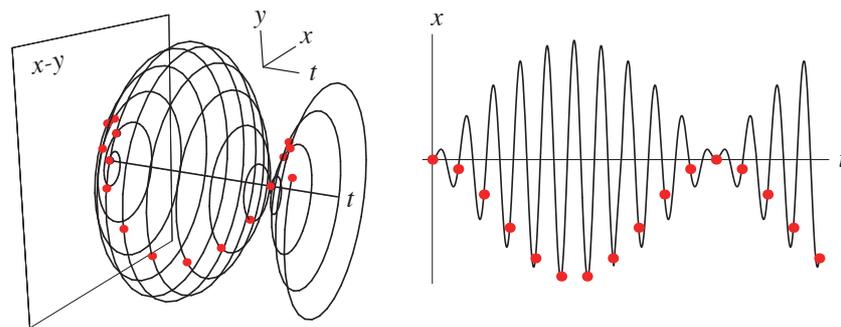


電気回路 3 講義補充ノート

— 状態でみる回路のふるまい —



1998

川上 博

はじめに

ちょっと困ったことになりました。カリキュラムの組み替えにより、基礎数学で微分方程式を習っていないのに、電気回路 3 の授業が始まってしまうのです。なにせ、回路 3 と言えば「線形・定係数・常・微分・方程式」の勉強そのものみたいな科目なのですから困ってしまいます。

勿論、電気回路 3 は微分方程式論とは違います。回路は数学ではないのです。いやいや正確には「何が違うのかが問題だ」と言うべきでしょう。どちらも同じような式を扱うのですから…。恐らく「同じ方程式も見方を変えれば違って見えるものなのだ」と言ったほうが適切でしょう。

こうなれば自前で線形定係数常微分方程式の必要な部分を勉強してしまった方が手取り早いと言えます。幸運なことに「線形定係数常微分方程式」は、数ある微分方程式の中で、簡単に解の存在と一意性が分かるばかりか、解をちゃっかり求めてしまうことの出来る方程式なのです。

「解けるから勉強する」ということ以外に、勉強しなければならない別の理由があります。もともと、なぜ電気電子工学科では 1 年生から「線形」電気回路 1 や回路 2 をたっぷり教えたりするのでしょうか？ 一つの理由（恐らく最大の理由）は「線形性とは何か」を手を変え品を変えて理解させたい魂胆にあります。この線形性の概念は、工学における解析と設計に最も強力な手段を提供してくれることでしょう。

まあ、あんまり「つべこべ」言わずに気軽に勉強してみましようや。これは役に立つとか立たないとかと言う以前に「おもしろい」勉強なのですから…。

ところでこのノートの目的は何かと言うと、一つは時間の制約から「教室では語る事のできなかった微分方程式の解き方」について補足をすることです。特に、状態空間の幾何学的なイメージづくりについては、これまでの定番カリキュラムには無いものです。何故このような重要な考え方を教えてこなかったのか、私には理解出来ないミステリーです。そこで今回、試験的に少し解説しました。これによって、過渡現象を「量ではなく質で」把握する手がかりが出来ると思います。実際、数学では教えてもらえない、状態に拘束の生じる場合の初期値の不連続性（いわゆる「跳び」の問題）などは、状態空間に埋め込んで考えて初めて正しく理解できるのです。状態空間内で状態の定性的な行動を「心でみる」ことによって、「なるほどー」と勉強のおもしろさが心にしみわたることでしょう。

二つ目の目的は、大げさかも知れませんが「勉強の仕方」に関する問題提起です。回路のような科目では、講義の目的が「知らなかった知識を覚える」というようなことよりは

むしろ、未知な分野を論理的な道筋を立てて系統的に学習するにはどうすればよいのかという「学習の方法」を「あなた自身に見いだしてもらおう」ことにあります。自律した自分を造ることは大学生として最も大切なことでしょう。そんなことに回路の勉強が役立つなんて信じられないと思うかも知れませんが、電気屋として将来生きてゆくのであれば「回路」はそんな科目なのです。回路のインフラである数学にその論理的な思考方法を学び、そして回路を通じて物理や自然のおもしろい現象がみえてくるのです。回路は電気屋にとって一つの文化かも知れません。いや、あなた自身の中にそのような文化を創造してほしいものです。このノートの第 II 部では、 RLC 直列回路に限ってあれこれ議論しています。「こんな簡単な回路！」と思うかも知れませんが、私はこのシンプルさの中に回路理論のすべてがあると思っています。実はまだまだ述べたい事柄があるのですが、今回は時間切れで中途半端に終わってしまいました。それでも、講義や定番教科書からはみ出した部分が多いことに気が付くと思います。回路以外の勉強にこれらがどう関係してくるのか何の解説もしてありませんが、それはおいおい分かってくることでしょう。

第 3 部の演算子法については、さわり程度で終わってしまっています。最初の計画では色々な演算子法を紹介する章を設ける予定でしたが、2 年生用のノートとしてはちょっと荷が重そうなので思い切って省略しました。 $Laplace$ 変換についても同じです。以前に配っていたプリントではコンパクトだったものが、章を立てて書いてみるともっともろしくなり、その分親しみが薄れ読みにくくなってしまいました。残念です。それに、演算子法を使ったら例えば第 8 章で述べたような「うなり減衰振動」をどう説明できるのか気になります。いずれやってみようと思っている事柄です。

歪み波信号についての $Fourier$ 級数を説明し、 $Fourier$ 変換と $Laplace$ 変換の関係などについても数章さいて解説すべきでしょう。これらの信号が RLC 直列回路に加えられた場合の応答についても述べたいものです。これらについては木内先生の通信工学にバトタッチをしたいと思います。

あっそうそう、大切なことを言い忘れるところでした。指数関数は微分や積分の操作に対してその関数の形を変えない唯一の関数なのです。このことをあなたのハートで理解するために線形定係数常微分方程式への旅が始まります。

bon voyage!

le 1^{er} avril, 1998

Voici mon secret. Il est très simple: *on ne voit bien qu'avec le cœur. L'essentiel est invisible pour les yeux.* L'essentiel est invisible pour les yeux, répéta le petit prince, afin de se souvenir.

And now here is my secret, a very simple secret: *It is only with the heart that one can see rightly; what is essential is invisible to the eye.* What is essential is invisible to the eye, the little prince repeated, so that he would be sure to remember.

“*Le Petit Prince*” par Antoine de Saint-Exupéry

目次

第 I 部	線形定係数常微分方程式	vii
第 1 章	指数関数とその性質	1
1.1	実変数の指数関数	1
1.2	複素変数の指数関数	3
1.3	行列の指数関数	6
第 2 章	定係数線形常微分方程式	11
2.1	1 階スカラー方程式	11
2.2	ベクトル方程式	17
2.3	高階スカラー方程式とコンパニオン方程式	27
第 3 章	線形時不変集中定数回路	31
3.1	回路の状態	31
3.2	回路の応答	33
第 4 章	2 次元線形力学系	37
4.1	2 次元同次方程式と自律系の性質	37
4.2	平衡点 (equilibrium point)	40
4.3	状態平面図あるいは相平面図	42
第 II 部	RLC 直列回路の諸応答	47
第 5 章	回路の自由振動	49
5.1	回路の状態方程式	49
5.2	初期値	50
5.3	特性方程式と特性根	51
5.4	固有ベクトル	53
5.5	式 (5.1.3) の一般解	55
5.6	相平面図	58

5.7	エネルギー関数と安定性の問題	64
5.8	時間反転と負性抵抗	65
5.9	非線形回路と発振現象	69
第 6 章	強制振動 I — 直流入力への応答 —	75
6.1	直流電圧源の印加された RLC 回路とその定常状態	75
6.2	ステップ応答	76
第 7 章	強制振動 II — 交流定常応答 —	81
7.1	交流電圧源の印加された RLC 回路	81
7.2	定常周期解	82
7.3	定常周期解の伝達特性	83
7.4	線形共振	87
7.5	周波数応答	90
第 8 章	強制振動 III — 交流過渡応答 —	93
8.1	回路の初期値と解析方法	93
8.2	状態の解析	96
8.3	回路方程式の正規化	99
8.4	静止状態からの過渡現象	102
8.5	うなり減衰振動の解析	106
第 III 部	演算子法入門	111
第 9 章	演算子法へのプレリユード	113
9.1	部分積分	113
9.2	インパルス関数とステップ関数	115
9.3	たたみ込み積分	118
第 10 章	$Laplace$ 変換法	123
10.1	定義と簡単な性質	123
10.2	指数関数, 三角関数とインパルス関数のラプラス変換	126
10.3	微分方程式を解く	128
10.4	部分分数展開	130
10.5	正弦波応答の計算例	131
10.6	たたみ込み積分	132
参考文献		121
付録 A	ベクトル戯画絵巻	123

A.1	ベクトル達の社会：ベクトル空間	123
A.2	線形写像	129
A.3	ベクトルの長さ：ベクトルの計量	135
付録 B	演算子ポストリユード	137
B.1	たたみ込み積ってなんなの	137
B.2	たたみ込み積商って超関数なの	143

第 I 部

線形定係数常微分方程式

第 1 章

指数関数とその性質

指数関数は、微分しても関数の形が変わらない特別の関数である。この性質が、定係数の線形常微分方程式を考える上で本質的な役割を果たしている。この章全体を通じて t は時刻を表す実数とする。

1.1 実変数の指数関数

実変数 t の指数関数は

$$e^t = \exp(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \quad (1.1)$$

で定義される。ここに e は自然対数の底であり、

$$e = 2.718281828 \cdots$$

の値を持つ定数（無理数）である。

今 a を実数パラメータとする関数

$$x(t) = e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} \quad (1.2)$$

を考えよう。

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{(at)^k}{k!} \right\} = a \frac{(at)^{k-1}}{(k-1)!}$$

であるから

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} e^{at} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} = a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} = ax(t)$$

したがって

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \quad (1.3)$$

の関係を得る。このことから $x(t) = e^{at}$ は次の性質を持っている。

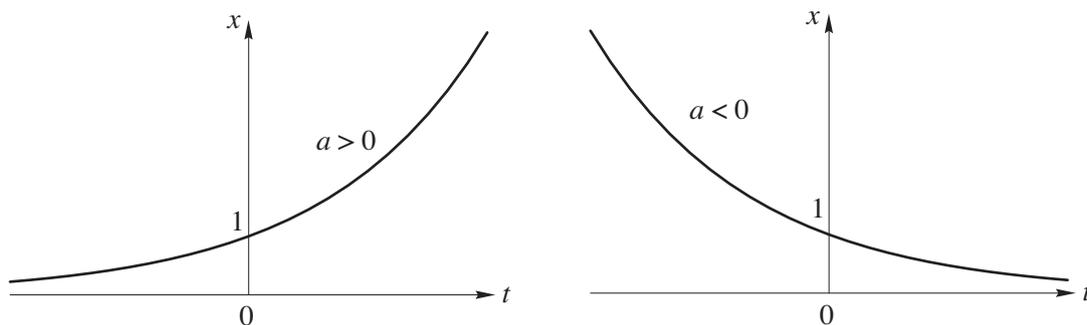


図 1.1 $x(t) = e^{at}$ のグラフ. $a = 0$ のグラフは省略した.

1. 微分しても関数 $x(t)$ は変化しない.
2. 微分演算（左辺）が a 倍の掛け算（右辺）に等しい. したがって, この関数の場合, 微分演算を定数倍の演算に置き換えることができる. すなわち, 微分という解析的な演算が代数的な掛け算となる.

次に $t \rightarrow \infty$ での $x(t)$ の振る舞いをみておこう. 明らかに次の性質がある.

1. $a > 0$ ならば $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} = \infty$
2. $a = 0$ ならば $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} = 1$
3. $a < 0$ ならば $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} = 0$

これらのグラフを図 1.1 に示しておいた.

【例題 1.1】

指数関数 $x(t) = Ke^{-at}$ を考える. ここに K は実定数, $a > 0$ とする. この関数の時定数と半減期を求めよ.

【解】 関数の値が $1/e$ となる時間間隔のことを**時定数** (time constant), また $1/2$ となる時間間隔のことを**半減期** (half value period) という. これらの値は時刻に無関係に一定な時間間隔となる. このことをみておこう.

今 t_0 を任意の時刻, T_e を時定数, T_h を半減期としよう. 上述の定義から

$$\frac{x(t_0 + T_e)}{x(t_0)} = \frac{1}{e} \quad (1.4)$$

$$\frac{x(t_0 + T_h)}{x(t_0)} = \frac{1}{2} \quad (1.5)$$

が成り立つ. 式 (1.4), (1.5) に $x(t) = Ke^{-at}$ を代入して整理すると $aT_e = 1$, $e^{aT_h} = 2$ を得る. これより

$$T_e = \frac{1}{a} \quad (1.6)$$

$$T_h = \frac{\ln 2}{a} = (\ln 2) T_e = 0.693 \cdots \times T_e \quad (1.7)$$

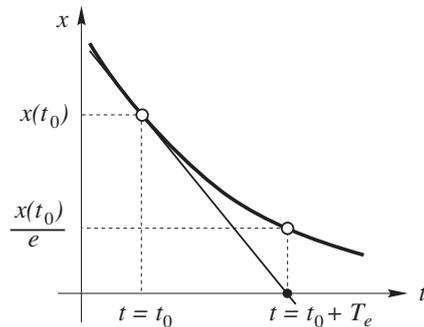


図 1.2 時定数 T_e と関数のグラフとの関係.

となる. このことから T_e, T_h は t_0 に依存せず, a のみで決まることが分かる.

なお, 時定数は $t = t_0$ において関数に引いた接線が 0 (時間軸) を横切るまでにかかる時間と考えることもできる, 図 1.2. この場合, 接線の方程式は

$$y(t) = -aKe^{-at_0}(t - t_0) + Ke^{-at_0}$$

であるから

$$y(t_0 + T_e) = 0 = -aKe^{-at_0}T_e + Ke^{-at_0}$$

これより式 (1.6) が求められる. 電気工学ではもっぱら時定数が用いられる.

1.2 複素変数の指数関数

式 (1.2) の実パラメータ a を複素数としてみよう. すなわち

$$a = -\zeta + j\omega \quad (1.8)$$

とする. ここに, ζ, ω は実数, $j = \sqrt{-1}$ とする. a の実部に $-$ を付けておいたのは, 線形電気回路で出てくるほとんどすべての例が, 負の実部を持つからである.

式 (1.2) の冪級数はこのときもすべての a と t について収束し, 指数関数が定義できる. すなわち

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{(-\zeta + j\omega)t} = e^{-\zeta t} e^{j\omega t} = e^{-\zeta t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j\omega t)^k}{k!} \\ &= e^{-\zeta t} \left[\left\{ 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} + \dots \right\} + j \left\{ \frac{\omega t}{1!} - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \frac{(\omega t)^5}{5!} + \dots \right\} \right] \\ &= e^{-\zeta t} [\cos \omega t + j \sin \omega t] \end{aligned} \quad (1.9)$$

となる. 特に, $\zeta = 0$ の場合, 次のオイラー (Euler) の公式を得る.

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (1.10)$$

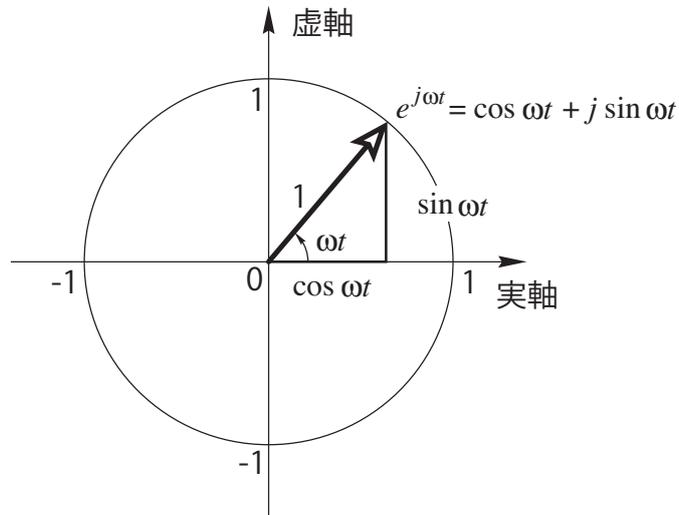
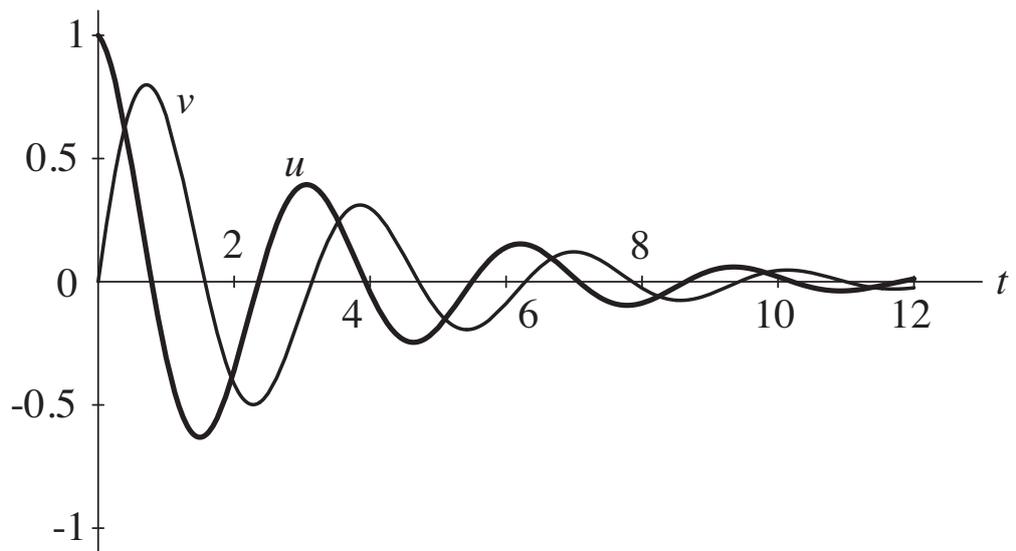
図 1.3 $e^{j\omega t}$ のベクトル表示.

