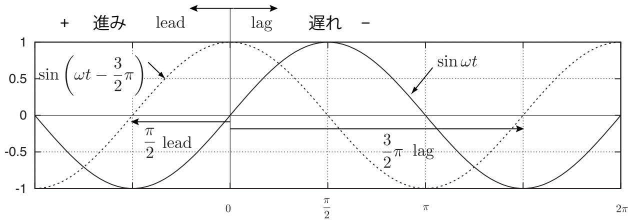
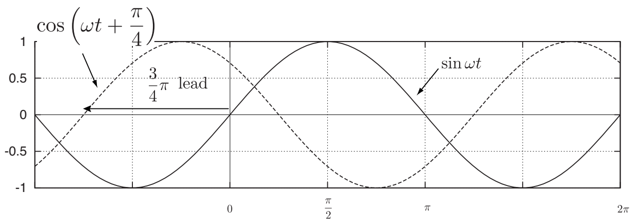
2.1

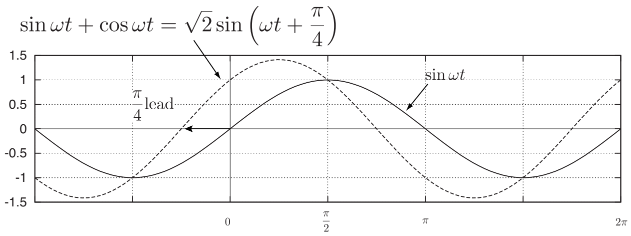
(1) $\sin\left(\omega t - \frac{3}{2}\pi\right)$
$\sin\omega t$ に対する位相差は $3\pi/2$ の遅れである．だが，$\sin(\omega t + 2\pi) = \sin\omega t$ であることから，$\sin\left(\omega t - \frac{3}{2}\pi\right) = \sin\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi\right)$ ともみなせる．よって $\pi/2$ の進みともみなせる．



(2) $\cos\left(\omega t - \frac{3}{2}\pi\right) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\omega t + \frac{3}{4}\pi\right)$
であるから，$\sin\omega t$ に対する位相差は $3\pi/4$ の進みである．



(4) $\sin\omega t + \cos\omega t \Rightarrow 1 + j = \sqrt{2}e^{j\pi/4}$．よってこれは $\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4)$ と合成される．したがって，$\pi/4$ の進み．振幅に注意！



2.7

(1) $v(t) = 8\cos\omega t = 4\sqrt{2}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow V = 4\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{2}}$．また，$i(t) = 2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow I = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{6}}$．よって，インピーダンスは $Z = V/I = 4e^{j\frac{\pi}{3}}$．アドミタンスは $Y = Z^{-1} = 0.25e^{-j\frac{\pi}{3}}$．
(2) $v = 5\sin\omega t \to V = 5/\sqrt{2}$．$i = \cos(\omega t - \pi/4) = \sin(\omega t + \pi/4) \Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}}$．よって $Z = V/I = 5e^{-j\frac{\pi}{4}}$, $Y = 0.2e^{j\frac{\pi}{4}}$．
(3) 同様に題意から $V = 3\sqrt{2}e^{j\frac{3}{4}\pi}$, $I = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{3}}$ となるので，$Z = 2e^{j\frac{5}{12}\pi}$, $Y = 0.5e^{-j\frac{5}{12}\pi}$．

インピーダンスやアドミタンスは複素数であるが，$e^{j\xi}$ の形をしていてもこれを $\sin(\omega t + \xi)$ という時刻の関数には**みなせない**（みなそうとすること自体がナンセンス）．複素数 V や I は対応する正弦波があるのに対し，インピーダンス，アドミタンスは単なる複素数なのである．

2.8

$E = ZI$ の関係より，E と I が同相であるためには，Z が実でないといけない．なぜなら，$E = |E|e^{j\phi}$ とすれば同相なので，$I = |I|e^{j\phi}$ である．よって，$Z = E/I = |E|/|I|$．右辺は実部だけなので，よって Z も実である．Z は回路より，

$$Z = R_1 + j\omega L + \frac{\frac{R_2}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}$$

