

P.28, 1.5

(まずはここに回路図を書いてみよ)

[解] R_1 に流れる電流を i_1 , R_2, R_3 に流れる電流を i_2 とする。(この時点で $i = i_1 + i_2$ であることに注意) $R' = R_2 + R_3$ とすると, R_1 と R' にはそれぞれ電圧 E がかかっている。よって, $i_1 = E/R_1$ であり, $i_2 = E/(R_2 + R_3)$ 。

次に, テブナンの等価回路の R_T は, E を短絡除去したとき, a-a' 端から見た抵抗のことである。 E の部分が素通しになれば, R_1 には全く電流が流れない。よって, a-a' 端からは R_2 と R_3 の並列抵抗にしか見えない。したがって,

$$R_T = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

最後に E_T は a-a' 端の電圧であるので, R_3 に流れる電流から求まる。すなわち, $E_T = R_3 i_2$ 。よって,

$$E_T = \frac{R_3 E}{R_2 + R_3}.$$

P.28, 1.6

(まずはここに再び回路図を書いて, a-a' 端を短絡させてみよ)

[解] R_3 には電流が流れなくなることに注意。 R_2 に流れる電流が J_N となる。しかし, R_1, R_2 にはともに E がかかっている。よって, $J_N = E/R_2$ 。 G_N は, E を短絡除去したときの a-a' 端のコンダクタンスであるので, (R_1 には電流は流れないので) $G_2 = 1/R_2, G_3 = 1/R_3$ の和である (p.14 (1.5.8) を見よ)。つまり,

$$G_N = G_2 + G_3 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3}$$

これは R_T の逆数になっている。(R_T が先に求まっているなら $G_N = 1/R_T$ を計算して答えてもよい。)

P.28, 1.7 (まずは図を書いて, a-a' 端で切り離してみることに)

[解] テブナンの等価回路について, E を短絡除去し, J を開放除去 R_T したら, a-a' 端から見ると R しか残らない。よって $R_T = R$ 。次に電源はそのまま動かして, a-a' 端の電圧を測らないといけない。 a-a' 単には電流源 J しかつながっておらず, これの両端の電圧が E_T となる。しかし, どうやって E_T が求めるのか途方に暮れるかもしれない。だが, 授業中に触れたように, 電流源の両端の電圧は回路構成で決まる¹ので, もう両端電圧を E_T と置いたまま計算をすすめよう。

素直に $E-R-J$ から成るループに KVL 適用しよう。 J から流れ出る電流は R に向って入らざるを得ない。 J は実際, 電圧源 E に入り込んで行くのである²。 R に右から電流 J が入って来るので, よって右回り向きに電圧 $R \times J$ が発生する。このことから KVL は

$$E + RJ = E_T$$

となる。左辺が右回り電圧の総和, 右辺が左回り電圧の総和である。これで E_T が求まった。 E_T は既知数だけで表現できていることに注意。

ノートンの G_N は R_T の逆数なので, $G_N = 1/R_T = 1/R$ 。 J_N を求めるには, 電源は動かして, a-a' 端を短絡したときに流れる電流を評価する³。短絡なので a-a' 間の電位差は 0V である。 J の両端の電圧がゼロになってしまう例であるが (こんなのもあり得る) なにがあろうと電流源は電流 J を矢印の方向に無理矢理流す。 E と R から見てもその両端はともに 0V ということになるので, E と R だけからなる閉回路と見なせる。よってこれらには E/R で決まる電流が流れる。結果的に a-a' 端には J と E/R の和が流れる。すなわち $J_N = J + E/R$ となる。 J が R 側に流れ込んだりはしないことに注意。(最初の授業では混乱させる事を言ったかもしれない)

抵抗 r を a-a' 端につなげた場合, それに流れる電流はテブナンの等価回路を使えば,

$$i_r = \frac{E_T}{R_T + r} = \frac{E + RJ}{R + r}$$

となる。これも右辺は既知のパラメータばかりである。

ノートンの回路に r が接続されている場合は, G_N と $1/r$ の並列コンダクタンスに J_N が流れ込む (図を描いてみよ)。合成コンダクタンスは

$$G = G_N + \frac{1}{r} = \frac{1 + G_N r}{r}$$

となり, 両端の電圧を v とすれば, $J_N = Gv$ より $v = J_N/G$ となる。よって r に流れる電流は,

$$i_r = \frac{v}{r} = \frac{J_N}{G} \times \frac{1}{r} = \frac{J + E/R}{1 + G_N r} = \frac{E + RJ}{R + r}$$

となり, テブナンの場合と一致する。(何があろうと一致するはずだ)

※試験では以上のような解説はいちいち不要であるが, 採点者が「なぜこの人はこんな式をここに書いたのだろう?」と悩ませない程度の説明を付けてほしい。

¹電流源は一定電流を維持し, かつどんな値の電圧でも許容する。たとえ負の値でも。

²電圧源は一定電圧を維持し, かつどんな値の電流でも流せる。たとえ負の値でも。

³a-a' はよってひとつの節点とも見なせる

[解] 分圧回路である (p.20) が、同時にこれは a-a' 端のテブナンの等価回路の E_T が $E/3$ だと言ってるに等しい。実際 a-a' 端の電圧は、

$$v = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = \frac{E}{3}$$

これより、 $R_1 = 6 \text{ [k}\Omega\text{]}$ なので、 $R_2 = 3 \text{ [k}\Omega\text{]}$ 。テブナンの等価回路は、a-a' 端からの抵抗は、 R_1 と R_2 の並列抵抗なので、