図 1.4 式 (1.2.5) のグラフ.

この公式は、交流理論において定常状態の計算に使われる重要な公式である。図 1.3 参照。さて、複素数値関数 (1.9) を実部と虚部に分けて考えてみよう。すなわち

$$z(t) = u(t) + jv(t) \quad (1.11)$$

とおくと、式 (1.9) より

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\zeta t} \cos \omega t \\ v(t) &= e^{-\zeta t} \sin \omega t \end{aligned} \quad (1.12)$$

を得る。したがって、 t を変数として式 (1.12) のグラフを描くと図 1.4 となる。次に式

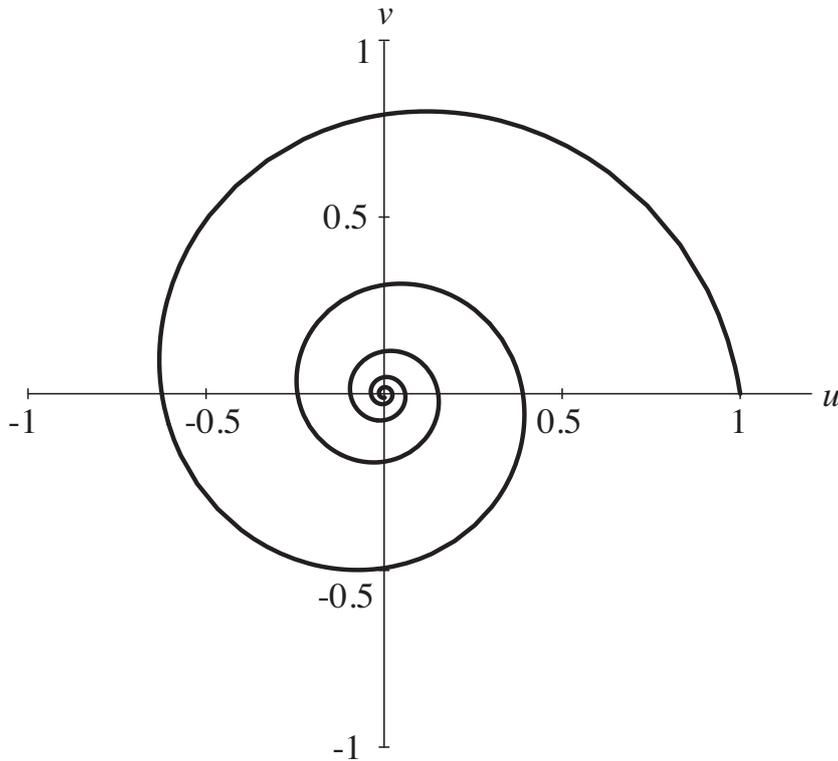


図 1.5 複素平面上での式 (1.2.5) のグラフ.

(1.9) を t で微分してみよう. この場合も実変数の場合の式 (1.3) と同様に

$$\frac{dz}{dt} = az(t) = (-\zeta + j\omega)z(t) \quad (1.13)$$

となる. したがって, 式 (1.12) は次の微分方程式を満たしていることが分かる.

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= -\zeta u(t) - \omega v(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} &= \omega u(t) - \zeta v(t) \end{aligned} \quad (1.14)$$

【例題 1.2】

式 (1.12) のグラフを t をパラメータとして複素平面上に描け.

【解】 図 1.5 となる.

1.3 行列の指数関数

今 \mathbf{A} を $n \times n$ の正方行列 (各要素は実数または複素数) とし, この行列の指数関数を次式で定義してみよう.

$$e^{\mathbf{A}t} = \exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} \quad (1.15)$$

ここに, \mathbf{I} は $n \times n$ の単位行列を表す. 式 (1.15) の冪級数は, このときもすべての \mathbf{A} と t に対して収束し, $n \times n$ の正方行列値指数関数がうまく定義できる. この収束については, 適当な数学の教科書, たとえばポントリャーギン [3] やスメール [4] を参考にしてほしい. さしあたり, 2×2 の正方行列 \mathbf{A} の指数関数を考えてもらえば, 十分である.

$$\frac{de^{\mathbf{A}t}}{dt} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A} \quad (1.16)$$

が成り立つことは, 定義式 (1.15) の冪級数を項別微分してみれば分かる. また, 行列 $e^{\mathbf{A}t}$ について, 次の性質がある. これらは定義式 (1.15) から確かめることができる.

1.
$$e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s} \quad (1.17)$$

2.
$$(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t} \quad (1.18)$$

3. もし $\mathbf{BA} = \mathbf{AB}$ ならば, 次式が成り立つ:

$$\mathbf{B}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} \quad (1.19)$$

4. もし $\mathbf{BA} = \mathbf{AB}$ ならば, 次式が成り立つ:

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} \quad (1.20)$$

5. もし $\mathbf{A} = \mathbf{PBP}^{-1}$ ならば, 次式が成り立つ:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{B}t}\mathbf{P}^{-1} \quad (1.21)$$

【例題 1.3】

次の行列 \mathbf{A} の指数行列 $e^{\mathbf{A}t}$ を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}, (2) \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}, (3) \begin{bmatrix} -\zeta & -\omega \\ \omega & -\zeta \end{bmatrix}, (4) \begin{bmatrix} -a & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$

【解】 定義式 (1.15) と式 (1.17) から式 (1.21) の性質を使って, 直接計算できる.

$$(1) \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} (-a)^k & 0 \\ 0 & (-b)^k \end{bmatrix} \text{であることから,}$$

$$\exp \left\{ \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} t \right\} = \begin{bmatrix} e^{-at} & 0 \\ 0 & e^{-bt} \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

(2) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{J}$ とおこう. 直接計算して, $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}, \mathbf{J}^3 = -\mathbf{J}, \mathbf{J}^4 = \mathbf{I}$ となることが分かる. したがって,

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{J}\omega t} &= \mathbf{I} \left\{ 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} + \dots \right\} + \mathbf{J} \left\{ \omega t - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \frac{(\omega t)^5}{5!} + \dots \right\} \\ &= \mathbf{I} \cos \omega t + \mathbf{J} \sin \omega t = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.23)$$

この結果を式 (1.10) のオイラーの公式と比較するとおもしろい.

$$(3) \begin{bmatrix} -\zeta & -\omega \\ \omega & -\zeta \end{bmatrix} = -\zeta \mathbf{I} + \omega \mathbf{J} \text{ と書ける. } \mathbf{I}\mathbf{J} = \mathbf{J}\mathbf{I} \text{ であるから, 式 (1.20) より,}$$

$$e^{(-\zeta \mathbf{I} + \omega \mathbf{J})t} = e^{-\zeta \mathbf{I}t} e^{\omega \mathbf{J}t} = e^{-\zeta t} (\mathbf{I} \cos \omega t + \mathbf{J} \sin \omega t) = \begin{bmatrix} e^{-\zeta t} \cos \omega t & -e^{-\zeta t} \sin \omega t \\ e^{-\zeta t} \sin \omega t & e^{-\zeta t} \cos \omega t \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

なお, 式 (1.14) を行列の形に書くと,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\zeta & -\omega \\ \omega & -\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

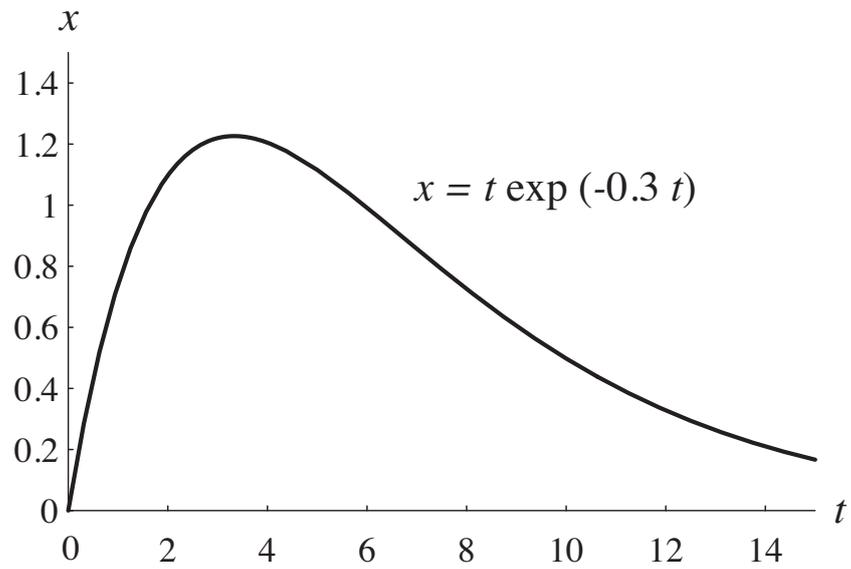
となって, 行列微分方程式 (1.16) を列毎に分解したベクトル微分方程式となる. このことから, 式 (1.24) の第 1 列は式 (1.12) に対応している. 逆に微分方程式 (1.25) は式 (1.24) の第 2 列の解も持つことが分かる.

(4) $k \geq 2$ ならば,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

であるから,

$$\exp \left(-at \mathbf{I} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = e^{-at} \left\{ \mathbf{I} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} e^{-at} & te^{-at} \\ 0 & e^{-at} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

図 1.6 $te^{-0.3t}$ のグラフ.

となる. なお, 式 (1.27) に含まれる関数 te^{-at} は $a > 0$ とすると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-at} = 0 \quad (1.28)$$

となることに注意しよう. すなわち, t と指数関数の積になっているが, t が十分大きくなると零に収束する. この関数のグラフを図 1.6 に示しておいた.

演習問題

1. この問題では、時間関数の微分を $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$ と略記することにしよう.

$$\mathcal{D} = \frac{d}{dt}, \mathcal{D}^2 = \frac{d^2}{dt^2}, \dots$$

すると、たとえば指数関数は $\mathcal{D}e^{at} = ae^{at}$ なので $(\mathcal{D} - a)e^{at} = 0$ の関係式が成り立つ. この例に従って次の関係式が成り立つことを示せ.

- (a) $\mathcal{D}^3(10t^2 + 5t + 7) = 0$
 (b) $(\mathcal{D} - a)(\mathcal{D} - b)(e^{at} + e^{bt}) = 0$
 (c) $(\mathcal{D}^2 + \omega^2)(\sin \omega t + \cos \omega t) = 0$
 (d) $(\mathcal{D} - c)^s e^{at} = (a - c)e^{at}$, if $a \neq c$.
 (e) $(\mathcal{D} - a)^s (t^i e^{at}) = 0$, if $s > i$.
2. 1 を積分して次々と加算すると e^t を得る. このことが数学の教科書では何処にどう説明されているか調べよ.

$$\int 1 dt = t, \int t dt = \frac{1}{2}t^2, \int \frac{1}{2}t^2 dt = \frac{1}{6}t^3, \dots \Rightarrow 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \dots$$

3. 式 (1.14) を満足する関数 $u(t), v(t)$ は、次のスカラー微分方程式もまた満足することを示せ.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\zeta \frac{dx}{dt} + (\zeta^2 + \omega^2)x = 0$$

4. 式 (1.16) から式 (1.21) までの関係式が成り立つことを証明せよ.
 5. 次の積分公式で与えられる変換を *Laplace* 変換という.

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

ここに、 s は複素数である. この積分変換は、時刻 t に関する実関数 $x(t)$ を複素関数 $X(s)$ に変換する. この公式を用いると微分方程式を代数方程式に変換してしまふことができる. このことに関係した以下の問に答えよ.

- (a) 指数関数 e^{-at} の *Laplace* 変換を導け. ここに、 a は正の実数とする.
 (b) 三角関数 $\sin \omega t$ の *Laplace* 変換を導け.
 (c) 導関数 $\frac{dx(t)}{dt}$ の *Laplace* 変換を導け.
 (d) 微分方程式 $\frac{dx}{dt} + ax = 0$, $x(0) = x_0$ の *Laplace* 変換を導け.

ヒント：これらはいずれも部分積分の公式

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{dt} y(t) dt = [x(t)y(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x(t) \frac{dy}{dt} dt$$

を用いて簡単に証明できる. 詳しくは第 10 章をみよ.

第 2 章

定係数線形常微分方程式

2.1 1 階スカラー方程式

実数値関数 $x(t)$ に関する定係数 1 階常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + b(t) \quad (2.1)$$

を考えよう。この方程式で $x(t)$ は時刻 t における回路の**状態** (state) に対応する。また $b(t)$ は電源に対応した既知関数である。これを**入力** (input) または**外力** (forcing term) と呼ぶ。 $b(t) = B_0$ (一定) となる直流定電源、および $b(t) = B \sin \omega t$ となる交流正弦波電源の場合が基本的である。

2.1.1 重ね合わせの原理

さて式 (2.1) の基本的な性質は、解に関する**重ね合わせの原理** (Principle of superposition) である。すなわち、 $x(t)$ が入力 $h(t)$ に対する式 (2.1) の解であり、 $y(t)$ が入力 $g(t)$ に対する解であるとき、入力 $b(t) = ch(t) + dg(t)$ に対する解は $cx(t) + dy(t)$ となる。ここで c, d は任意のスカラー (実数) とする。このことは、直接代入してみれば簡単に分かることである。

特に $c = -d = 1$, $h(t) = g(t) = b(t)$ とすると $x(t) - y(t)$ は

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \quad (2.2)$$

の解となる。入力のない式 (2.2) を**同次方程式** (homogeneous equation) という。これに対して入力のある式 (2.1) を**非同次方程式** (non-homogeneous equation) と呼ぶ。

2.1.2 同次方程式の一般解

1.1 の式 (1.3) でみたように、 e^{at} は同次方程式 (2.2) の 1 つの解である。さらに、 K を任意定数として

$$x(t) = Ke^{at} \quad (2.3)$$

を考えると、これもまた式 (2.2) を満たすことが分かる。では逆に式 (2.2) を満たす解は式 (2.3) 以外にはないのであろうか。

今 $y(t)$ を式 (2.2) を満たす任意の解としよう。すなわち

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t)$$

としよう。 $y(t)e^{-at}$ なる関数を考える。

$$\frac{d}{dt}(y(t)e^{-at}) = \frac{dy}{dt}e^{-at} - aye^{-at} = 0$$

であることから $y(t)e^{-at} = K$ は一定となることが分かる。したがって

$$y(t) = Ke^{at}$$

すなわち、式 (2.2) の解は、式 (2.3) しかないことが分かった。任意定数 K を含んだ解 (2.3) のことを同次方程式 (2.2) の一般解 (general solution) という。

2.1.3 同次方程式の一般解を求める手順

同次方程式 (2.2) が最初に与えられて、解 (2.3) を求めるには、次の手順 1. ~ 3. に従えばよい。

1. 式 (2.2) の解は指数関数となることが分かったので、この解を

$$x(t) = e^{\lambda t} \tag{2.4}$$

と仮定し、 λ を決定することを考える。

2. 式 (2.4) を式 (2.2) に代入し

$$\lambda e^{\lambda t} = ae^{\lambda t}$$

$$(\lambda - a)e^{\lambda t} = 0$$

$$(\lambda - a)e^{\lambda t} = 0$$

$e^{\lambda t} \neq 0$ より

$$\chi(\lambda) = \lambda - a = 0 \tag{2.5}$$

を得る。これが λ を定める方程式となる。式 (2.5) は式 (2.2) に対する特性方程式 (characteristic equation) という。式 (2.5) を解いて

$$\lambda = a$$

従って式 (2.4) は

$$x(t) = e^{at} \tag{2.6}$$

となる。

3. 式 (2.6) はスカラー倍しても式 (2.2) の解となるので、一般解は式 (2.3) となる。

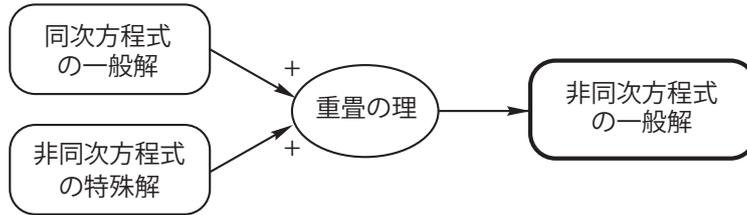


図 2.1 非同次方程式の一般解（重ね合わせの理）.

