複素数表示のポイントは

- 複素数的に絶対値をとれば実効値になるように複素数表示を決める．
- ωt の情報は書かない

である．それであらためて与えられた正弦波に関する複素数表示の手順をまとめると，

1. 最大振幅を $\sqrt{2}$ で割る．
2. cos なら sin にして位相に $\pi/2$ を足す．もしくは単に j をかける．
3. 位相を j を付けて指数関数であらわす．

となる．複素表示からもとの正弦波への復元も大切である．

2.3

これらの問題では位相が特別な値なので $e^{j\phi}$ の手計算がある程度進められる．以下，イコールではなくて $\Rightarrow$ を使っている部分に注意．

(1)

$$\sqrt{2}200\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow 200e^{j\frac{\pi}{3}}=100\left(1+j\sqrt{3}\right).$$

(2)

$$\sqrt{2}\,(6\sin\omega t+8\cos\omega t)\Rightarrow 6+8e^{j\frac{\pi}{2}}=6+j8$$

(3)

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}\left\{6\sin\left(\omega t+\tfrac{\pi}{4}\right)-8\cos\left(\omega t+\tfrac{\pi}{4}\right)\right\}\Rightarrow\\&6e^{j\frac{\pi}{4}}-8e^{j\frac{3}{4}\pi}=6\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+j)\right)-8\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(-1+j)\right)\\&=\sqrt{2}(7-j).\end{aligned}$$

最後の $\sqrt{2}$ は上記の実効値の処理とは関係なく，たまたま出て来た結果であることに注意．これは 1 つの複素数なので，よって 1 つの正弦波が対応する．2 つの正弦波の和は 1 つの正弦波になるということを表している．つまり三角関数の合成になっている．

ここで，複素数表示 $\sqrt{2}(7-j)$ から逆に正弦波を復元してみよう．その際に $\sqrt{2}$ をひとつ加え戻すことを忘れないように．

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}(7-j)\Rightarrow\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{7^2+1^2}\sin\left(\omega t-\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)\\&=10\sqrt{2}\sin\left(\omega t-0.142\right)\end{aligned}$$

図 1 にこれらの正弦波をグラフで表示している．実線の波が，各時刻において他の 2 つの波の振幅の和になってることを確認せよ．赤矢印は各波の最大振幅を表している．

三角関数の合成は高校でも習ったかもしれないが，それが複素数表示をもちいると簡単に計算ができることに注目して欲しい．

2.4

(a) インピーダンスは，$Z=400+j400\times2=400+j800$ [Ω]．アドミタンスはインピーダンスの逆数なので，

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{400(1+j2)}=\frac{1-j2}{400(1+4)}=\frac{1-j2}{2000}[\mathrm{S}]$$

となる．計算過程で**分母の実数化**を行なっている事に注意．数値を伴う問題では分母は実数化すること．

(b) これは (a) のアドミタンスとの並列アドミタンスを考えるほうが早いので，

$$\begin{aligned}Y&=Y_1+Y_2=\frac{1-j2}{2000}+\underbrace{j400\times10\times10^{-6}}_{j\omega C}\\&=\left(\frac{1-j2}{2}+j4\right)\times10^{-3}=\frac{1+j6}{2}\times10^{-3}\\&=(5+j30)\times10^{-4}[\mathrm{S}].\end{aligned}$$

インピーダンスは，

$$Z=Y^{-1}=\frac{2}{1+6j}\times10^3=\frac{2(1-j6)}{37}\times10^3[\Omega].$$

ミリやマイクロなどの単位の処理が確実に行なえるようにする．

2.5

(a) この問題の場合は，無理に分母を実数化する必要はなかろう．

$$Z=\frac{j\omega L(R+\frac{1}{j\omega C})}{j\omega L+R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{-\omega^2LCR+j\omega L}{1-\omega^2LC+j\omega CR}$$

$$Y=Z^{-1}=\frac{1-\omega^2LC+j\omega CR}{-\omega^2LCR+j\omega L}$$

(b) 問題 (a) の答えを利用する．

$$\begin{aligned}Z&=\frac{-\omega^2LC_1R+j\omega L}{1-\omega^2LC_1+j\omega C_1R}+\frac{1}{j\omega C_2}\\&=\frac{1-\omega^2L(C_1+C_2)+j\omega C_1R(1-\omega^2LC_2)}{-\omega^2C_1C_2R+j\omega C_2(1-\omega^2LC_1)}\end{aligned}$$

$$Y=\frac{1}{Z}.$$

2.6

題意より $|V|=200$ [V], $\omega=400$ [rad/s].

