知能情報工学科 電気回路および演習 中間本試験模範解答 June 1, 2010.

1　直流回路の問題

1.1. 図 1 の回路において以下の設問に答えよ

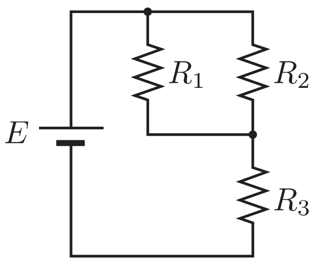

図 1: 問 1.1 の回路

(1.1.1) 各抵抗に流れる電流および抵抗両端の電圧を定義し，KVL, KCL を書き出せ．(7 点)

【解答例】

i. KCL:

$$i_1 + i_2 = i_3 \tag{1}$$

KVL:

$$E = v_1 + v_3 \tag{2}$$
$$v_1 = v_2 \tag{3}$$

ii. 各抵抗について，

$$v_1 = R_1 i_1, \quad v_2 = R_2 i_2, \quad v_3 = R_3 i_3 \tag{4}$$

(1.1.2) 各抵抗に流れる電流を求めよ．(8 点)

【解答例】 式 (4) の各式を式 (3) および (3) の両式に代入し，(1) を用いて i_3 を消去すると次式を得る．

$$\begin{aligned} E &= (R_1 + R_3)i_1 + R_3 i_2 \\ 0 &= -R_1 i_1 + R_2 i_2 \end{aligned} \tag{5}$$

これは連立方程式になっているので，適当な方法によって i_1, i_2 について解ける．答えは

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{R_2 E}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \\ i_2 &= \frac{R_1 E}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \\ i_3 &= \frac{(R_1 + R_2)E}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \end{aligned} \tag{6}$$

となる．別の方法を記そう．あらかじめ R_1, R_2 の合成抵抗を $R' = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ として求めると，回路はもはや R' と R_3 からなる直列抵抗回路となるので，$i_3 = \frac{E}{R'+R_3}$ として i_3 がまず求まる．その i_3 から R_1, R_2 によって決まる分流比によって (p. 21 を参照) i_1, i_2 が決まる．もちろん答えは上記と同一となる．

1.2. 図 2 の回路の R_1 に流れる電流 i_1 について，**重ね合わせの理**を用いて求めよ． [減点対象にはなるが，重ね合わせの理が分からない場合は通常の解き方でもよい．] (15 点)

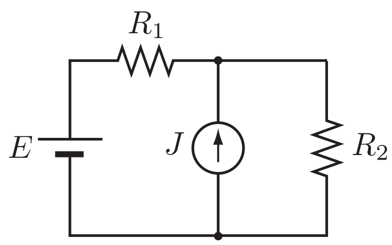

図 2: 問 1.2 の回路

【解答例】 教科書 P.17 の例題 1.5.2 と J と R_2 の位置が左右異なるだけで，全く同じ問題である．よって解答略．重ね合わせの理を用いない場合，電源の扱いに十分注意すれば，この問題の場合は重ね合わせの理を用いるより早く解ける．R_1, R_2 に流れるをそれぞれ i_1, i_2 とする．さらに R_2, J の両端にかかる電圧を v とすると，KVL より $E = v + R_1 i_1$．つぎに i_2 は KCL により $i_2 = J + i_1$ となる．したがって $E = R_2(J + i_1) + R_1 i_1$．式を整理すると，

$$i_1 = \frac{E - R_2 J}{R_1 + R_2}.$$

となる．ここで重ね合わせの理を用いる場合と大きく異なるのは，J が R_1, R_2 に分流する，とは**考えない（考えることができない）**，ということである．i_1 は重ね合わせの理の際に考える J からの分流分をもう仮想的に考慮に入れた後の量なのである．i_1 をある値に決めてしまったからには，J から R_1 に向って逆流することは許されない．

1.3. 図 3 の回路において，電源電流 J と抵抗値 R_1 が固定されているとする．次の問いに答えよ．

(1.3.1) 抵抗 R に供給される電力 p を求めよ．(7 点)

(1.3.2) p が最大となるように R を定めよ．またそのときの p の値を示せ．(8 点)

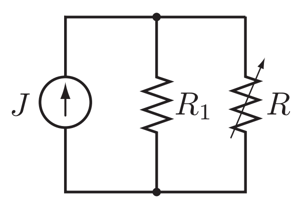

図 3: 問 1.3 の回路

【解答例】 R_1 を流れる電流を i_1, R を流れる電流を i とする．KCL より $J = i_1 + i$ である．R の両端の電圧を v とすると，合成コンダクタンス $G = \dfrac{R + R_1}{RR_1}$ に電流 J を流していることと等価である．$J = Gv$ より