となる．Z を実部虚部に分けて表示すると，

$$Z = \left(R_1 + \frac{R_2}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2}\right) + j\left(\omega L - \frac{\omega C R_2^2}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2}\right)$$

である．よって虚部がゼロとなればよい．つまり

$$\omega L = \frac{\omega C R_2^2}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2}.$$

これより，

$$R_2^2 = \frac{\omega L}{\omega C - \omega^3 C^2 L}$$

を得る．抵抗は非負なので

$$R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}\frac{1}{1 - \omega^2 CL}}$$

2.9

$Z = R + j\omega L$ となる．$I = E/(R + j\omega L)$ となるので，よって位相の関係は

$$\angle I = \angle E - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

である．E を基準にすると，I が E より $\pi/3$ 遅れるということは，

$$\angle I = \angle E - \frac{\pi}{3}$$

であるから，これから直ちに

$$\tan^{-1}\frac{\omega L}{R} = \frac{\pi}{3}$$

を得る．よって，$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\omega L}{R}$．左辺は $\sqrt{3}$ であるので，よって $R = \omega L/\sqrt{3}$．

2.10

R_1-C_1 に流れる電流を I_1，R_2-C_2 に流れる電流を I_2 とする．分流の法則 (p.21) はアドミタンスにも成り立つので，

$$I_1 = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}I, \quad I_2 = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2}I$$

である．Y_1 の偏角を ϕ_1，Y_2 の偏角を ϕ_2 とすると

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{|Y_1|}{|Y_2|}e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$$

であるので，$\phi_1 = \phi_2$ を**常に**満たせば I_1 と I_2 の比は周波数によらず一定となる．それぞれのアドミタンスは，

$$Y_1 = \frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{j\omega C_1}{1 + j\omega C_1 R_1}$$

.

$$Y_2 = \frac{1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{j\omega C_2}{1 + j\omega C_2 R_2}$$

である．これらの偏角はそれぞれ，

$$\phi_1 = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\omega C_1 R_1, \quad \phi_2 = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\omega C_2 R_2.$$

これらを見比べれば，$C_1R_1 = C_2R_2$ であれば $\phi_1 = \phi_2$ とすることができる．これから，$C_2 = C_1R_1/R_2$.

2.11

P.52 例題 2.6.1 と同じ問題である．C の横に 0.5[S] と与えられており，0.5 [F] ではない点に注意．従って $j\omega C = j0.5$ である．フェザー図は必ず図 2.6.3 と同じになる．(式展開は P.53, (2.6.4)〜(2.6.6) が示している)

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = 2 + \frac{1}{j0.5} = 2 - j2 = 2\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{6}{2\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}, V_R = RI = 2I = 3\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

$$V_C = \frac{I}{j\omega C} = -j2 \times \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{2}e^{j\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)} = 3\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

これらの図から $\omega \to 0$, $\omega \to \infty$ の極限をイメージしてみよ．

- $\omega \to 0$ の場合：低い周波数の交流 ≈ 直流
  V_C がぴったり実軸に重なり，$V_C = V$. C のインピーダンスは $-j\infty$ となるので，$|Z| = \infty$. 無限大の抵抗とみなせるので，全然電流が流れなくなる．(P.12, (1.4.2) と一致する) $V_R = RI$ なので抵抗には電圧降下が発生しない ($V_R = 0$).
- $\omega \to \infty$ の場合：高い周波数の交流
  V_R と Z はぴったり実軸に重なる．V_C はゼロ，すなわち C には電圧降下がなくなり，等価的に C は短絡除去されているのと同様となる．