2.1.4 非同次方程式の特殊解と一般解

次に非同次方程式 (2.1) の解について考えよう. 今 $x_p(t)$ を式 (2.1) を満たす 1 つの解とする. $x_p(t)$ はさしあたり式 (2.1) を満たせば何でもよい. これを式 (2.1) の特殊解 (particular solution) という. すると, 重ね合わせの原理で述べたことから, 式 (2.1) の任意の解は

$$x(t) = Ke^{at} + x_p(t) \quad (2.7)$$

の形をしていることが分かる. これを非同次方程式 (2.1) の一般解という. つまり, 非同次方程式の一般解は, 同次方程式の一般解と非同次方程式の特殊解を重ね合わせた解となっている. 図 2.1 参照.

2.1.5 非同次方程式の特殊解の計算法

ここで, 非同次方程式の特殊解を計算することを考えよう. 一般的な手法としては, 次に述べる定数変化法 (variation of constants formula) がある.

今式 (2.1) の解を

$$x_p(t) = K(t)e^{at} \quad (2.8)$$

と仮定してみよう. これを式 (2.1) に代入して, 整理すると

$$\frac{dK(t)}{dt} = e^{-at}b(t) \quad (2.9)$$

を得る. この微分方程式は直ちに積分できる.

$$K(t) = \int_{t_0}^t e^{-a\tau}b(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

したがって, これを式 (2.8) に代入して

$$x_p(t) = \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}b(\tau) d\tau \quad (2.11)$$

これより, 非同次方程式の一般解 (2.7) は

$$x(t) = Ke^{at} + x_p(t) = Ke^{at} + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}b(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

と表すことができる.

ここで, 2つの関数 $f(t)$ と $g(t)$ に対して

$$f * g(t) = \int_{t_0}^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \quad (2.13)$$

を f と g のたたみ込み積分 (convolution) という. このたたみ込みを用いると式 (2.12) は次式と書ける.

$$x(t) = Ke^{at} + x_p(t) = Ke^{at} + e^{at} * b(t) \quad (2.14)$$

【例題 2.1】

外力 $b(t)$ が次の関数で与えられる場合の特殊解を求めよ.

$$(1) E \text{ (一定)} \quad (2) Ee^{-\zeta t} \quad (3) E \sin \omega t$$

【解】 上述の定数変化法は一般の関数 $b(t)$ について計算できるが, 積分 (2.10) を計算する必要がある. この例題のように $b(t)$ が比較的簡単な場合は以下のように直接特殊解を求めるとよい.

(1) $b(t) = E$ なので, 式 (2.10) より

$$K(t) = \int_{t_0}^t e^{-a\tau} E d\tau = \frac{E}{(-a)} \{e^{-at} - e^{-at_0}\}$$

したがって

$$x_p(t) = e^{at} \frac{E}{(-a)} \{e^{-at} - e^{-at_0}\} = \frac{E}{(-a)} \{1 - e^{a(t-t_0)}\}$$

一般解は

$$x(t) = Ke^{at} - \frac{E}{a} \{1 - e^{a(t-t_0)}\} = \left(K + \frac{E}{a} e^{-at_0}\right) e^{at} - \frac{E}{a} = Ke^{at} - \frac{E}{a}$$

ただし, 新しい任意定数 $K = K + \frac{E}{a} e^{-at_0}$ とおいた.

特殊解として $-E/a$ のみを求めるには, 次のようにすれば簡単である. 今 $x_p(t) = H$ (一定) とおいてみる. これを式 (2.1) に代入すると

$$0 = aH + E \quad (2.15)$$

これより

$$x_p(t) = -\frac{E}{a} \quad (2.16)$$

を得る.

(2) $b(t) = Ee^{-\zeta t}$ なので $x_p(t) = He^{-\zeta t}$ とおいて H を求める. 式 (2.1) に代入すると

$$-\zeta He^{-\zeta t} = aHe^{-\zeta t} + Ee^{-\zeta t}$$

これより, $\zeta + a \neq 0$ の場合

$$H = -\frac{E}{\zeta + a} \quad (2.17)$$

したがって 1 つの特殊解は

$$x_p(t) = -\frac{E}{\zeta + a} e^{-\zeta t} \quad (2.18)$$

である.

また, $\zeta + a = 0$ の場合は, 式 (2.10) から直接計算する. 1 つの特殊解として,

$$x_p(t) = Ete^{at} \quad (2.19)$$

を得る.

(3) $\Im(Ee^{j\omega t}) = E \sin \omega t$ であるから, $Ee^{j\omega t}$ なる外力の場合の解を求めて, その虚部をとればよい. そこで $z(t) = He^{j\omega t}$ と仮定しよう. (2) と同様にして

$$z_p(t) = \frac{E}{-a + j\omega} e^{j\omega t} = -\frac{E}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{j(\omega t + \phi)} \quad (2.20)$$

を得る. ただし $\phi = \tan^{-1}(\omega a)$ である. これより $b(t) = E \sin \omega t$ に対する 1 つの特殊解 $x_p(t)$ は

$$x_p(t) = \Im(z_p(t)) = \frac{E}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \sin(\omega t + \phi) \quad (2.21)$$

となる. ただし $\phi = \tan^{-1}(\omega a)$ とおいた. この手法は交流理論そのものであるから, すでになじみ深いことと思う.

2.1.6 初期値問題

上で述べた一般解に現われる任意定数 K は, ある時刻 $t = t_0$ で解の値 $x(t_0) = x_0$ を指定すれば, 完全に定めることができる. 回路解析への応用では, すべてこの形で条件が与えられ, 状態を一意的に決定することとなる. t_0 を初期時刻, x_0 を初期値, (t_0, x_0) の組を初期条件 (initial condition) という. また初期条件を与えて, 解を一意的に定める問題を初期値問題 (initial value problem) という.

初期値問題を解くには次の手順に従うとよい. 図 2.2 参照.

1. 一般解を求める.
2. 初期条件より一般解に含まれる任意定数を一意的に決定し, 条件を満たす解を求める.

【例題 2.2】

初期条件 (t_0, x_0) を満たす式 (2.1) の解を求めよ.

【解】一般解は式 (2.12) であるから

$$x_0 = x(t_0) = Ke^{at_0}$$

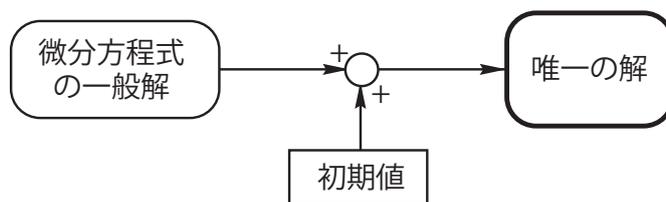


図 2.2 初期値が解を唯一に決定する.

これより

$$K = e^{-at_0} x_0$$

したがって求める解は

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b(\tau) d\tau \quad (2.22)$$

となる.

【例題 2.3】

外力 $b(t)$ にインパルス関数 $\delta(t)$ が含まれる微分方程式 (2.1) の解について考えよう. 初期条件は, 簡単のため $t_0 = 0$ すなわち $t = 0$ で, $x(0) = x_0$ と与えられるものとする. また外力は, $b(t) = h(t) + E\delta(t - t_0)$ で与えられるものとする. ここで $h(t)$ は普通の意味で積分できる関数とする.

【解】 教科書 [7] 第 1 章 1.2.3 で考えた状態に拘束が生じる回路や, 状態変数の選択法がよくない場合には, この例題のようなインパルス*¹入力を考える必要が生じる.

式 (2.1) を積分方程式に書き直して考えてみよう.

$$\begin{aligned} x(t) - x(0) &= \int_0^t \{ax(\tau) + h(\tau) + E\delta(\tau - t_0)\} d\tau \\ &= \int_0^t (ax(\tau) + h(\tau)) d\tau + E \int_0^t \delta(\tau - t_0) d\tau \end{aligned} \quad (2.23)$$

この式の最後の項は $t = t_0$ でインパルス関数があるので, 式 (2.23) は

(i) $0 \leq t < t_0$ の時間では

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (ax(\tau) + h(\tau)) d\tau \quad (2.24)$$

(ii) $t > t_0$ の時間では

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (ax(\tau) + h(\tau)) d\tau + E \quad (2.25)$$

となる. このことは $t = t_0$ の瞬間に解を E だけずらすことを意味している. 言いかえると, $t = t_0$ の瞬間に加わったインパルスは解を $x(t_0)$ から $x(t_0) + E$ に跳躍させる.

*¹ インパルス関数については, 第 9 章 9.2 をみよ.

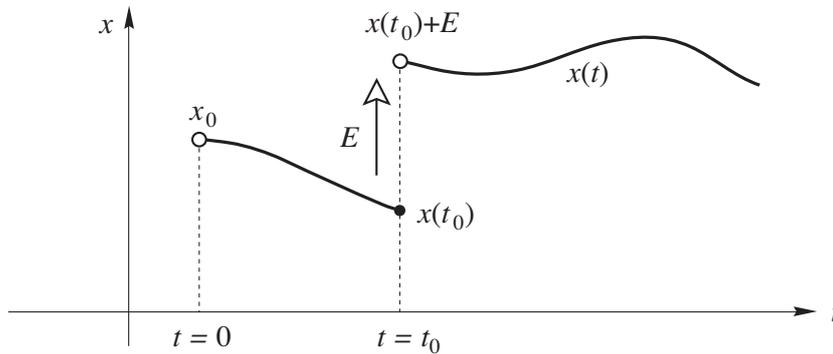


図 2.3 インパルス入力による解の瞬時ジャンプ.

以上のことから、インパルス関数の入力項を持つ方程式の解法は、まずインパルス関数の入力項を除いた方程式の解を考え、インパルスが加えられる時刻で、解をインパルスの大きさだけ動かす、この点を新しい初期値として、それ以後の解を求めればよい。図 2.3 をみよ。

2.2 ベクトル方程式

n 個の状態 $x_k(t)$, ($k = 1, \dots, n$) に関する定係数 1 階連立常微分方程式は

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = \sum_{m=1}^n a_{km} x_m + b_k(t) \quad (k = 1, \dots, n) \quad (2.26)$$

の形をしている。ここに a_{km} ($k, m = 1, \dots, n$) は定数、 $b_k(t)$ ($k = 1, \dots, n$) は外力（入力ともいう）となる既知関数である。

この方程式は状態ベクトル $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]'$ 、外力 $\mathbf{b}(t) = [b_1(t), \dots, b_n(t)]'$ と行列

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

を用いて

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad (2.27)$$

のように簡潔に表すことができる。式 (2.27) は、1 階スカラー方程式 (2.1) と同じ形をしている。このことから 2.1 で述べたスカラー方程式の議論はほとんど変更なしに式 (2.27) に拡張できる。たとえば初期条件 (t_0, \mathbf{x}_0) を満たす式 (2.27) の一般解は

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}(\tau) d\tau \quad (2.28)$$

となる.

さて, 同次方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.29)$$

の初期値問題を考えてみよう. $t = 0$ で初期値 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ を満足する解を求める. 式 (1.16) を参考にして, この解は

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 \quad (2.30)$$

となることが分かる.

【例題 2.4】

次の同次方程式の解を求めよ. ただし, $t = 0$ で初期値 $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ を満足するものとする.

$$(1) \frac{dx}{dt} = -ax, \frac{dy}{dt} = -by$$

$$(2) \frac{dx}{dt} = -\omega y, \frac{dy}{dt} = \omega x$$

$$(3) \frac{dx}{dt} = -\zeta x - \omega y, \frac{dy}{dt} = \omega x - \zeta y$$

$$(4) \frac{dx}{dt} = -ax + y, \frac{dy}{dt} = -ay$$

【解】 例題 1.3 と式 (2.30) から直ちに計算できる.

$$(1) x(t) = e^{-at}x_0, y(t) = e^{-bt}y_0$$

$$(2) x(t) = x_0 \cos \omega t - y_0 \sin \omega t, y(t) = x_0 \sin \omega t + y_0 \cos \omega t$$

$$(3) x(t) = x_0 e^{-\zeta t} \cos \omega t - y_0 e^{-\zeta t} \sin \omega t, y(t) = x_0 e^{-\zeta t} \sin \omega t + y_0 e^{-\zeta t} \cos \omega t$$

$$(4) x(t) = x_0 e^{-at} + y_0 t e^{-at}, y(t) = y_0 e^{-at}$$

2.2.1 同次方程式の基本解と行列 \mathbf{A} の固有値, 固有ベクトル

同次方程式 (2.29) の解 (2.30) に含まれている行列指数関数を具体的に表現する問題を考えておこう.

まずスカラー方程式の場合にならって, 式 (2.29) の解を

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{h} \quad (2.31)$$

と仮定してみよう. ここでスカラー λ と定ベクトル \mathbf{h} を定めなければならない. そこで式 (2.31) を式 (2.29) に代入し, 両辺を $e^{\lambda t}$ で割って,

$$\mathbf{A}\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h} \quad (2.32)$$

を得る. このことから, 式 (2.31) が同次方程式 (2.29) の解となるためには, λ と \mathbf{h} は式 (2.32) を満足しなければならない. 式 (2.32) は, 線形代数でよく知られた関係式であ

る. すなわち λ は行列 \mathbf{A} の固有値 (eigen value), \mathbf{h} は λ に関する固有ベクトル (eigen vector) である.

式 (2.32) を整理して

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

これを \mathbf{h} の連立方程式とみると, $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ なる解を持つためには, λ は次式の根とならなければならない.

$$\chi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (2.34)$$

ここで, $\det(\mathbf{P})$ は行列 \mathbf{P} の行列式を表す. λ に関する n 次の代数方程式 (2.34) は, 同次方程式の解 (2.31) に必要な λ を見出す式として特性方程式と呼ばれている. またその根を特性根という. 行列 \mathbf{A} についていえば, これらは固有方程式および固有値と呼ばれている.

応用上, 最も大切なのは \mathbf{A} の固有値が単根の場合である. すなわち特性根がすべて互いに相異なる場合である. 以下この場合についてのみ考えておこう.

(1) 特性根が互いに相異なる実根の場合

式 (2.34) の根を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ としよう. これら各々に対して式 (2.31) の解が見い出される.

$$\mathbf{x}_k(t) = e^{\lambda_k t} \mathbf{h}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.35)$$

ここで $\mathbf{h}_k (k = 1, \dots, n)$ は λ_k に対する \mathbf{A} の固有ベクトルであり, これは式 (2.33) より求める. これら n 個の解を同次方程式 (2.29) の基本解 (fundamental solution) という. n 個の基本解 (2.35) が求められると, 同次方程式の一般解 $\mathbf{x}(t)$ は,

$$\mathbf{x}(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{h}_1 + K_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{h}_2 + \dots + K_n e^{\lambda_n t} \mathbf{h}_n \quad (2.36)$$

となる. ここに $K_k (k = 1, \dots, n)$ は任意定数である. ここでも重ね合わせの理を用いた.

【例題 2.5】

次の同次方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

【解】 特性方程式は次式となる.

$$\chi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -2 \\ 1 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad (2.38)$$

したがって, 特性根は

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3 \quad (2.39)$$

となる. λ_1 に対する固有ベクトルを計算しよう. 式 (2.33) より

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow h_1 - 2h_2 = 0 \quad (2.40)$$

の関係式を得る. λ_1 に対する固有ベクトルは, この関係を満たしさえすればよいので, h_1 または h_2 を適当に選んで, 他方を式 (2.40) より決定するとよい. ここでは, $h_2 = 1$ とすると, $h_1 = 2$ となる. すなわち, 固有ベクトルは $\mathbf{h}_1 = [2, 1]'$ となる. 同様に λ_2 に対する固有ベクトルは, $\mathbf{h}_2 = [1, 1]'$ と選べる. 以上のことから一般解は次式となる.

$$\mathbf{x}(t) = K_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + K_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

(2) 1 組の互いに共役な複素根と他が実根の場合

2 組以上の互いに共役な複素根を持つ場合も同様に扱うことができるので, ここでは 1 組の互いに共役な複素根のある場合を考えておこう.