(a)

$$I=YV=\frac{1-j2}{2000}\times200=\frac{1-j2}{10}.$$

よって，$|I|=\sqrt{1+2^2}\times0.1\approx0.224$ [A]

(b)

$$I=YV=\frac{1+j6}{2}\times10^{-3}\times200=(1+j6)\times10^{-1}.$$

よって，$|I|=\sqrt{1+6^2}\times10^{-1}\approx0.608[A]$.

西日本の家庭に来ている電源の角周波数は，$\omega=2\pi f=2\pi\times60\approx377$ [rad/s] となる．

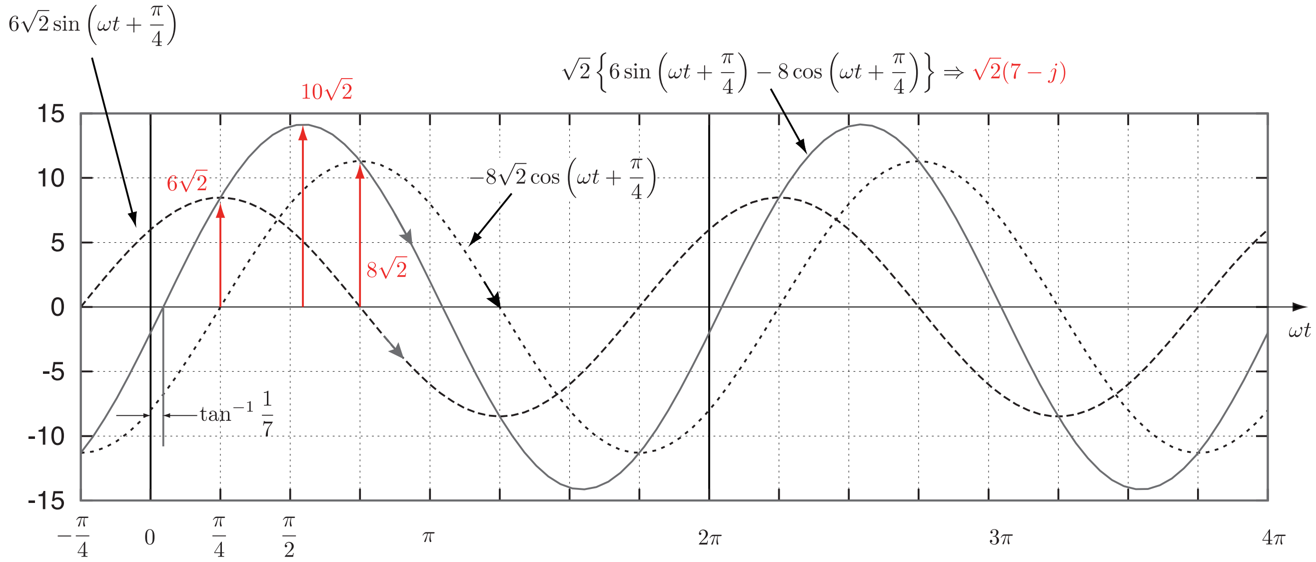

図 1: 正弦波の合成．複素数表示の $\sqrt{2}(7-j)$ は，瞬時値では $10\sqrt{2}\sin\left(\omega t-\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)$ となることに注意．

図 1 の基本的な部分を描き，PostScript ファイルに落としてくれる gnuplot へのスクリプトは以下の通り:

```
set output "fig00.eps"
set size 1,0.5
set terminal postscript
set xtics pi/4
set xrange [-pi/4:4*pi]
set grid
plot sqrt(2)*(6*sin(x+pi/4)) notitle w l lt 2 lw 2,\
-sqrt(2)*(8*cos(x+pi/4)) notitle w l lt 3 lw 2,\
sqrt(2)*(6*sin(x+pi/4) - 8*cos(x+pi/4)) notitle w l lt 1 lw 2
```

さらに $10\sqrt{2}\sin\left(\omega t-\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)$ を描かせて結果が一致するかどうかを確かめて欲しい（実際，ぴったり上書きされて変化は見えないだろうが…）