これらのことから，C は直流には不通，高周波は素通しという特徴がある．

2.12

$E = 6$, $R = 2$, $r = 2$, $\omega C = 0.5$ であるから，

$$Z = R + \frac{r}{1 + j\omega CR} = 2 - \frac{j4}{2 - j2} = 3 - j$$

$E = ZI$ から

$$I_R = \frac{E}{Z} = \frac{3}{5}(3 + j), \quad V_R = 2I_R = \frac{6}{5}(3 + j)$$

V_C は分圧比から計算してもよいが，V_R が計算できているので，KVL: $E = V_R + V_C$ から計算する方が簡単．

$$V_C = E - V_R = \frac{6}{5}(2 - j).$$

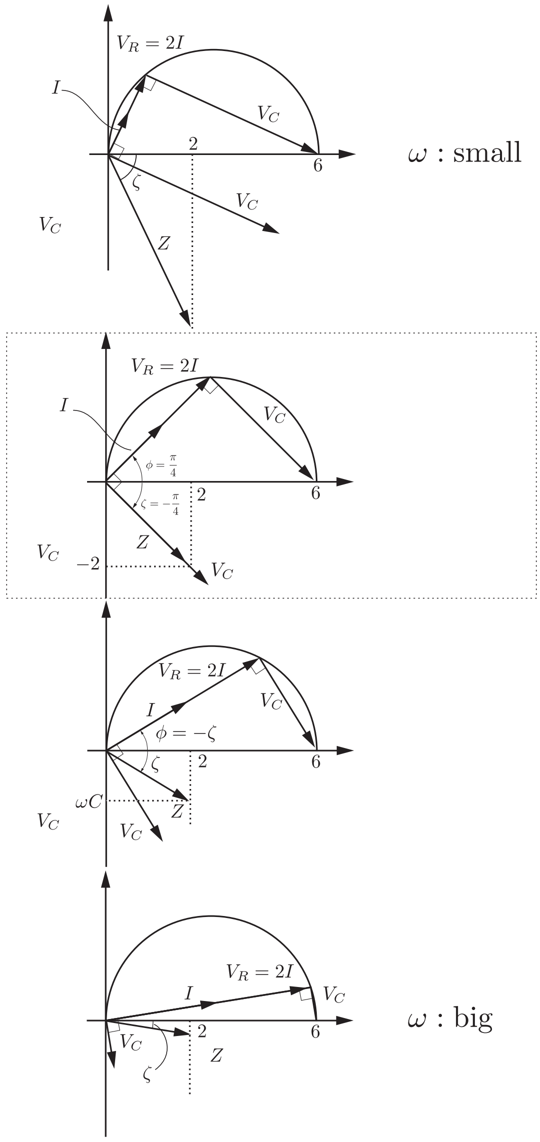


図 1: 問題 2.11 のフェザー図.

よって

$$I_C = j\omega C V_C = \frac{3}{5}(1 + 2j), \quad I_r = \frac{V_C}{r} = \frac{3}{5}(2 - j).$$

したがって，KCL より

$$I_R = I_C + I_r = \frac{3}{5}(3 + j)$$

これらをまとめたのが図 2 である．フェザー軌跡は上半円となる．複素平面上で，KVL, KCL が 2 次元ベクトルの和として成り立っていることに注目せよ．Z も図示してあるが，その偏角と V_R の偏角との関係もチェックすること．

2.13

左の端子の電圧は，あきらかに電源電圧 E を 1/2 に分圧しているので，$E/2$ である．右の端子は分圧を計算すると

$$\frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}E = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}E$$

となる．よって端子間の電位差 V はその方向に注意して，

$$V = \frac{E}{2} - \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}E = \frac{E}{2} \cdot \frac{1 - j\omega CR}{1 + j\omega CR}.$$