λ_1 と $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ が互いに共役な複素根とする. それぞれに対する固有ベクトルは \mathbf{h}_1 および $\mathbf{h}_2 = \overline{\mathbf{h}_1}$ となる. ここで $\overline{(\cdot)}$ は共役複素数を表す. このとき同次方程式 (2.29) の一般解は, 式 (2.36) と同様, 形式的には

$$\mathbf{x}(t) = K e^{\lambda t} \mathbf{h} + \bar{K} e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{h}} + K_3 e^{\lambda_3 t} \mathbf{h}_3 + \cdots + K_n e^{\lambda_n t} \mathbf{h}_n \quad (2.42)$$

と書くことができる. ここに, $\lambda_1 = \lambda, \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}, K_1 = K$ とおいた. 任意定数 K は任意の複素数である. 式 (2.42) の右辺第 1 項と第 2 項は互いに共役となり, 結果は実数となることに注意しよう.

そこで式 (2.42) の第 1 項と第 2 項を実数で具体的に表してみよう.

$$\lambda = -\zeta + j\omega, \quad K = K_1 + jK_2, \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + j\mathbf{h}_2 \quad (2.43)$$

とおこう. ここに $-\zeta, \omega$ は実数 (固有値の実部と虚部), $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ は実ベクトル (固有ベクトルの実部と虚部) である.

$$\Re(K e^{\lambda t} \mathbf{h}) = K_1 e^{-\zeta t} (\mathbf{h}_1 \cos \omega t - \mathbf{h}_2 \sin \omega t) - K_2 e^{-\zeta t} (\mathbf{h}_1 \sin \omega t + \mathbf{h}_2 \cos \omega t)$$

そこで

$$K e^{\lambda t} \mathbf{h} + \bar{K} e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{h}} = 2\Re(K e^{\lambda t} \mathbf{h})$$

の関係から, 式 (2.42) の右辺の第 1 項と第 2 項の和の部分は

$$\begin{aligned} K e^{\lambda t} \mathbf{h} + \bar{K} e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{h}} &= 2\Re(K e^{\lambda t} \mathbf{h}) \\ &= 2K_1 e^{-\zeta t} (\mathbf{h}_1 \cos \omega t - \mathbf{h}_2 \sin \omega t) - 2K_2 e^{-\zeta t} (\mathbf{h}_1 \sin \omega t + \mathbf{h}_2 \cos \omega t) \end{aligned}$$

となる.

以上のことから、一般解 (2.42) は

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = & K_1 e^{-\zeta t} (\mathbf{h}_1 \cos \omega t - \mathbf{h}_2 \sin \omega t) - K_2 e^{-\zeta t} (\mathbf{h}_1 \sin \omega t + \mathbf{h}_2 \cos \omega t) \\ & + K_3 e^{\lambda_3 t} \mathbf{h}_3 + \cdots + K_n e^{\lambda_n t} \mathbf{h}_n \end{aligned}$$

と表すことができる.

【例題 2.6】

次の同次方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\zeta & -\omega \\ \omega & -\zeta \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

【解】 特性方程式は次式となる.

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\zeta - \lambda & -\omega \\ \omega & -\zeta - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + \zeta)^2 + \omega^2 = 0 \quad (2.45)$$

そこで、特性根 $\lambda = -\zeta + j\omega$ に対する固有ベクトルは、例題 2.5 と同様に計算すると、次式を満足する必要がある.

$$jh_1 + h_2 = 0$$

いま、 $h_1 = 1, h_2 = -j$ と選ぶと、固有ベクトルは

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

と計算できる. したがって、式 (2.44) より一般解は次式となる.

$$\mathbf{x}(t) = K_1 e^{-\zeta t} \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix} - K_2 e^{-\zeta t} \begin{bmatrix} \sin \omega t \\ -\cos \omega t \end{bmatrix} = K_1 e^{-\zeta t} \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix} + K_2 e^{-\zeta t} \begin{bmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

これは、例題 2.4 (3) の解と一致していることに注意しよう.

2.2.2 同次方程式の一般解と座標変換

行列 \mathbf{A} の固有値が実根の場合について、一般解を具体的に表現できたので、これらと行列指数関数を使った解 (2.30) の関係を見ておこう.

(1) 解 (2.30) と解 (2.36) の関係

解 (2.36) は次のように行列を使って書き直すことができる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \mathbf{h}_1 & \vdots & e^{\lambda_2 t} \mathbf{h}_2 & \vdots & \dots & \vdots & e^{\lambda_n t} \mathbf{h}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \vdots & \mathbf{h}_2 & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{h}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & & & & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix} \quad (2.47) \\
 &= \mathbf{H}\Phi(t)\mathbf{K}
 \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \vdots & \mathbf{h}_2 & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{h}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & & h_{n1} \\ h_{12} & h_{22} & & h_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{1n} & h_{2n} & & h_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix} \\
 \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} &= \text{diag} [e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]
 \end{aligned}$$

を表す。 $\text{diag}[a_1, a_2, \dots, a_n]$ は a_1, a_2, \dots, a_n が対角要素となり、他の要素がすべて 0 の対角行列を表す。 n 個の固有ベクトルは互いに 1 次独立であるから、これらを並べて作った行列 \mathbf{H} は正則となることに注意しよう。

式 (2.47) で初期条件 $(0, \mathbf{x}_0)$ を満足する解を求めよう。

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{H}\mathbf{K}$$

より

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{x}_0$$

これを式 (2.47) に代入して

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}\Phi(t)\mathbf{H}^{-1}\mathbf{x}_0 \quad (2.48)$$

を得る. これが解 (2.30) にほかならない. そこで両式を比較すると

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{H}\Phi(t)\mathbf{H}^{-1} \quad (2.49)$$

となっていることが分かる.

(2) 解 (2.30) と解 (2.44) の関係

上と同様に解 (2.44) を書き直すと

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}\Phi(t)\mathbf{K} \quad (2.50)$$

を得る. ここに

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \vdots & \mathbf{h}_2 & \vdots & \cdots & \vdots & \mathbf{h}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & & h_{n1} \\ h_{12} & h_{22} & & h_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{1n} & h_{2n} & & h_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-\zeta t} \cos \omega t & e^{-\zeta t} \sin \omega t & & & 0 \\ -e^{-\zeta t} \sin \omega t & e^{-\zeta t} \cos \omega t & & & \\ & & e^{\lambda_3 t} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

である. このことから初期値問題の式 (2.48), 関係式 (2.49) も同様に計算できる.

(3) 座標変換

さて, 以上の結果を別の見方で考えてみよう. 今

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}\mathbf{y}(t) \quad (2.51)$$

によって \mathbf{x} を \mathbf{y} に座標変換し, \mathbf{y} 座標での同次方程式を考えてみる.

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{H} \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{y}(t)$$

したがって, 同次方程式

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{y}(t) \quad (2.52)$$

を得る. ところで

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{h}_1 & \vdots & \mathbf{A}\mathbf{h}_2 & \vdots & \cdots & \vdots & \mathbf{A}\mathbf{h}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{h}_1 & \vdots & \lambda_2 \mathbf{h}_2 & \vdots & \cdots & \vdots & \lambda_n \mathbf{h}_n \end{bmatrix}$$

これを書き直して

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

すなわち

$$\mathbf{A}\mathbf{H} = \mathbf{H}\mathbf{\Lambda}, \text{ where } \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] \quad (2.53)$$

を得る。したがって

$$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H} = \mathbf{\Lambda} \quad (2.54)$$

また1組の複素根の場合は同様にして、 $\mathbf{\Lambda}$ が

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -\zeta & \omega & & 0 \\ -\omega & -\zeta & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となる。このことから同次方程式 (2.52) は

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{y} \quad (2.55)$$

となる。式 (2.55) は $\mathbf{\Lambda}$ が簡単な形となっているので直ちに解を求めることができる。すなわち

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{K} \quad (2.56)$$

ここに、 \mathbf{K} は任意実定数ベクトルである。式 (2.56) を式 (2.51) に代入して、式 (2.47) と式 (2.50) を比較してみると、これらの変換の様子がはっきりするであろう。

2.2.3 同次方程式の解の安定性

$t=0$ で初期値 \mathbf{x}_0 を持つ解 (2.30) について、時間が十分経過した後の解の性質を考えておこう。つまり、 $t \rightarrow \infty$ での解の挙動を考える。この問題は**安定性の問題** (stability problem) と呼ばれている。図 2.1 を参考にすれば次の定義は容易に理解できる。

今、任意の初期値 \mathbf{x}_0 を持つ解 (2.30)、すなわち状態 $\mathbf{x}(t)$ を考える。このとき、

1. $\mathbf{x}(t)$ の各成分 $x_k(t)$ について

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_k(t)| < +\infty, \text{ i.e., finite for } k = 1, 2, \dots, n$$

となるとき, 解 (2.30) は**安定** (stable) であるという.

2. $\mathbf{x}(t)$ が安定でないとき, **不安定** (unstable) という. すなわち, $\mathbf{x}(t)$ の成分のうち 1 つでも

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_k(t)| = +\infty \text{ for some } k$$

となるとき, $\mathbf{x}(t)$ は不安定であるという.

3. 安定な場合の条件を更に強くし, $\mathbf{x}(t)$ の各成分 $x_k(t)$ について

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_k(t)| = 0 \text{ for } k = 1, 2, \dots, n$$

が成り立つとき, $\mathbf{x}(t)$ は**漸近安定** (asymptotically stable) であるという.

解の安定性は, 同次方程式 (2.29) の基本解によって決まる. このことは \mathbf{A} の固有値に換言できる. すなわち, \mathbf{A} の固有値の実部の符号による. したがって, 解の安定性と方程式 (2.29) の安定性を同一視できることになる.

このことから, 同次方程式 (2.29) は,

$$\Re[\lambda(\mathbf{A})] \leq 0$$

のとき, 安定である. ここに, $\Re[\lambda(\mathbf{A})]$ は行列のすべての固有値の実部を表す. また,

$$\Re[\lambda(\mathbf{A})] < 0$$

のとき, 漸近安定である.

時不変 RLC 回路から導かれた状態方程式は, 一般に漸近 (又は安定) となることが知られている.

【例題 2.7】

例題 2.5 の方程式の安定性を調べよ. ただし a, b, ζ, ω はすべて正の実数とする.

【解】 (1), (3), (4) は漸近安定, (2) は安定である.

2.2.4 定常解と過渡解

非同次方程式 (2.27) の一般解は, 重ね合わせの理によって

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_p(t) \quad (2.57)$$

と書くことができる. ここで \mathbf{x}_0 は任意の定ベクトルと考えておく. 今式 (2.27) の特殊解 $\mathbf{x}_p(t)$ として, 式 (2.57) の第 1 項 (すなわち同次方程式の一般解) の関数を含まない解を選ぶことにしよう. これを入力 $\mathbf{b}(t)$ に関する**定常解** (steady state solution) と呼ぶ

ことにする。この名称は、式 (2.57) から次のように説明できる。今同次方程式が漸近安定であったと仮定しよう。すると十分時間が経過した後の状態 $\mathbf{x}(t)$ は

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{0} \text{ for } t \rightarrow \infty \quad (2.58)$$

であるから

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_p(t) \text{ for } t \rightarrow \infty \quad (2.59)$$

つまり定常解のみ残ることとなる。

他方、同次方程式の一般解は、式 (2.58) の性質を持っている。これは、いずれ時間がたてば、なくなってしまう ($\mathbf{0}$ となってしまう) 解である。この意味で同次方程式の解を過渡解 (transient state solution) という。以上のことから、非同次方程式の一般解 (2.57) は、過渡解と定常解の重ね合わせとみることができる。

【例題 2.8】

$\mathbf{b}(t)$ が次の式で与えられる、式 (2.27) の定常解を求めよ。

$$(1) \mathbf{b}(t) = \mathbf{E} \text{ (constant)}, (2) \mathbf{E} \sin \omega t$$

【解】 例題 2.4 を参考にして考えよう。

(1) $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{H}$ (一定ベクトル) とおき、式 (2.27) に代入すると

$$\mathbf{A}\mathbf{H} + \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

となる。今 \mathbf{A} は正則行列と仮定すると

$$\mathbf{H} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E} \quad (2.60)$$

を得る。

(2) \mathbf{E} を実ベクトルと仮定して、 $\mathbf{E} \sin \omega t = \Im(\mathbf{E}e^{j\omega t})$ であることから、 $\mathbf{E}e^{j\omega t}$ の解を求めよう。 $\mathbf{z}_p(t) = \mathbf{H}e^{j\omega t}$ と仮定し、式 (2.28) に代入の後、整理すると

$$(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{H} = \mathbf{E}$$

$\det(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq 0$ を仮定し、

$$\mathbf{H} = (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{H}_R + j\mathbf{H}_I$$

を得る。そこで定常解 $\mathbf{x}_p(t)$ は

$$\mathbf{x}_p(t) = \Im(\mathbf{z}_p(t)) = \Im(\mathbf{H}e^{j\omega t}) = \mathbf{H}_I \cos \omega t + \mathbf{H}_R \sin \omega t \quad (2.61)$$

となる。なおこの定常解の表現は、具体的な問題に従って、極座標表示するなど分かりやすく工夫する必要がある。

2.3 高階スカラー方程式とコンパニオン方程式

n 階のスカラー同次方程式：

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \quad (2.62)$$

は連立ベクトル方程式として表すことができる。この関係を見ておこう。次式で新しい状態変数を導入する。

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \\ x_3(t) &= \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt} \\ &\dots \\ x_n(t) &= \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} = \frac{dx_{n-1}}{dt} \end{aligned} \quad (2.63)$$

すると、式 (2.62) は次式に書き直せる。

$$\frac{dx_n}{dt} = -a_1 x_n(t) - a_2 x_{n-1}(t) - \cdots - a_{n-1} x_2(t) - a_n x_1(t) \quad (2.64)$$

式 (2.63) と (2.64) を合わせて次式を得る。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_n & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

この形の方程式を式 (2.62) のコンパニオン方程式という。特に、行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_n & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

をコンパニオン行列 (companion matrix) という。このことから高階スカラー方程式は、ベクトル方程式と等価であることが分かる。

なお、式 (2.62) の一般解は

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (2.67)$$

とにおいて、式 (2.62) に代入し、特性方程式を求めると次式を得る。

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (2.68)$$

いま、簡単のため式 (2.68) の根がすべて相異なる場合を考えよう。

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0 \quad (2.69)$$

このとき、式 (2.62) の一般解は次式となる。

$$x(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + K_n e^{\lambda_n t} \quad (2.70)$$

【例題 2.9】

次の同次方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^3 x}{dt^3} + 6 \frac{d^2 x}{dt^2} + 11 \frac{dx}{dt} + 6x = 0 \quad (2.71)$$

【解】 特性方程式は次式となる。

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

したがって、次の一般解を得る。

$$x(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} + K_3 e^{-3t}$$

演習問題

1. ある意味で問題はどこにでもころがっている。自分で興味ありそうな問題を探して解いてみよう。例えば、回路 1 の教科書を持ってきて、たまたま開いたページに載っている回路について、回路方程式をたて、その一般解を求めてみよう。また、初期値を設定し、この初期値を満たす解を計算してみよう。
2. 回路 3 の教科書 [7] の第 1 章の演習問題 1.1 の回路の回路方程式を全部解いてみよう。電源は簡単のため、直流電源とせよ。この問題にある 7 つの回路を解くに際して次の事項を計測せよ。
 - 方程式を立てるのにかった時間
 - 方程式を解くのにかった時間
 - 間違いを起こした事項
 - 計算に手まっどった事項
 - 正解を見なければ自信の持てない事項これらの計測から自分の弱点を抜き出して、機会があればチュータの先輩に「強化策」を相談してみよう。それでも分からない場合は、先生に相談してみよう。
3. 書店で「Basic 数学」や「数学セミナー」などの雑誌や君の好きな雑誌に微分方程式のネタになりそうな記事が載っていないかどうか立ち読みしてみよう。気に入った記事が見つかった場合には、それについて考えてみよう。このような場合はできるだけ回路以外の分野での応用記事の方が望ましい。
4. 回路 3 の教科書 [7] の第 1 章の演習問題 1.3 の回路について、次の事項に答えよ。
 - 教科書 [7] の第 2 章の例題 2.8 を参考にして、この回路の固有値（特性根）は負の実数となることを示せ。
 - この回路の固有ベクトルは互いに直交することを示せ。
 - 教科書にあるキャパシタと抵抗のみからなる回路を探して、同様の考察を行え。この問題から学んでおきたい事柄として、対称行列の固有値と固有ベクトルについての性質があげられる。このことについて手持ちの線形代数の教科書で調べておくとよい。