$v = J/G$ となり，このとき R に流れる電流は $i = v/R$ である．そこで電力は

$$p = vi = \frac{v^2}{R} = \frac{RR_1^2}{(R+R_1)^2}J^2$$

となる．p を R の関数と思えば，$p(R)$ は，R のどんな値でも正であり，また，$R=0$ のとき，$p(0)=0$, また，$R=\infty$ のとき，$p(\infty)=0$．よって最大値（極大値）を持つ．(4/20 のレポートの解説も同じことである)．教科書 P.27 (1.7.17) のように変形してもよいが，$p(R)$ の R に関する導関数を計算すると，

$$\frac{dp}{dR} = \frac{R_1^2}{(R+R_1)^2}J^2 - \frac{2RR_1^2}{(R+R_1)^3}J^2$$

となり，$dp/dR = 0$ で最大値である．変形し適当に分母を払うと，$R = R_1$ を得る．　この時の電力は $p = RJ^2/4 = R_1J^2/4$.

2　交流回路について

2.1. 図 4 の回路において次の問いに答えよ

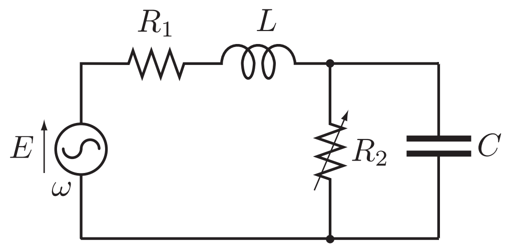

図 4: 問 2.1 の回路

(2.1.1) R_1 を流れる電流 I について，その実効値，および電圧 E を基準にした場合の位相を求めよ．(10 点)

(2.1.2) 電流 I が電圧 E と同相になるためには，抵抗 R_2 の値をどのようにすればよいか示せ．(5 点)

【解答例】 Z は回路より，

$$\begin{aligned} Z &= R_1 + j\omega L + \frac{\dfrac{R_2}{j\omega C}}{R_2 + \dfrac{1}{j\omega C}} \\ &= \frac{R_1 + R_2 - \omega^2 LCR_2 + j\omega L + j\omega CR_1R_2}{1 + j\omega CR_2} \end{aligned}$$

となる．$E = ZI$ の関係より，

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{(1+j\omega CR_2)E}{R_1 + R_2 - \omega^2 LCR_2 + j\omega L + j\omega CR_1R_2}$$

よって実効値は，

$$|I| = \frac{\sqrt{1+\omega^2C^2R_2^2}|E|}{\sqrt{(R_1+R_2-\omega^2LCR_2)^2 + (\omega L + \omega R_1R_2)^2}}$$

となり，位相は

$$\angle I = \tan^{-1}\omega CR_2 - \tan^{-1}\frac{\omega L + \omega CR_1R_2}{R_1 + R_2 - \omega^2 LCR_2} + \angle E.$$

となる．つぎに，E と I が同相であるためには，$\angle I = \angle E$ が常に満たされればよい．すなわち

$$\tan^{-1}\omega CR_2 - \tan^{-1}\frac{\omega L + \omega CR_1R_2}{R_1 + R_2 - \omega^2 LCR_2} = 0$$

となる．よって

$$\omega CR_2 = \frac{\omega L + \omega CR_1R_2}{R_1 + R_2 - \omega^2 LCR_2}.$$

これから分母を払い，R_2^2 について整理すると

$$R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}\cdot\frac{1}{1-\omega^2CL}}$$

を得る．別解としては，E と I が同相であるには，Z が実でないといけない．なぜなら，$E = |E|e^{j\phi}$ とすれば，同相だから $I = |I|e^{j\phi}$ であるはず．よって，$Z = E/I = |E|/|I|$. 右辺は実部だけなので，よって Z も実である．Z を実部虚部に分けて表示すると，

$$Z = \left(R_1 + \frac{R_2}{1+\omega^2C^2R_2^2}\right) + j\left(\omega L - \frac{\omega CR_2^2}{1+\omega^2C^2R_2^2}\right)$$

である．よって虚部がゼロとなればよい．つまり

$$\omega L = \frac{\omega CR_2^2}{1+\omega^2C^2R_2^2}.$$

これより，

$$R_2^2 = \frac{\omega L}{\omega C - \omega^3C^2L}$$

を得る．抵抗は非負なので

$$R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}\cdot\frac{1}{1-\omega^2CL}}$$

2.2. 図 5 の回路において，$E = 8$, $R = 2$, $\omega C = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ である．