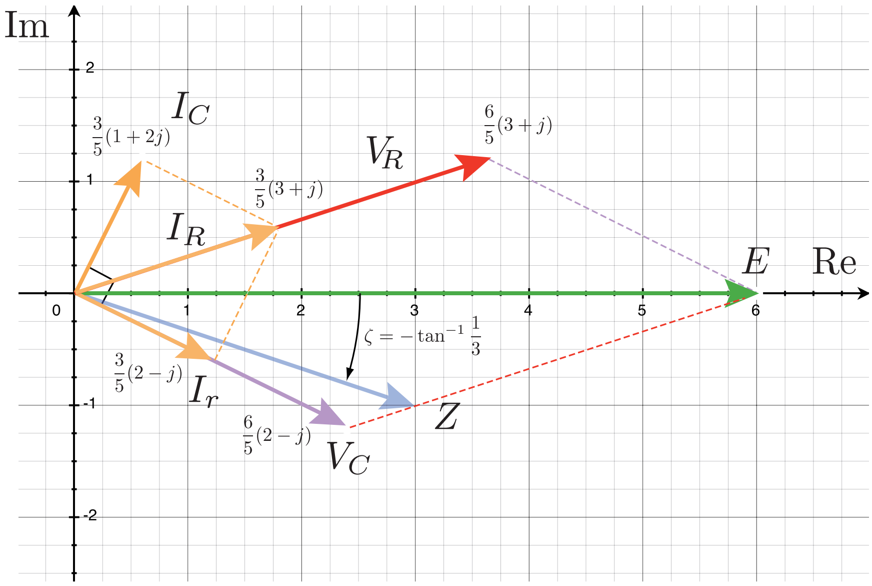


図 2: 問題 2.12 のフェザー図，および V_R のフェザー軌跡

となる．右辺の分母分子は複素共役の関係なので，絶対値は等しい．よって，C, R や ω によらず $|V| = |E|/2$ で一定となる．一方位相は，$\angle V = \angle E - 2\tan^{-1}\omega CR$ であるから，E を基準にとると ($\angle E = 0$)，

- $C = 0$ のとき，$\angle V = 0$
- $C = \frac{1}{\omega R}$ のとき $\angle V = -2 \times \pi/4 = -\pi/2$.
- $C = \infty$ のとき，$\angle V = -2\tan^{-1}\infty = -2 \times \pi/2 = -\pi$

となり，V のフェザー軌跡は下半円となる．詳細は演習問題略解の解図 2.2 を参照せよ．

2.14

$$V = \frac{R + j\omega L}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} E$$

よって

$$|V| = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} E$$

分母分子を観察し，R によらず $|V|$ が一定になるためには，$\omega^2 L^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ でなければならない．これを解いて $2\omega^2 CL = 1$. これから，

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = -\sqrt{\frac{L}{2C}}, \quad \omega L = \sqrt{\frac{L}{2C}}, \quad \omega C = \sqrt{\frac{C}{2L}}.$$

位相は E を基準 ($\angle E = 0$) にすると，

$$\begin{aligned} \angle V &= \tan^{-1}\frac{\omega L}{R} - \tan^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \\ &= 2\tan^{-1}\frac{\sqrt{\frac{L}{2C}}}{R} \end{aligned}$$

最後の式で，分母分子が等しくなるとき，逆正接は $\pi/4$ となる．つまり，$R = \sqrt{\frac{L}{2C}}$ であるから，$\angle V = 2 \times \pi/4 = \pi/2$ となって，V は上向きで虚軸に重なるベクトルとなる．詳細は演習問題略解の解図 2.3 を参照せよ．

2.15

$C = 0.01 \times 10^{-6}$, $L = 10 \times 10^{-3}$, $R = 10$. よって $\omega_r = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{0.1 \times 10^{-9}} = 100000$. すなわち $f_r = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100000}{2\pi} = 15.9$ [kHz] となる．次に $Q = \omega_r L/R = 100000 \times 10 \times 10^{-3}/10 = 100$. 帯域 f_b は f_1, f_2 を個別に求めると時間がかかるので，Q を用いる．式 (2.7.15) より，$\omega_2 - \omega_1 = \omega_r/Q = 100000/100 = 1000$. よって

$$f_b = f_2 - f_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \frac{\omega_r}{2\pi Q} = \frac{100000}{2\pi \times 100} = 159[\text{Hz}].$$