第 3 章

線形時不変集中定数回路

有限個の回路素子を接続して構成された回路のことを集中定数回路という。各回路素子の特性が線形である場合、線形集中定数回路という。更に、素子特性を記述する比例関係式の係数が実定数の場合、この素子を時不変素子という。したがって時不変素子から構成された回路が線形時不変集中定数回路である。

線形時不変集中定数回路の回路方程式は定係数線形常微分方程式で記述される。逆に定係数線形常微分方程式で記述されるシステムは線形時不変システムと呼ばれ、電気工学、システム工学、制御工学などで広く研究されている。単に「線形システム」「線形回路」といえば、それは「線形時不変集中定数システム」や「線形時不変集中定数回路」をさすと考えてもよいほどである。

さて、本章では線形時不変集中定数回路のごく一般的な性質を述べる。具体的な回路例については次章で考える。一般的な考察は、理論の全体像を把握する上で大切なことである。細部が見えなくて少々不安な点もあるであろうが、トップダウン的な思考方法にも慣れる必要があるであろう。

この章では、回路の素子特性や Kirchhoff の法則などを細々と説明しない。これらは、教科書 [7] の第 1 章を参照してほしい。

3.1 回路の状態

線形時不変集中定数回路の回路方程式は次の定係数線形常微分方程式で記述される。

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.1)$$

ここに

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^m$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2m} \\ \cdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

を表す。\$\mathbf{x}\$ は回路の状態 (state) を表す \$n\$ 次元ベクトルである。また、状態 \$\mathbf{x}\$ 達によってできる集合は \$n\$ 次元ユークリッド空間 \$\mathbf{R}^n\$ であり、これを状態空間という。\$\mathbf{u}(t)\$ は回路に加えられた電源を表す時間の関数ベクトルであり、電源の個数が \$m\$ 個の場合 \$\mathbf{R}^m\$ に値を持つ。行列 \$\mathbf{A}\$ と \$\mathbf{B}\$ が実定数行列であることが時不変回路と呼ばれている理由となっている。

状態方程式 (3.1) に対する補足説明

1. 状態 \$\mathbf{x}\$ の各成分 \$x_i\$ (\$i = 1, \dots, n\$) は、回路に含まれる各キャパシタの電圧と、各インダクタを流れる電流である。このことは、キャパシタ特性 \$q = Cv\$ とインダクタの特性 \$\phi = Li\$ から、キャパシタに蓄えられる電荷とインダクタに鎖交する磁束を状態と考えてもよいことを意味している。
2. 状態空間の次元 \$n\$ は、回路に含まれるキャパシタの個数 \$n_C\$ とインダクタの個数 \$n_L\$ の和となっている：

$$n = n_C + n_L$$

ただし、回路に次の拘束条件がある場合には、\$n\$ からこれらの条件式の個数を引いた次元の部分空間内で状態が進展する。すなわち、

(a) 回路に保存則がある場合

- i. 電荷保存則：キャパシタのみ（あるいはキャパシタと電流源のみ）からなるカットセットがある場合。これらのカットセットの個数を \$n_{CC}\$ とする。
- ii. 磁束保存則：インダクタのみ（あるいはインダクタと電圧源のみ）からなるループがある場合。これらのループの個数を \$n_{LL}\$ とする。

(b) 回路に強制退化がある場合

- i. キャパシタ電圧の線形拘束：キャパシタのみ（あるいはキャパシタと電圧源のみ）からなるループがある場合。これらのループの個数を \$n_{CL}\$ とする。
- ii. インダクタ電流の線形拘束：インダクタのみ（あるいはインダクタと電流源のみ）からなるカットセットがある場合。これらのカットセットの個数を \$n_{LC}\$ とする。

これらの拘束条件があると状態は \$n - (n_{CC} + n_{LL} + n_{CL} + n_{LC})\$ 次元の部分空間に閉じこめられることとなる。したがって状態方程式 (3.1) の次元は \$n - (n_{CC} + n_{LL} + n_{CL} + n_{LC})\$ 次元となる。

3. 具体的に回路方程式を導出する手順は、混合解析法として、1960年代から1970年初頭にかけて主として日本の回路網研究者達によって研究され、1970年半ばに理論が完成した。詳しくは渡辺 [5] や Rohrer [6] を参照のこと。教科書 [7] 第1章 1.1.2(4) にも簡単な説明がある。

3.2 回路の応答

初期条件 (t_0, \mathbf{x}_0) が与えられると、回路の状態は式 (3.1) にしたがって進展する。式 (2.28) より

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

となる。この方程式の右辺第1項は、回路から入力電源を取り去った回路の応答であり、同次方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.3)$$

の一般解が対応している。これを零入力応答 (zero input response) という。他方、第2項は電源に起因する応答であり、こちらは零状態応答 (zero state response) と呼ばれている。

さて、電源として最もなじみのある電源は直流電源と交流電源である。これらは、それぞれ

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{E}_0 \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{E} \cos(\omega t) \text{ or } \mathbf{E} \sin(\omega t) \quad (3.5)$$

で与えられる。次にこの2つの場合についてその応答をみておこう。

3.2.1 直流回路

直流回路の回路方程式は

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (3.6)$$

となる。ここに、 $\mathbf{B}\mathbf{E}_0 = \mathbf{b}$ とおいた。この回路の定常状態は

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

の解として

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (3.8)$$

で与えられる。方程式 (3.7) は、回路からキャパシタを開放除去、インダクタを短絡除去し、抵抗と電源を残した回路の回路方程式となっている。したがって、直流電源を印加した回路の定常状態のみを考えるのであれば、回路素子は抵抗と電源のみの回路を考えれば十分である。定常状態 (3.8) は、回路方程式 (3.6) の平衡点 (equilibrium point) とも呼ば

れている。なお、電源のない回路の回路方程式に対応する同次方程式 (3.3) の平衡点は原点である。

方程式 (3.3) や (3.6) の右辺は時間に関係した関数が含まれていない。すなわち、全く時間的に不変な状態の速度ベクトル場を定義している。微分方程式を定義する右辺の関数に時刻が含まれていない方程式を**自律方程式** (autonomous equation) または**自律系** (autonomous system) という。自律系の解析には平衡点の概念が有効となる。平衡点は自律系の特殊解となっている。

勿論、式 (3.6) の一般解は、同次方程式 (3.3) の一般解と平衡点を重ね合わせた次式となる。

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{h} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (3.9)$$

ここに、 \mathbf{h} は任意定数ベクトルであり、初期条件によって定まる。式 (3.9) の第 1 項は、**過渡状態** (transient state) に対応するので**過渡項**、第 2 項の特殊解は**定常状態** (steady state) に対応するので**定常項**という。

3.2.2 交流回路

交流回路の回路方程式は、たとえば式 (3.5) より

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \cos(\omega t) \quad (3.10)$$

のようになる。ここでも、 $\mathbf{BE} = \mathbf{b}$ とおいた。

この回路の定常状態は、**交流理論の手法** (記号法) で次のように求められる。式 (3.10) を考える代わりに、電源を複素指数関数で置き換えた次式の定常状態を考える。

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}e^{j\omega t} \quad (3.11)$$

この方程式は定常状態として、次の複素指数関数を解として持っている。

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Z}e^{j\omega t} \quad (3.12)$$

これを式 (3.11) に代入すると、複素振幅 \mathbf{Z} について次式を得る。

$$\{j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}\}\mathbf{Z} = \mathbf{b} \quad (3.13)$$

したがって \mathbf{Z} は

$$\mathbf{Z} = \{j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}\}^{-1}\mathbf{b} \quad (3.14)$$

と求められる*1。これより式 (3.12) は次式となる。

$$\mathbf{z}(t) = \{j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}\}^{-1}\mathbf{b}e^{j\omega t} \quad (3.15)$$

*1 複素振幅 \mathbf{Z} を計算するための方程式 (3.13) には時刻 t が含まれていないことに注意しよう。この式は微分方程式 (3.11) の左辺の微分を単に $j\omega$ で置き換えて、時刻に関係した指数関数 $e^{j\omega t}$ を消去した式となっている。これは直流電源の場合の平衡点を求める式 (3.7) と類似な関係式である。このことから「交流定常状態の計算は複素直流回路の計算に還元できる」と言うことができる。

したがって、定常状態に対応する式 (3.10) の特殊解 $\mathbf{x}_p(t)$ はこの実部として求められる：

$$\mathbf{x}_p(t) = \Re \left[\{j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}\}^{-1} \mathbf{b} e^{j\omega t} \right] \quad (3.16)$$

交流回路の応答に関しても状態は、過渡状態と定常状態の重ね合わせによって表される。すなわち、式 (3.10) の一般解は次式で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{h} + \mathbf{x}_p(t) \\ &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{h} + \Re \left[\{j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}\}^{-1} \mathbf{b} e^{j\omega t} \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

ここに、 \mathbf{h} は任意定数ベクトルであり、初期条件によって定まる。

交流電源が歪み波として *Fourier* 級数によって

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_k \cos(k\omega t) \quad (3.18)$$

で与えられている場合についても重ね合わせの理を適用して同様な扱いができる。すなわち、方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{b}_k \cos(k\omega t) \quad (3.19)$$

の定常解は、次式となる。

$$\mathbf{x}_p(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left[\{jk\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}\}^{-1} \mathbf{b}_k e^{jk\omega t} \right] \quad (3.20)$$

以上のことから、線形時不変集中定数回路の過渡状態には、同次方程式 (3.3) の一般解が、また定常状態には連立方程式 (3.7) や (3.13) の解が対応していることが分かる。したがって、複素係数の連立方程式を解く手法や、同次微分方程式の一般解を求める手法を十分マスターしておくことが大切である。

3.2.3 定常状態の重ね合わせに関する注意事項

【例題 3.1】

図 3.1 の回路を考える。図中の電圧源が次の場合に対する定常解を求めよ。

- $e(t) = E_0 + E_1 \cos \omega_1 t$
- $e(t) = E_1 \cos \omega_1 t + E_2 \cos \omega_2 t$

【解】 図 3.1 の回路の回路方程式は次式となる。

$$RC \frac{dv}{dt} + v = e(t) \quad (3.21)$$

(a) の場合、まず、直流に対する定常状態は $v(t) = E_0$ である。次に、交流については

$$(j\omega_1 RC + 1)V = E_1 \Rightarrow V = \frac{E_1}{1 + j\omega_1 RC}$$

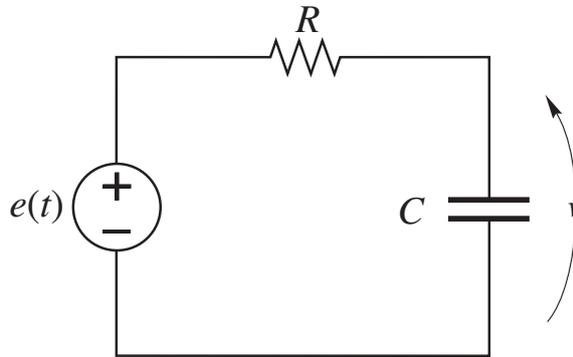


図 3.1 RC 回路.

より

$$v(t) = \frac{E_1}{\sqrt{1 + \omega_1^2 RC}} \cos(\omega_1 t - \phi), \quad \phi = \tan^{-1} \omega_1 RC$$

したがって、これらを重ね合わせて、次の定常解を得る.

$$v(t) = E_0 + \frac{E_1}{\sqrt{1 + \omega_1^2 RC}} \cos(\omega_1 t - \phi), \quad \phi = \tan^{-1} \omega_1 RC \quad (3.22)$$

(b) の場合. (a) の場合より、各周波数に対する定常解を求めて重ね合わせるとよい. 結果は次式となる.

$$v(t) = \frac{E_1}{\sqrt{1 + \omega_1^2 RC}} \cos(\omega_1 t - \phi_1) + \frac{E_2}{\sqrt{1 + \omega_2^2 RC}} \cos(\omega_2 t - \phi_2) \quad (3.23)$$

ただし,

$$\phi_1 = \tan^{-1} \omega_1 RC, \quad \phi_2 = \tan^{-1} \omega_2 RC$$

とおいた.

周波数が異なれば当然インピーダンスも異なる. このことに気付かず間違いをする学生が後を絶たない. 特に、就職試験や面接試験にこの手の問題が出題されやすい. 注意が必要である.

東京で使っていた扇風機を大阪に転勤してきて使った場合どうなるか. また、電気カミソリ器はこのような周波数の違いで生じるトラブルを防ぐため、どのような工夫がなされているか.

第4章

2次元線形力学系

前章において、状態方程式の一般解は、定常解と過渡解の重ね合わせとなることをみた。またこの過渡解には、同次方程式の一般解が対応することも分かった。すなわち、系の零入力応答は同次方程式の一般解が対応し、過渡解あるいは系の自由応答などと呼ばれている。

そこでこの節では、同次方程式の一般解の性質をもう少し詳しくみておこう。話しを具体的にするため状態 $\mathbf{x}(t)$ を2次元ベクトルの場合に限定して説明する。一般に、 n 次元の場合は、特殊な例外の場合を除いて、2次元と1次元の組み合わせとして考えることができることから、この2次元の場合を理解しておくことが大切となる。

4.1 2次元同次方程式と自律系の性質

2次元同次方程式を

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned}\tag{4.1}$$

とする。ベクトルの記号を使うと

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}\tag{4.2}$$

と書ける。ここに、ベクトル \mathbf{x} と行列 \mathbf{A} は、

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\tag{4.3}$$

を表す。

さて方程式 (4.2) を粒子の運動方程式と考えて、解すなわち状態 $\mathbf{x}(t)$ の変化の様子をみることにしよう。これは同次方程式の解を**運動学** (Kinematics) の立場からみる考え方である。もちろん、このような見方は、同次方程式に限らずもっと一般の方程式について成り立つ。

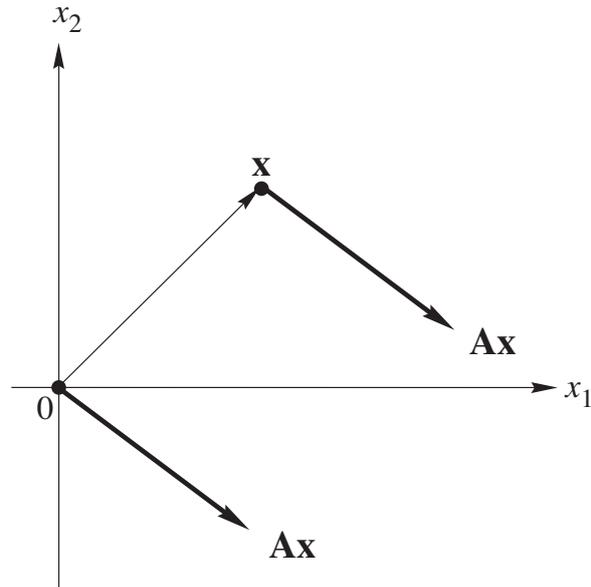


図 4.1 点 \mathbf{x} での状態の速度ベクトル \mathbf{Ax} .

