこで ,

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}} + \sqrt{\frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}} \quad (30)$$

とおくと , 式 (29) は次式となる .

$$\frac{d^2 v_1}{d\tau^2} + \varepsilon (1 - h(v_1)) \frac{dv_1}{d\tau} + v_1 = 0 \quad (31)$$

ここに ,

$$h(v) = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{R_1 C_2}{R_2 C_1}} R_3 g'(v) = \frac{R_1 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2} R_3 g'(v) \quad (32)$$

とおいた .

さて , 非線形抵抗を次式と仮定しよう .

$$i = g(v) = \alpha \tanh(\beta v) \quad (33)$$

すると

$$\frac{di}{dv} = g'(v) = \alpha \beta \operatorname{sech}^2(\beta v) \quad (34)$$

であるから , 式 (32) は次式となる .

$$h(v) = \gamma \operatorname{sech}^2(\beta v) \quad (35)$$

ここに

$$\gamma = \frac{R_1 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2} \alpha \beta R_3 \quad (36)$$

とおいた .

この特性を仮定すると , 式 (30) は次式となる .

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon (1 - \gamma \operatorname{sech}^2 \beta x) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (37)$$

ここで ,  $v_1$  を  $x$  と , また  $\tau$  を  $t$  と置き直した . 式 (37) を正規化した方程式として用いることにしよう .

### 3.2 回路方程式 (27) の動的性質

#### 3.2.1 回路方程式 (27) の正規化

式 (26) の時間スケールを次式で変換する .

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} t \quad (38)$$

ただし ,

$$R_1 = \frac{1}{g'(0)} \quad (39)$$

とおいた . 式 (27) は次式となる .

$$\frac{d^2 v_1}{d\tau^2} + \left( \sqrt{\frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}} + \sqrt{\frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}} R_1 g'(v_1) - \sqrt{\frac{R_1 C_2 R_3}{R_2 C_1 R_4}} \right) \frac{dv_1}{d\tau} + R_1 g(v_1) = 0 \quad (40)$$

そこで ,

$$\mu = \sqrt{\frac{R_1 C_2 R_3}{R_2 C_1 R_4}} \quad (41)$$

とおくと , 式 (40) は次式となる .

$$\frac{d^2 v_1}{d\tau^2} - \mu \left\{ 1 - \frac{R_4}{R_3} \left( \frac{C_1}{C_2} + R_2 g'(v_1) \right) \right\} \frac{dv_1}{d\tau} + R_1 g(v_1) = 0 \quad (42)$$

さて , 非線形抵抗を式 (33) と仮定しよう .

$$i = g(v) = \alpha \tanh(\beta v) \quad (43)$$

すると , 式 (42) は次式となる .

$$\frac{d^2 v_1}{d\tau^2} - \mu \left\{ 1 - \frac{R_4}{R_3} \left( \frac{C_1}{C_2} + R_2 \alpha \beta \sec^2 \beta v_1 \right) \right\} \frac{dv_1}{d\tau} + \frac{1}{\beta} \tanh \beta v_1 = 0 \quad (44)$$

ここで ,

$$u = \beta v_1, \quad \lambda = \frac{R_4}{R_3}, \quad \sigma = \frac{C_1}{C_2}, \quad \rho = R_2 \alpha \beta \quad (45)$$

とおいて , 式 (44) を書き直すと , 次式を得る .

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \mu \left\{ 1 - \lambda \left( \sigma + \rho \sec^2 u \right) \right\} \frac{du}{dt} + \tanh u = 0 \quad (46)$$

ここで ,  $\tau$  を  $t$  と置き直した .

以後 , 式 (46) を正規化した方程式として用いることにしよう . なお , 数値計算などで時間軸を反転して計算する場合は ,  $t = -s$  とおくと ,  $\frac{d}{dt} = -\frac{d}{ds}$  であるから , 式 (46) は次式となる .

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + \mu \left\{ 1 - \lambda \left( \sigma + \rho \sec^2 u \right) \right\} \frac{du}{ds} + \tanh u = 0 \quad (47)$$