2.16

(a)

$$Y = \frac{1}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C_1}} + j\omega C_2 = \frac{j\omega\{C_1 + C_2(1 - \omega^2 LC_1)\}}{1 - \omega^2 LC_1}$$

$\Im Y = 0$ より $C_1 + C_2(1 - \omega^2 LC_1) = 0$. これを解いて，

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}}.$$

(b)

$$Y = \frac{1}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{j\omega L_2} = \frac{j\omega^2 CL_2 - j(1 - \omega^2 L_1 C)}{(1 - \omega^2 L_1 C)\omega L_2}$$

$\Im Y = 0$ より $\omega^2 CL_2 - (1 - \omega^2 L_1 C) = 0$. これを解いて，

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{C(L_1 + L_2)}}$$

2.17

「電源が供給する」電力の問題であるので，電流源 J について整理されればならない．

$$Z = \frac{R_2(1 + j\omega CR_1)}{1 + j\omega C(R_1 + R_2)}$$

となる．$V = ZJ$ であるので，

$$P_{\text{comp}} = \bar{V}J = \bar{Z}|J|^2 = \frac{R_2(1 - j\omega CR_1)}{1 - j\omega C(R_1 + R_2)}|J|^2$$

ここで，

$$\overline{\left(\frac{a + jb}{c + jd}\right)} = \frac{a - jb}{c - jd}$$

であることに注意．皮相電力は

$$|P_{\text{comp}}| = \frac{R_2\sqrt{1 + \omega^2C^2R_1^2}}{\sqrt{1 + \omega^2C^2(R_1 + R_2)^2}}|J|^2.$$

P_{comp} の分母を実数化すると

$$P_{\text{comp}} = \frac{R_2 + \omega^2C^2R_1R_2(R_1 + R_2) + j\omega CR_2}{1 + \omega^2C^2(R_1 + R_2)^2}|J|^2.$$

と書けるので，これより有効電力は，

$$P = \frac{R_2 + j\omega^2C^2R_1R_2(R_1 + R_2)}{1 + \omega^2C^2(R_1 + R_2)^2}|J|^2.$$

無効電力は

$$Q = \frac{\omega CR_2}{1 + \omega^2C^2(R_1 + R_2)^2}|J|^2.$$

となり，力率は

$$\cos\phi = \frac{P}{|P_{\text{comp}}|} = \frac{1 + \omega^2C^2R_1(R_1 + R_2)}{\sqrt{1 + \omega^2C^2(R_1 + R_2)^2}\sqrt{1 + \omega^2C^2R_1^2}}$$

2.18

「電源が供給する」電力の問題であるので，電圧源 E について整理されればならない．$I = YE$ より，$P = \bar{E}I = \bar{E}YE = Y|E|^2$.

$$Z = \frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega LR}{j\omega L + R}$$

であるから

$$Y = \frac{j\omega C(R + j\omega L)}{R(1 - \omega^2LC) + j\omega L}$$

よって

$$\begin{aligned} P_{\text{comp}} &= \frac{j\omega C(R + j\omega L)}{R(1 - \omega^2LC) + j\omega L}|E|^2 \\ &= \frac{\omega^4L^2C^2R + j\omega C(R^2 - \omega^2LCR^2 + \omega^2L^2)}{R^2(1 - \omega^2LC)^2 + \omega^2L^2}|E|^2 \end{aligned}$$

これの実部が有効電力 P で，虚部が無効電力 Q である．力率 $\cos\phi = 1$ のとき $Q = 0$ ということであるから，

$$R^2 - \omega^2LCR^2 + \omega^2L^2 = 0$$

これが答えではあるが，C についてまとめると，

$$C = \frac{R^2 + \omega^2L^2}{\omega^2LR^2}$$

となる