状態ベクトル \mathbf{x} 全体の集合を**状態空間** (state space) または**相空間** (phase space) という。式 (4.2) の場合、状態空間は 2 次元ユークリッド空間、すなわち通常の平面となる。これを \mathbf{R}^2 と書く。

今、状態空間が状態という粒子で埋まっていて、各粒子の運動の速度が式 (4.2) で定義されていると考えよう。図 4.1 参照。すると式 (4.2) は、状態空間の各点で状態の**速度ベクトル**の場 (velocity vector field) を定めているとみることができる。図 4.2 参照。式 (4.2) のように、ベクトル場 \mathbf{Ax} に時刻があらわに含まれていない場合、このベクトル場 (または方程式) を**自律系** (autonomous system) というのであった。

自律系の 1 つの特徴は、時間軸の平行移動に対して、方程式の形が変わらないことである。このため初期条件が (t_0, \mathbf{x}_0) で与えられる初期値問題は、一般性を失うことなく、初期条件 $(0, \mathbf{x}_0)$ の問題として扱うことができる。

実際、初期条件 (t_0, \mathbf{x}_0) を満たす式 (4.2) の解を

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, \mathbf{x}_0) \quad (4.4)$$

としてみよう。すなわち、式 (4.4) は $t = t_0$ で

$$\mathbf{x}(t_0) = \varphi(t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$$

を満たす解とする。このとき

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t + t_0) = \varphi(t + t_0, \mathbf{x}_0)$$

を考えると、 $\mathbf{y}(t)$ も式 (4.2) の解となる。なぜなら

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{x}(t + t_0)}{dt} = \frac{d\mathbf{x}(t + t_0)}{d(t + t_0)} = \mathbf{Ax}(t + t_0) = \mathbf{Ay}(t)$$

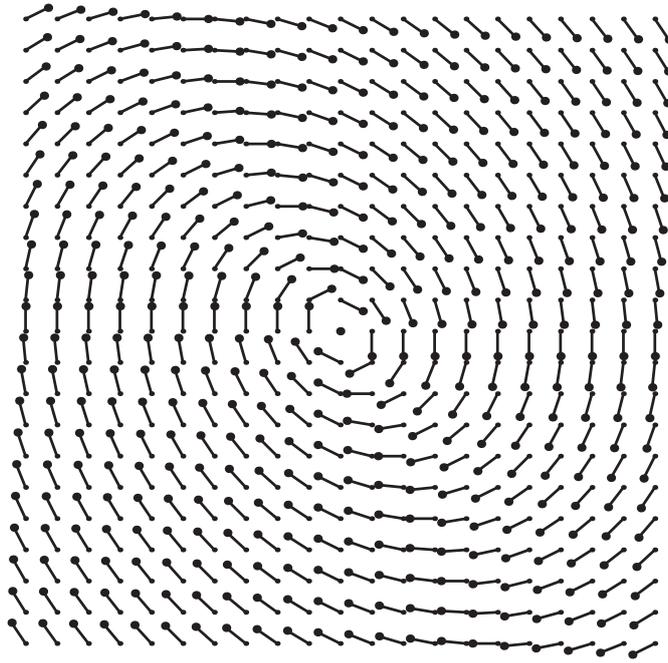


図 4.2 平面全体で定義された速度ベクトル場の例.

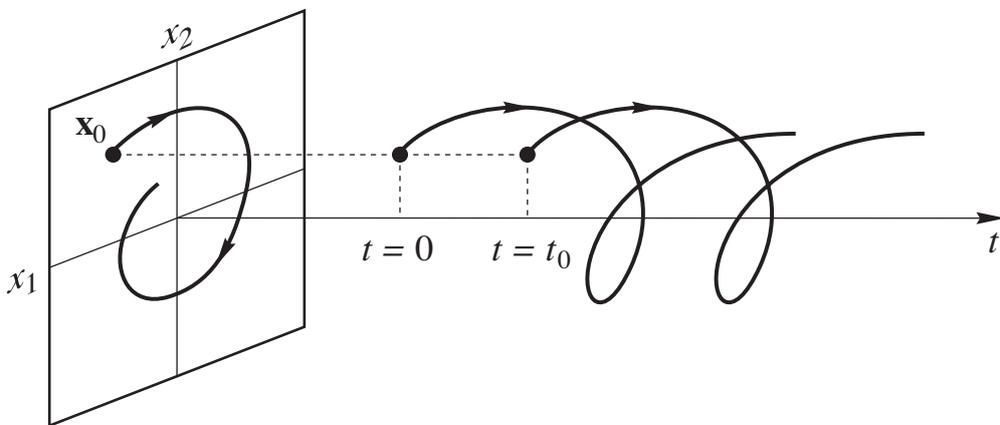


図 4.3 自律系の解の性質. 時間軸の平行移動に対する不変性.

だからである. ところで $\mathbf{y}(t)$ は初期条件 $(0, \mathbf{x}_0)$ を満たす解となっている. このことから $\mathbf{y}(t)$ は $\mathbf{x}(t)$ を時間軸で t_0 だけ進ませた解となっていることも分かる. 図 4.3 参照.

自律系の第 2 の特徴は, 状態空間の中に解の動きを曲線で描くことによって, 状態の挙動を幾何学的にみることができることである. 方程式 (4.2) の解は, 状態の運動, すなわち速度ベクトル場に沿う粒子の流れ (flow) と考えてよい. 実際, 解 (4.4) $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t)]'$ を時刻 t における状態平面上の点と考えてみよう. この点は, 各瞬間に状態速度ベクトルに接しながら, 時間の経過とともに運動し, 平面内に軌道を描く.

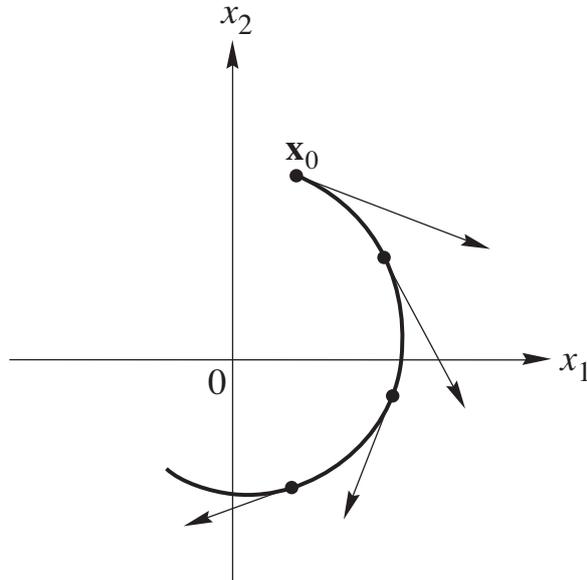


図 4.4 解軌道と状態速度ベクトルの関係. 速度ベクトルはいつも軌道に接している.

図 4.4 参照.

初期値 \mathbf{x}_0 の異なる 2 つの軌道は, 互いに交わらないか, あるいは一致するか of いずれかとなるであろう. そこで初期値をいろいろ変えて平面内に軌道を描くと, 点の運動全体を定性的につかむことができる. これらの軌道には時刻の進展に沿った向きに矢印を付けておくと分かりやすい. 状態平面に, このような矢印のある軌道群を描き込んだ図を**状態平面図** (phase plane diagram) という. なお, 状態空間が 2 次元の場合は, 過去の歴史的な習慣から状態平面図と呼ばずに**相平面図** (phase portrait) と呼ぶ場合も多いので注意してほしい. 図 4.5 参照.

4.2 平衡点 (equilibrium point)

状態の速度が零となる点を**平衡点** (equilibrium point) という. すなわち, 平衡点は

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

を満足する. したがって, 式 (4.2) の場合は, 等価的に

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

を満たす点が平衡点となる. このことから

1. $\det \mathbf{A} \neq 0$ ならば, 原点のみ,
2. $\det \mathbf{A} = 0, \text{rank} \mathbf{A} = 1$ ならば, ある直線があって, この直線上のすべての点,
3. $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ならば, 平面上のすべての点,

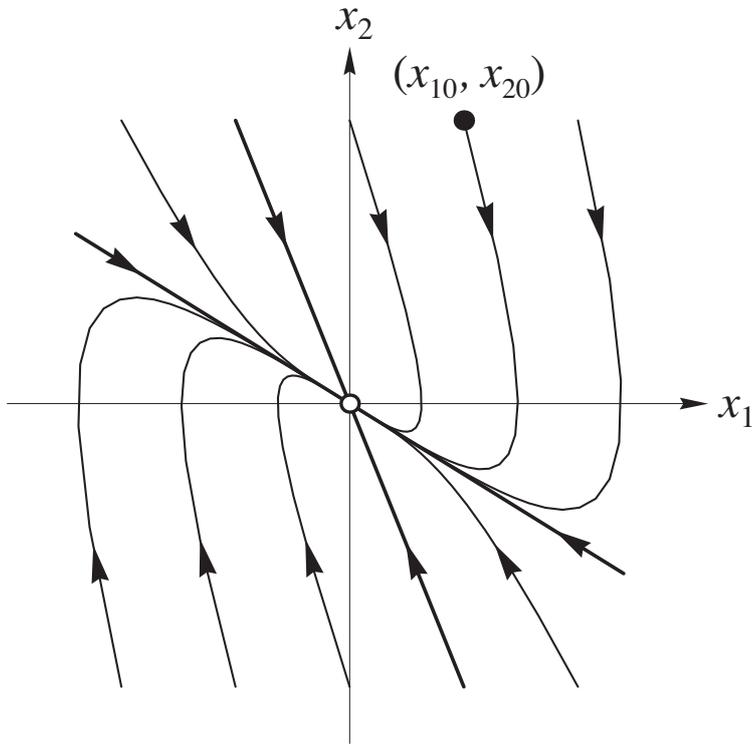


図 4.5 相平面図の例.

が式 (4.2) の平衡点となる. 2., 3. は退化した平衡点と呼ばれている.

なお, 非同次方程式でも自律系となっている場合は, 同様にして式 (4.5) で平衡点を定義できる. すなわち, \mathbf{b} を定ベクトルとして

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b} \quad (4.7)$$

を考えると, 平衡点は

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

を満たす点となる.

【例題 4.1】

教科書の 2.2.1(1) で取り上げた電荷保存則の成り立つ図 4.6(a) の回路を考えよう. この回路の平衡点を求めよ.

【解】 回路方程式は教科書の式 (2.92), すなわち次式 (4.9) となる.

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{C_1 R} (-v_1 - v_2 + E) \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{C_2 R} (-v_1 - v_2 + E) \end{aligned} \quad (4.9)$$

したがって, 平衡点は $dv_1/dt = 0, dv_2/dt = 0$ を満たす点である. すなわち, 直線

$$v_1 + v_2 = E \quad (4.10)$$

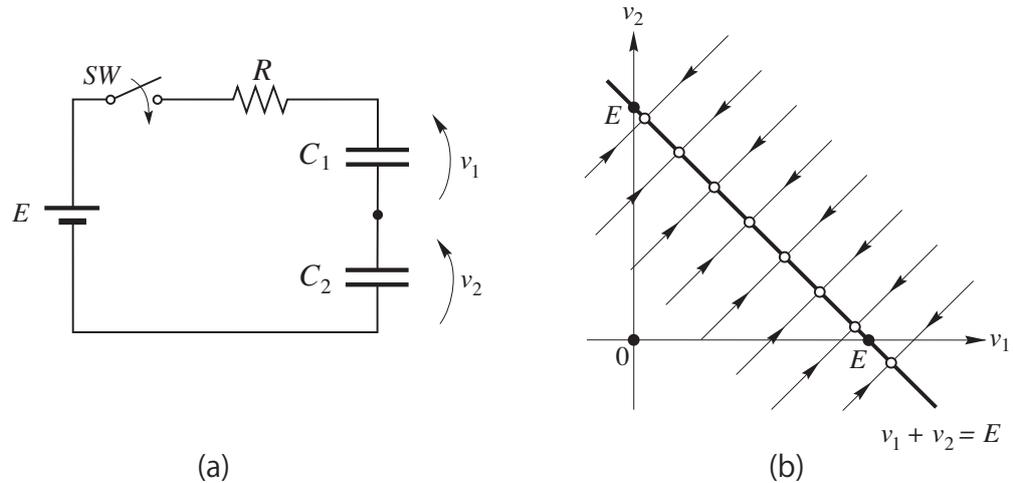


図 4.6 電荷保存則を持つ回路 (a) と退化した平衡点 (b).

上の点はすべて平衡点となる. 図 4.6(b) を参照. この方程式では, 各点で速度ベクトルがすべて $(1, C_1/C_2)$ 方向に向いている (式 (4.2) をみよ). このため, 上記の条件 2. が成り立ち, 退化した平衡点が現われる.

4.3 状態平面図あるいは相平面図

式 (4.2) の状態平面図を考えよう. 特性方程式

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \quad (4.11)$$

の特性根を λ_1, λ_2 とする.

(1) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (過減衰) の場合:

λ_1, λ_2 に対する固有ベクトルを, それぞれ $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ とする. 式 (4.2) の一般解は

$$\mathbf{x}(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{h}_1 + K_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{h}_2 \quad (4.12)$$

となる. ここに K_1, K_2 は任意の積分定数である. 相平面図を得るには, 初期値を種々に与えて, K_1, K_2 を決め, 式 (4.12) を平面に描けばよい. 各軌道の曲線は, 次のようにして知ることができる. 座標変換

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{y} \quad (4.13)$$

によって, 式 (4.2) は

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{y} \quad (4.14)$$

となり, この式の一般解は

$$y_1(t) = K_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = K_2 e^{\lambda_2 t} \quad (4.15)$$

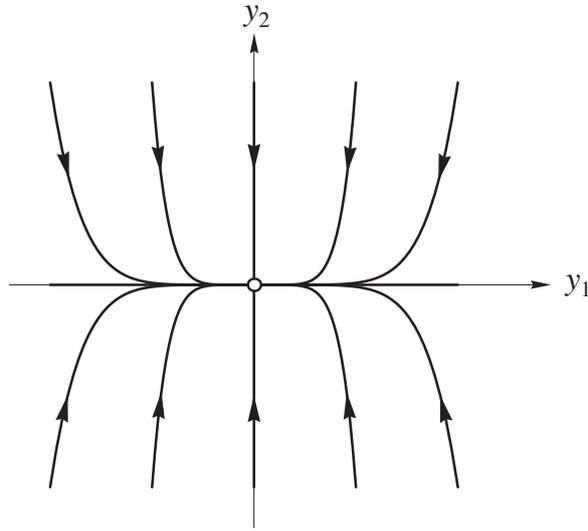


図 4.7 結節点の相平面図 (標準形).

となる. この式から e^t を消去すると,

$$y_2 = K y_1^{\lambda_2/\lambda_1} \quad (4.16)$$

ここに, $K = K_1/K_2$ とおいた. K をいろいろ変えると (y_1, y_2) 平面内に曲線群が得られ, これが軌道を与える. 図 4.7 を参照. これらを式 (4.13) に従って \mathbf{H} で元の状態平面内に写すと, 式 (4.2) の相平面図を得る. 図 4.5 を参照. この場合の平衡点を結節点 (node) という.

(2) $\lambda_2 = \lambda_1 < 0$ (臨界減衰) の場合:

重根 $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$ となる場合, 2×2 行列の標準形としては次の 2 つがある.

$$(a) \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad (b) \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

(a) の場合は, 平面上の任意のベクトルが固有ベクトルとなる. したがって, 相平面図 4.8 (a) を得る. (b) の場合は,

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \mathbf{y} \quad (4.17)$$

の一般解が, 例題 2.5(4) より,

$$y_1(t) = K_1 e^{\lambda t} + K_2 t e^{\lambda t}, \quad y_2(t) = K_2 e^{\lambda t} \quad (4.18)$$

となる. したがって,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = K_1 e^{\lambda t} \mathbf{h}_1 + K_2 (t \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) e^{\lambda t} \quad (4.19)$$

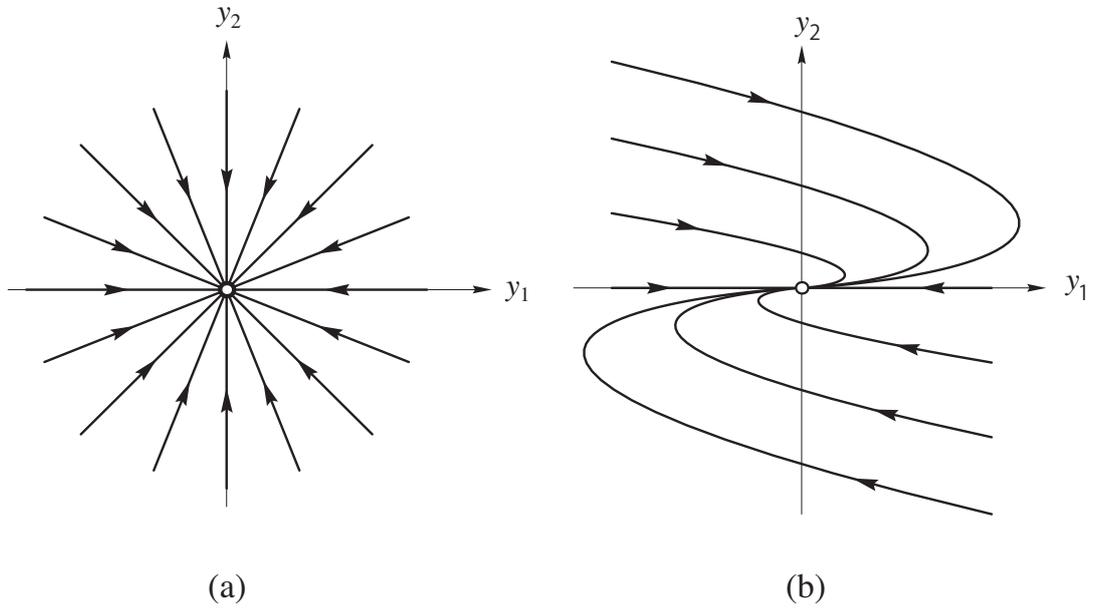


図 4.8 退化した結節点の相平面図 (標準形).