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

よって、 $R_T = 2 \text{ [k}\Omega\text{]}$ 。題意より $E = 12 \text{ [V]}$ のとき、 $E_T = 4 \text{ [V]}$ だから、 $R = 0.1 \text{ [k}\Omega\text{]}$ をつないだとすると、

$$i = \frac{E}{R_T + R} = \frac{4}{2 \times 10^3 + 0.1 \times 10^3} \approx 1.9 \times 10^{-3}$$

すなわち、**約 1.9 [mA]** となる。

問題にある「近似計算を考えること」という部分は、**大切な考察**である。 $R = 0.1 \text{ [k}\Omega\text{]}$ であれば、 R_1, R_2 に比べて非常に小さいので、 R にばかり電流が流れ、 R_2 には電流は流れないと仮定できる。いっそ $R \approx 0$ とすると、 E と R_1 の直列接続回路が出来上り、そのときの電流が全部 R を通過していると思える。すると、

$$i = \frac{E}{R_1} = \frac{12}{6 \times 10^3} = 2 \times 10^{-3}$$

となり、 2 [mA] となって、上記とほぼ一致する、すなわち上の計算は正しそうだと思える。

[参考：単位は 3 桁毎] 10^{12} : T テラ、 10^9 : G ギガ、 10^6 : M メガ、 10^3 : k キロ、 10^{-3} : m ミリ、 10^{-6} : μ マイクロ、 10^{-9} : n ナノ、 10^{-12} : p ピコ

P. 29, 1.11

[解] 問題から次のように式が誘導される。

$$R_a = \frac{R(r + R_b)}{R + r + R_b}, \quad R_b = r + \frac{RR_a}{R + R_a}$$

これらを R, r について解けばよい。(つまり、 R と r それぞれを R_a と R_b だけで表せということである。) $rR = R_a R_b$ および $R_a r = (R_b - R_a)R$ という関係が出て来る。抵抗値は正であるため $r = \sqrt{(R_b - R_a)R_a}$ などと計算できる。

[解] R_1 を流れる電流を i_1 、 R を流れる電流を i とする。KCL より $J = i_1 + i$ である。 R の両端の電圧を v とすると、合成コンダクタンス $G = \frac{R + R_1}{RR_1}$ に電流 J を流しているイメージとなる。 $J = Gv$ より $v = J/G$ となり、このとき R に流れる電流は $i = v/R$ である。そこで電力は

$$p = vi = \frac{v^2}{R} = \frac{1}{R} \left(\frac{RR_1}{R + R_1} J \right)^2$$

となる。教科書 P.27 (1.7.17) のように変形してもよいが、ここは電力が極大値を取ると仮定し、微分値がゼロとなるような R の値を計算してみる。

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dR} &= -\frac{1}{R^2} \left(\frac{RR_1}{R + R_1} J \right)^2 \\ &+ \frac{2}{R} \left(\frac{R_1}{R + R_1} - \frac{RR_1}{(R + R_1)^2} \right) \frac{RR_1}{R + R_1} J^2 = 0 \end{aligned}$$

これを変形し適当に分母を払うと、 $-R_1^2 R(R + R_1) + 2RR_1^3 = 0$ を得る。よって、 $R = R_1$ 。ホントはここからこの値が極大値であることを示さないといけないが省略する。この時の電力は $p = RJ^2/4$ 。

P.29, 1.13

[解] (a): R を切り離し、 E を短絡すると、 $1[\Omega]$ の並列抵抗になるので、 $E_T = 0.5[\Omega]$ となる。また、1:1 の抵抗なので、 E_T は E のちょうど半分 of 電圧になる。よって $E_T = E/2$ 。前の問題から、 R を接続した時、 R に最大の電力を送ることができるのは、 $R_T = R$ のときであるから、よって、 $R = 0.5[\Omega]$ 。

(b): 同様にやろう。 R を取り除けば、 $4[\Omega]$ にはもう電流は流れない。よって電流は $2[\Omega]$ のみを還流し、ここで電圧が発生する。 R を切り離れた口からはこの電圧が測れるのである。その電圧は $1[\text{A}] \times 2[\Omega]$ すなわち、 $E_T = 2[\text{V}]$ となる。(4[Ω] を経由して測るのだが、電流はこの 4[Ω] には流れていないので、よって 4[Ω] の両端には電圧は発生してない。しつこいかな?) 次に、電流源を開放除去し、切り口から抵抗値を測ればそれが R_T である。よって、 $R_T = 6[\Omega]$ となる。よって、 $R = 6[\Omega]$ をつなげば R での電力が最大となる。

ところでノートンの等価回路もちろん構成可能であり、この (b) の場合、 $J_N = 1/3[\text{A}]$ 、 $G_N = 1/6[\text{S}]$ となる (計算してみよ)。ただし、 G_N にかかる電圧は $1[\text{V}]$ であることに注意。これと同じ値の $G = 1/R$ をつなげば電力が最大とできる。(問題 1.12 の結果) よって $R = 1/G = 6[\Omega]$ となる。

どちらの等価回路でも R つないだとき、それに流れる電流は $1/6[\text{A}]$ となり、よって電力は $p = vi = Ri^2 = 1/6[\text{W}]$ となる。