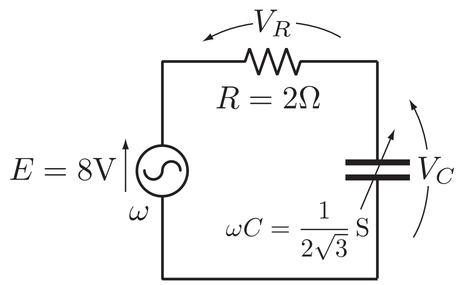

図 5: 問 2.2 の回路

(2.2.1) この回路の複素インピーダンス Z, 複素電流 I, 複素電圧 V_R, 複素電圧 V_C をそれぞれもとめよ (8 点)

(2.2.2) Z, I, V_R, V_C をフェザー図に示せ．(7 点) その際，偏角や長さについての情報も付加せよ．

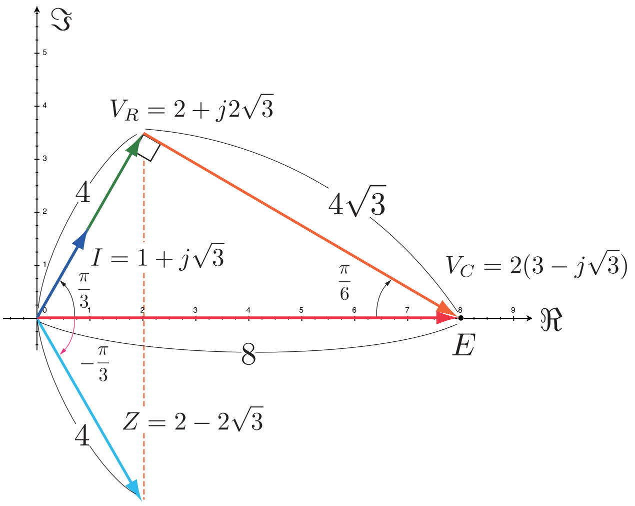

図 6: 問 2.2 のフェザー図．V_C ベクトルは平行移動して原点から描いていてもよい．

【解答例】 $Z = R + \frac{1}{j\omega C} = 2 - j2\sqrt{3}$ であるので，

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{8}{2(1 - j\sqrt{3})} = 1 + j\sqrt{3}$$

よって，$V_R = RI = 2I = 2(1 + j\sqrt{3})$, $V_C = I/j\omega C = -j2\sqrt{3}(1 + j\sqrt{3}) = 2(3 - j\sqrt{3})$. これらをフェザー図で表すと，図 6 の通り．

2.3. 図 7 の回路において，電源 J が供給する有効電力，無効電力，皮相電力および力率を求めよ．(15 点)

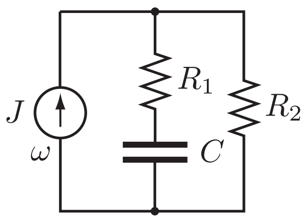

図 7: 問 2.3 の回路

【解答例】「電源が供給する」電力の問題であるので，電流源 J について整理されればならない．

$$Z = \frac{R_2(1 + j\omega C R_1)}{1 + j\omega C(R_1 + R_2)}$$

となる．$V = ZJ$ であるので，

$$\begin{aligned} P\mathrm{comp} &= \bar{V}J = \bar{Z}\bar{J}J = \bar{Z}|J|^2 \\ &= \frac{R_2(1 - j\omega C R_1)}{1 - j\omega C(R_1 + R_2)}|J|^2 \end{aligned}$$

ここで，

$$\overline{\left(\frac{a + jb}{c + jd}\right)} = \frac{a - jb}{c - jd}$$

であることに注意．皮相電力は

$$|P\mathrm{comp}| = \frac{R_2\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R_1^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 (R_1 + R_2)^2}}|J|^2.$$

$P\mathrm{comp}$ の分母を実数化すると

$$P\mathrm{comp} = \frac{R_2 + \omega^2 C^2 R_1 R_2 (R_1 + R_2) + j\omega C R_2^2}{1 + \omega^2 C^2 (R_1 + R_2)^2}|J|^2.$$

と書けるので，これより有効電力は，

$$P = \frac{R_2 + \omega^2 C^2 R_1 R_2 (R_1 + R_2)}{1 + \omega^2 C^2 (R_1 + R_2)^2}|J|^2.$$

無効電力は

$$Q = \frac{\omega C R_2^2}{1 + \omega^2 C^2 (R_1 + R_2)^2}|J|^2.$$

となる．力率は，

$$\begin{aligned} \cos\phi &= \frac{P}{|P\mathrm{comp}|} \\ &= \frac{1 + \omega^2 C^2 R_1 (R_1 + R_2)}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 (R_1 + R_2)^2}\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R_1^2}}. \end{aligned}$$

採点基準

6 つの問題はそれぞれ 15 点とし，90 点満点とする．部分点を取る．