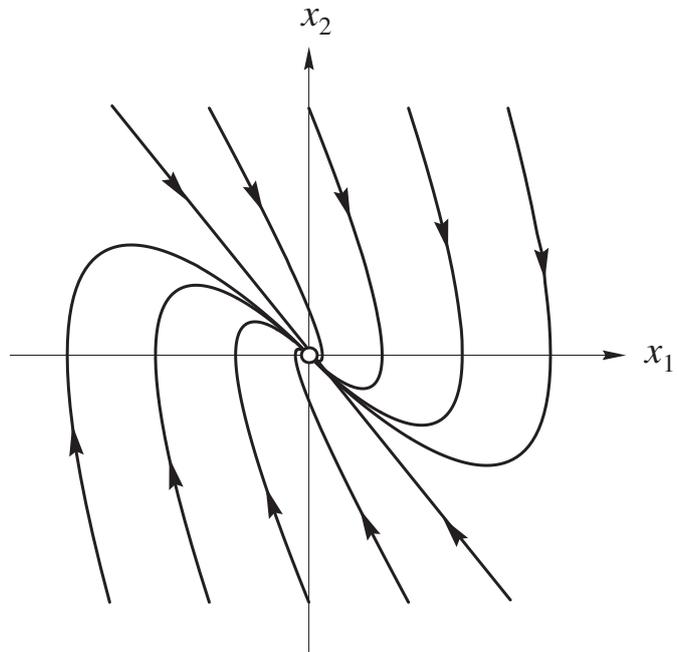


図 4.9 退化した結節点の相平面図. 固有ベクトルが 1 つの場合.

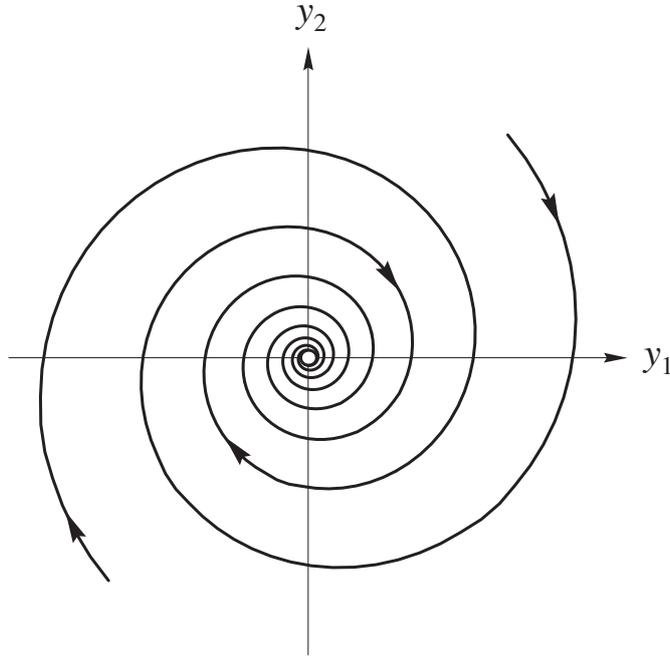


図 4.10 渦状点の相平面図 (標準形).

ここに, $\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{H}\mathbf{\Lambda}$ より, 固有ベクトルは

$$\mathbf{A}\mathbf{h}_1 = \lambda\mathbf{h}_1, \quad \mathbf{A}\mathbf{h}_2 = \lambda\mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1 \quad (4.20)$$

を満足している. 式 (4.18) より, (y_1, y_2) 平面内に曲線群が得られる, 図 4.8 を参照. これらを \mathbf{H} で元の状態平面内に写すと式 (4.2) の相平面図を得る. 図 4.9 を参照. この場合の平衡点を退化した結節点 (degenerate node) という.

(3) $\lambda_1 = -\zeta + j\omega = \bar{\lambda}_2$ (減衰振動) の場合:

この場合, 2×2 行列の標準形は次の形をしている.

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -\zeta & \omega \\ -\omega & -\zeta \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

そこで,

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{y} \quad (4.22)$$

の一般解は, 例題 2.5(3) より,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= K_1 e^{-\zeta t} \cos \omega t + K_2 e^{-\zeta t} \sin \omega t \\ y_2(t) &= -K_1 e^{-\zeta t} \sin \omega t + K_2 e^{-\zeta t} \cos \omega t \end{aligned} \quad (4.23)$$

したがって,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}e^{-\zeta t} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

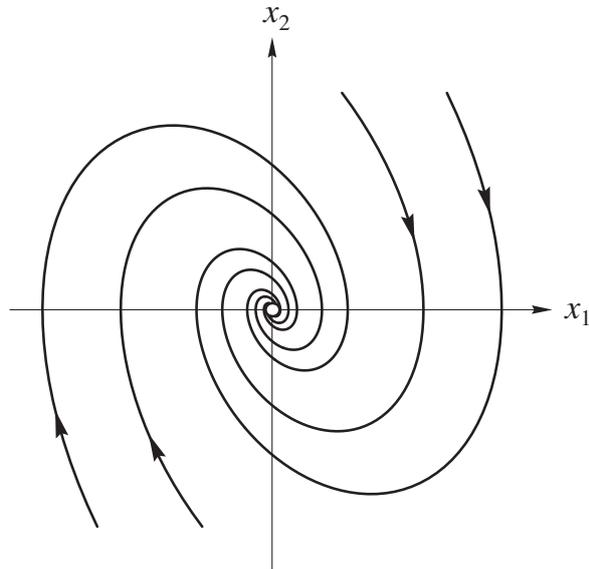


図 4.11 渦状点の相平面図.

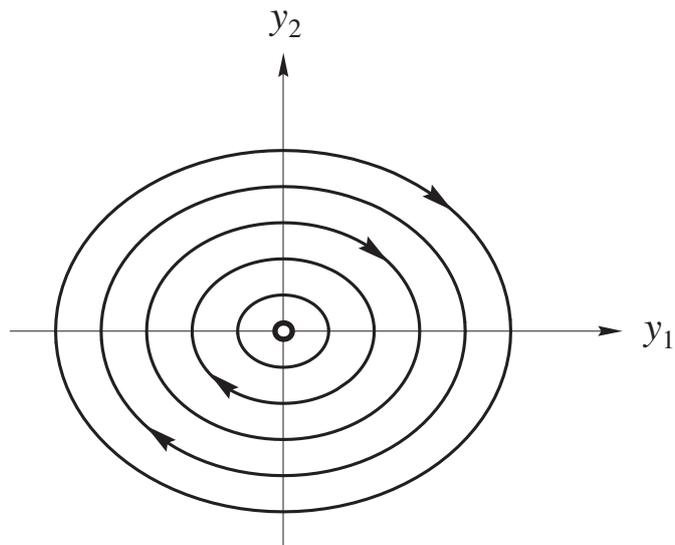


図 4.12 渦心点の相平面図 (標準形).

ここに、 $\mathbf{A}\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}$ より、 $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + j\mathbf{h}_2$ とおいた。 $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ は実ベクトルである。式 (4.24) より、 (y_1, y_2) 平面内に対数螺旋の曲線群が得られる、図 4.10 を参照。これらを \mathbf{H} で元の状態平面内に写すと、式 (4.2) の相平面図を得る。図 4.11 を参照。この場合の平衡点を渦状点 (focus または spiral) という。

特に、 $\zeta = 0$ の場合は、同心楕円状の閉じた軌道が得られる。この場合の平衡点を渦心点 (center) という。図 4.12 を参照。

第 II 部

RLC 直列回路の諸応答

第 5 章

回路の自由振動

この章では、簡単で代表的な回路例である RLC 直列回路の自由振動を解析しよう。教科書 [7] では第 1 章 1.1.2, pp. 26 - 36, 第 2 章 2.1.2, pp. 61 - 68 が部分的にこの問題を取り扱っている。特に、第 2 章 2.1.2(1) での解析が参考になる。

以下で述べるベクトル方程式の解法と教科書のスカラー方程式の解法を比較してみるとよいであろう。

5.1 回路の状態方程式

図 5.1 に示した RLC 直列回路を考える。キャパシタ電圧 $v(t)$ とインダクタを流れる電流 $i(t)$ がこの回路の状態を決定する。したがって、これらを状態変数を選んで回路方程式を求めると、次の 1 階連立微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= i \\ L \frac{di}{dt} &= -v - Ri \end{aligned} \quad (5.1)$$

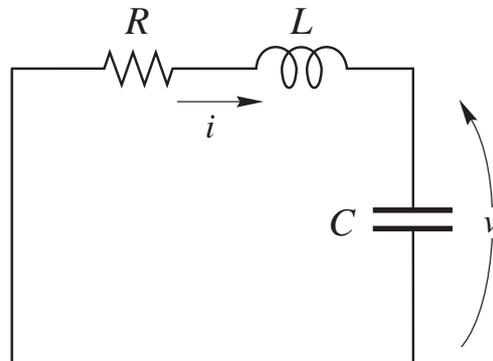


図 5.1 電源のない RLC 直列回路.

これらの方程式から電流 $i(t)$ を消去すると、キャパシタ電圧 $v(t)$ について次の2階スカラー方程式を得る.

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\zeta \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = 0 \quad (5.2)$$

ここに, $\zeta = R/2L, \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ とおいた. 式 (5.1) を標準形に書き直すと次式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{C} i \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{L} v - \frac{R}{L} i \end{aligned} \quad (5.3)$$

ベクトルと行列を用いて簡潔に書くと次式となる.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (5.4)$$

ここに,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

とおいた.

5.2 初期値

$t = 0$ で何らかの方法で次の初期値が与えられたものと仮定しよう.

$$v(0) = v_0, \quad i(0) = i_0 \quad (5.5)$$

以下においては, これらの初期値は任意に与え得るものとする. つまり, 自由に初期状態を与えてこの状態の時間発展を問題とする. この意味では, 式 (5.5) は任意定数を与えているといっても同じである.

静止した状態 $v_0 = 0, i_0 = 0$ から初期値 (5.5) を与える数学的方法としてインパルスを印加する方法がある. 例題 2.6 参照. すなわち,

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} v_0 \\ i_0 \end{bmatrix} \delta(t) \quad (5.6)$$

を加えると初期値 (5.5) を与えたことと等価になる. この意味で初期値 (5.5) を与えて得られる応答をインパルス応答 (impulse response) という.

5.3 特性方程式と特性根

式 (5.3) の特性方程式は次式となる.

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) &= \det[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}] = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\lambda - \frac{R}{L} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = \lambda^2 + 2\zeta\lambda + \omega_0^2 = 0\end{aligned}\quad (5.7)$$

したがって、特性根は

$$\lambda_{1,2} = -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - \omega_0^2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\quad (5.8)$$

である. 以下, これら 2 つの根をそれぞれ相異なる 2 実根の場合

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\zeta + \sqrt{\zeta^2 - \omega_0^2} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ \lambda_2 &= -\zeta - \sqrt{\zeta^2 - \omega_0^2} = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\end{aligned}\quad (5.9)$$

とおこう. また, 重根の場合

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\zeta = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{\sqrt{LC}}\quad (5.10)$$

更に, 複素共役根となる場合は次式とおく.

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\zeta + j\omega_d = -\zeta + j\sqrt{\omega_0^2 - \zeta^2} = -\frac{R}{2L} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \\ \lambda_2 &= -\zeta - j\omega_d = -\zeta - j\sqrt{\omega_0^2 - \zeta^2} = -\frac{R}{2L} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \bar{\lambda}_1\end{aligned}\quad (5.11)$$

ここに, $j = \sqrt{-1}$, $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \zeta^2}$ とおいた.

次に, 特性根の 2, 3 の性質をみておこう. まず, これらの根は複素平面内で虚軸より左の半平面に位置していることはすぐ分かる. さて, ω_0 を一定に保ちながら, ζ を 0 から ∞ まで変化させた場合に根の配置がどう変化するかをみてみよう.

複素根となる場合から考えよう. 根と係数の関係から次式を得る.

$$\lambda_1\lambda_2 = \zeta^2 + \omega_d^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}\quad (5.12)$$

これは複素平面上で原点に中心を持つ半径 ω_0 の円を表している. 図 5.2 参照.

次に, $\zeta = \omega_0$ となると重根となり, 根は実軸上にくる. ζ を更に大きくすると, 2 根は実軸上を原点と負の無限大に向かって移動する. 従って, これらの配置によって根の性質を分類すると次のようになる.

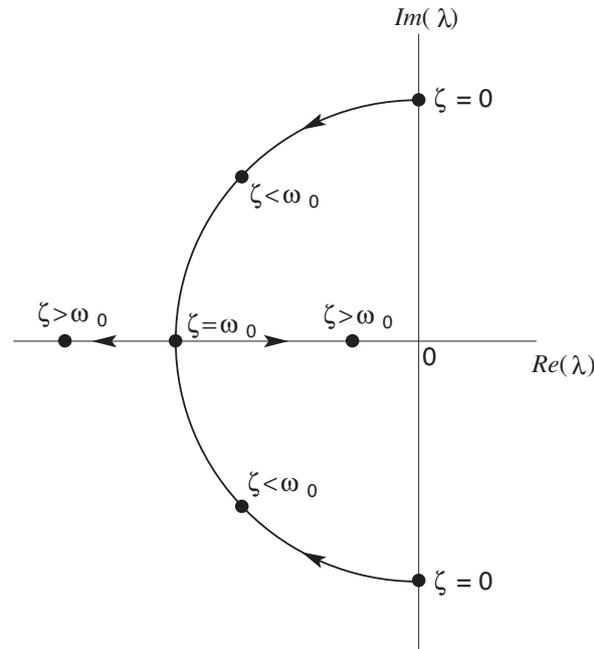


図 5.2 式 (4.4.6) の根の軌跡.

1. $\zeta > \omega_0$ ならば特性根は相異なる負の 2 実根
2. $\zeta = \omega_0$ ならば特性根は重根 (実根)
3. $\zeta < \omega_0$ ならば特性根は共役複素根
4. $\zeta = 0$ ならば特性根は純虚数

式 (5.2) に注目してみると, $\gamma = 2\zeta$ は速度 $\frac{dv}{dt}$ の係数である. この係数は抵抗や機械系では摩擦に関係した係数となっている. これを減衰定数 (damping coefficient) という. 減衰の程度を表す量として通信工学では次の量を定義している.

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{\omega_0}{2\zeta} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{Z_0}{R} \quad (5.13)$$

ここに, $Z_0 = \sqrt{L/C}$ とおいた. 量 Q は回路の良さ (quality factor) あるいは Q 値と呼ばれている. また, Z_0 は特性インピーダンスと呼ばれ, 抵抗の次元を持っている. Q 値を用いて特性根を分類すると, 次のようになる.

1. $Q < \frac{1}{2}$ ならば特性根は相異なる負の 2 実根
2. $Q = \frac{1}{2}$ ならば特性根は重根 (実根)
3. $Q > \frac{1}{2}$ ならば特性根は共役複素根
4. $Q = \infty$ ならば特性根は純虚数

最後に, 特性根の性質によって式 (5.3) の一般解の性質が違ってくる. このことから, RLC 回路はそれぞれの場合次の呼び名で呼ばれている.

1. 特性根が相異なる負の 2 実根の場合：過減衰回路
2. 特性根が重根の場合：臨界振動回路
3. 特性根が共役複素根の場合：減衰振動回路
4. 特性根が純虚数の場合：Lossless 回路, すなわち LC 回路

5.4 固有ベクトル

特性根が求められたので、これらの根に対応する行列 \mathbf{A} の固有ベクトルを計算しよう。まず実根の場合を考える。

5.4.1 特性根が相異なる負の 2 実根の場合の固有ベクトルの計算

各特性根（固有値）に対する方程式

$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}) \mathbf{h} = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2 \quad (5.14)$$

を解いて、固有ベクトルを定める。式 (5.14) を成分で書くと次式となる。

$$\begin{bmatrix} -\lambda_k & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\lambda_k - \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2 \quad (5.15)$$

すなわち、 λ_1 については

$$\begin{aligned} -\lambda_1 h_1 + \frac{1}{C} h_2 &= 0 \\ -\frac{1}{L} h_1 - \left(\lambda_1 + \frac{R}{L} \right) h_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

を h_1, h_2 について解けばよい。この 2 つの式は比例関係にあるのでどちらかの式を用いて h_1, h_2 の比を決定するとよい。今、第一式を用いることにすれば $h_1 = 1$ と選ぶと $h_2 = \lambda_1 C$ となる。すなわち、 λ_1 に対して 1 つの固有ベクトル

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 C \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

を得る。同様にして λ_2 に対して固有ベクトル

$$\mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 C \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

が求められる。次に重根の場合を考えよう。

5.4.2 特性根が特性根が重根の場合の固有ベクトルの計算

特性根は $\lambda = -\zeta = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{\sqrt{LC}}$ となっている。この固有値に対する固有ベクトルは上述と同様に

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{h}_1 = \mathbf{0} \quad (5.19)$$

より

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{C/L} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

と求められる。もう1つの固有ベクトルは自由に選んでもよいが、通常は

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1 \quad (5.21)$$

となるベクトル \mathbf{h}_2 を選ぶ。関係式

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2 \mathbf{h}_2 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{h}_1 = \mathbf{0} \quad (5.22)$$

が成り立つ。既に行列 $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2$ はその成分がすべて零の零行列となっていることからこの式から \mathbf{h}_2 を計算することはできない。固有ベクトル \mathbf{h}_2 は \mathbf{A} の λ に対する一般化固有ベクトル (generalized eigen vector) と呼ばれている。式 (5.21) を具体的に書き下すと

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{LC}} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{\sqrt{LC}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{C/L} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

となる。この第1式より

$$\frac{1}{\sqrt{LC}}h_1 + \frac{1}{C}h_2 = 1 \quad (5.24)$$

の関係式を用いて h_1, h_2 を決定するとよい。簡単のため次のベクトルを選ぶ。

$$\mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

2つの固有ベクトルから変換行列

$$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{C/L} & C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{LC}} & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

を作って行列 \mathbf{A} を変換すると

$$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{LC}} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{LC}} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

となる。すなわち、この系では前章 4.3 (2) の (b) の場合に相当している。

5.4.3 特性根が共役複素根の場合の固有ベクトルの計算

方程式

$$\mathbf{A}\mathbf{h} = \lambda_1\mathbf{h}, \quad \lambda_1 = -\zeta + j\omega_d, \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + j\mathbf{h}_2 \quad (5.28)$$

の実部と虚部を取り出して

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{h}_1 &= -\zeta\mathbf{h}_1 - \omega_d\mathbf{h}_2 \\ \mathbf{A}\mathbf{h}_2 &= \omega_d\mathbf{h}_1 - \zeta\mathbf{h}_2 \end{aligned} \quad (5.29)$$

他方, $\mathbf{h} = [h_1, h_2]'$ とおいて, 式 (5.28) の第 1 式を書き出すと

$$-\lambda_1 h_1 + \frac{1}{C} h_2 = 0 \quad (5.30)$$

となる. これより, $h_1 = 1$ とおくと, 固有ベクトル \mathbf{h} は次式となる.

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ (-\zeta + j\omega_d) C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\zeta C \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_d C \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

したがって

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\zeta C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_d C \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

2 つの固有ベクトルから変換行列

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\zeta C & \omega_d C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\zeta}{\omega_d} & \frac{1}{\omega_d C} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

を作って行列 \mathbf{A} を変換すると

$$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\zeta & \omega_d \\ -\omega_d & -\zeta \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

となる. すなわち, 式 (5.29) が成り立っている.

5.5 式 (5.1.3) の一般解

第 2 章 2.2 と第 4 章 4.3 を参照しながら, 式 (5.3) の一般解と初期値 (5.5) を満たす解を求めよう.

5.5.1 特性根が相異なる負の2実根の場合

一般解は次式となる.

$$\mathbf{x}(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{h}_1 + K_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{h}_2 \quad (5.35)$$

さてそこで, 初期値 (5.5) を満足する解を求めることにしよう.

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} v_0 \\ i_0 \end{bmatrix} = K_1 \mathbf{h}_1 + K_2 \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 C & \lambda_2 C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

この連立方程式を解いて K_1, K_2 は次式となる.

$$K_1 = \frac{C\lambda_2 v_0 - i_0}{C(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad K_2 = -\frac{C\lambda_1 v_0 - i_0}{C(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (5.37)$$

そこで, この初期値を満足する解は次式となる.

$$\mathbf{x}(t) = \frac{C\lambda_2 v_0 - i_0}{C(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{\lambda_1 t} \mathbf{h}_1 - \frac{C\lambda_1 v_0 - i_0}{C(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{\lambda_2 t} \mathbf{h}_2 \quad (5.38)$$

これを \mathbf{x} の成分 $v(t), i(t)$ で表すと

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) - \frac{i_0}{C(\lambda_2 - \lambda_1)} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \\ i(t) &= \frac{Cv_0 \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) - \frac{i_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}) \end{aligned} \quad (5.39)$$

5.5.2 特性根が特性根が重根の場合

前章の 4.3 (2) 式 (4.3.9) を参照して, 一般解は次式となる.

$$\mathbf{x}(t) = K_1 e^{\lambda t} \mathbf{h}_1 + K_2 e^{\lambda t} (t\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) \quad (5.40)$$

したがって, 初期値 (5.5) を満足する解は

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ i_0 \end{bmatrix} = K_1 \mathbf{h}_1 + K_2 \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda C & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

より

$$K_1 = v_0, \quad K_2 = \frac{i_0}{C} - \lambda v_0 \quad (5.42)$$

と求められる. したがって, 初期値 (5.5) を満足する解は

$$\mathbf{x}(t) = v_0 e^{\lambda t} \mathbf{h}_1 + \left(\frac{i_0}{C} - \lambda v_0 \right) e^{\lambda t} (t\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) \quad (5.43)$$

となる.

5.5.3 特性根が共役複素根の場合

前章の 4.3 (3) 式 (4.3.14) を参照して、一般解は次式となる.

$$\mathbf{x}(t) = (K_1 \cos \omega_d t + K_2 \sin \omega_d t) e^{-\zeta t} \mathbf{h}_1 + (-K_1 \sin \omega_d t + K_2 \cos \omega_d t) e^{-\zeta t} \mathbf{h}_2 \quad (5.44)$$

したがって、初期値 (5.5) を満足する解は

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ i_0 \end{bmatrix} = K_1 \mathbf{h}_1 + K_2 \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\zeta C & \omega_d C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

より

$$K_1 = v_0, K_2 = \frac{\zeta}{\omega_d} v_0 + \frac{1}{\omega_d C} i_0 \quad (5.46)$$

と求められる. したがって、初期値 (5.5) を満足する解は

$$\mathbf{x}(t) = v_0 e^{-\zeta t} (\cos \omega_d t \mathbf{h}_1 - \sin \omega_d t \mathbf{h}_2) + \left(\frac{\zeta v_0}{\omega_d} + \frac{i_0}{\omega_d C} \right) e^{-\zeta t} (\sin \omega_d t \mathbf{h}_1 + \cos \omega_d t \mathbf{h}_2) \quad (5.47)$$

となる. この式を整理すると次式を得る.

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{\omega_0}{\omega_d} v_0 e^{-\zeta t} \cos(\omega_d t - \phi) + \frac{i_0}{\omega_d C} e^{-\zeta t} \sin \omega_d t \\ i(t) &= -\omega_0 C \frac{\omega_0}{\omega_d} v_0 e^{-\zeta t} \sin \omega_d t + \frac{\omega_0}{\omega_d} i_0 e^{-\zeta t} \cos(\omega_d t + \phi) \end{aligned} \quad (5.48)$$

ここに、 $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \zeta^2$ の関係を使い、 $\phi = \tan^{-1} \frac{\zeta}{\omega_d}$ とおいた. 特に、 $\zeta = 0$ の *Lossless* の場合は次の単振動を与える.

5.5.4 特性根が純虚根の場合

この場合は式 (5.44) において $\zeta = 0$ とおいて、次の正弦波解を得る.

$$\mathbf{x}(t) = (K_1 \cos \omega_0 t + K_2 \sin \omega_0 t) \mathbf{h}_1 + (-K_1 \sin \omega_0 t + K_2 \cos \omega_0 t) \mathbf{h}_2 \quad (5.49)$$

初期値 (5.5) より、 $K_1 = v_0, K_2 = \frac{i_0}{\omega_0 C}$ となるので

$$\mathbf{x}(t) = \left(v_0 \cos \omega_0 t + \frac{i_0}{\omega_0 C} \sin \omega_0 t \right) \mathbf{h}_1 + \left(-v_0 \sin \omega_0 t + \frac{i_0}{\omega_0 C} \cos \omega_0 t \right) \mathbf{h}_2 \quad (5.50)$$

すなわち、解は次式となる.

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t & \frac{1}{\omega_0 C} \sin \omega_0 t \\ -\omega_0 C \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

この解の軌道は

$$\{v(t)\}^2 + \left\{ \frac{i(t)}{\omega_0 C} \right\}^2 = v_0^2 + \left(\frac{i_0}{\omega_0 C} \right)^2 \quad (5.52)$$

の楕円となっている.

5.6 相平面図

解析的な解が求められたので、これを基にして解の幾何学的な性質をみることにしよう。すなわち、状態の相平面 (v, i) 内でのふるまいを考察する。

5.6.1 特性根が相異なる負の2実根の場合

この場合は、2本の実固有ベクトルがある。まず、これらの固有ベクトルで定まる2本の直線上の解の様子を考えよう。式(5.38)に着目する。初期値を固有ベクトル \mathbf{h}_1 で定まる直線上においてみよう。このとき直線の方程式は次式となる。

$$i_0 = \lambda_1 C v_0 \quad (5.53)$$

この関係を式(5.38)に代入すると

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = v_0 e^{\lambda_1 t} \mathbf{h}_1 = v_0 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 C \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

となるから、関係式

$$v(t) = v_0 e^{\lambda_1 t}, \quad i(t) = v_0 \lambda_1 C e^{\lambda_1 t} \quad (5.55)$$

を得る。したがって、すべての時刻で

$$i(t) = \lambda_1 C v(t), \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad (5.56)$$

の関係が成り立つ。すなわち、この直線上に初期値を持つ任意の解は、それ以後この直線上を動いて $t \rightarrow \infty$ で原点に収束する。言い換えると固有ベクトルで定まる直線上の解は、この直線から離れる事が出来ない。状態空間内の集合 S で解がすべての時刻でその集合 S 内に留まるとき、 S を**不変集合** (invariant set) という。上で述べた事実は、一般に固有ベクトルで張られる部分ベクトル空間（今の場合は直線）は不変集合となることを意味している。

したがって、特性根が相異なる2実根となる場合は、2本の不変直線上に適当に基底を選ぶと、任意の初期値から出発する解はこの不変直線上の解を重ね合わせることによって求めることができる。このことが式(5.38)の幾何学的な意味である。

実際、初期値は次のように $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ 方向に分解できる。図5.3参照。

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{C\lambda_2 v_0 - i_0}{C(\lambda_2 - \lambda_1)} \mathbf{h}_1 + \frac{C\lambda_1 v_0 - i_0}{C(\lambda_2 - \lambda_1)} \mathbf{h}_2 \quad (5.57)$$

したがって、解(5.38)は \mathbf{h}_1 方向に $e^{\lambda_1 t}$ で、 \mathbf{h}_2 方向に $e^{\lambda_2 t}$ で減衰する。式(5.38)をもう一度よくみてほしい。また、 $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ だから \mathbf{h}_2 方向の減衰の度合いが大きい(時定数が小さい)。

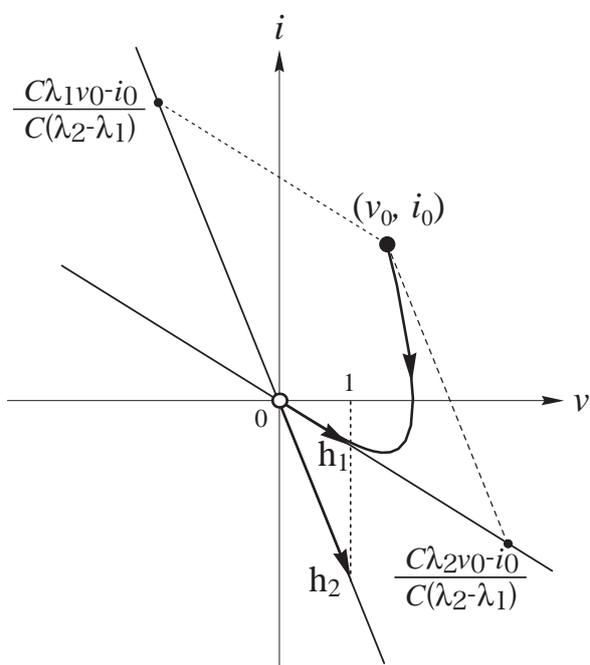


図 5.3 初期値の固有ベクトル成分への分解.

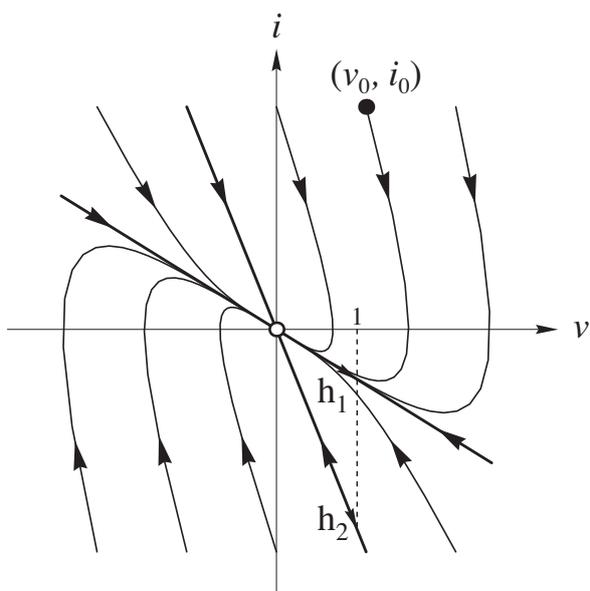


図 5.4 過減衰の場合の相平面図.

以上のことから、初期値を色々与えて軌道を描くと図 5.4 の相平面図を得る。平衡点である原点は安定結節点となる。

ここで相平面図の描き方について簡単にふれておこう。最近では方程式が与えられると計算機を使って数値計算により容易に解を求められるので、これを曲線として描けばよい。しかし、計算機を使う前に幾つかの定性的な性質を調べておくことも大切なことである。特に

- 固有ベクトルで定まる不変直線
- 等傾斜直線
- 軌道の向き（時間の進展の方向に矢印を付けること）

等を検討しておくといよい。ここで、これまでに説明しなかった**等傾斜曲線** (isocline) について述べておこう。等傾斜曲線とは、速度ベクトル場 (5.3) の方向が一定方向となる点を集めた集合のことである。よく用いられるのが、速度ベクトルが垂直となる場合と水平となる場合で、これらの集合は傾斜が零の曲線、すなわち**零傾斜曲線** (nullcline), と呼ばれている。我々の場合は式 (5.3) より、次の集合がこれに相当する。

$$\begin{aligned} L_V &= \left\{ (v, i) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{dv}{dt} = 0 \right\} \\ L_H &= \left\{ (v, i) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{di}{dt} = 0 \right\} \end{aligned} \quad (5.58)$$

集合 L_V 上では v 方向の速度が零となっているので、軌道は i 方向にのみ動いている。したがって、 L_V 上では軌道は v 軸に垂直となる。同様に L_H 上では軌道は水平となっている。式 (5.3) の場合は

$$\begin{aligned} L_V: & i = 0 \\ L_H: & -v - Ri = 0 \end{aligned} \quad (5.59)$$

である。 L_V は v 軸と一致し、原点（平衡点）を除いて v 軸上では軌道は垂直となっている。また、 $i > 0$ （上半平面）では $\frac{dv}{dt} > 0$ となっているので、解は時間の進展と共に v の正の方向、すなわち左から右、に動く。逆に、 $i < 0$ では右から左に向かう。 L_H についても同様の考察ができる。これらを合わせて考えると状態が軌道上どちらの方向に動くかを容易に調べることができる。そこで、軌道上に時間の進展方向に矢印を付けておくと状態の動的挙動を理解しやすくなる。

以上のような特徴のある軌道を最初に描き、その後残された相平面の部分に適当な初期値を与えて軌道を計算すると相平面図が完成する。

5.6.2 特性根が特性根が重根の場合

この場合は、固有ベクトルが 1 つしかないので、不変直線はこの固有ベクトルで決まる直線 1 つである。つまり、平衡点は 1 軸の退化した安定結節点となる。図 5.5 参照。退

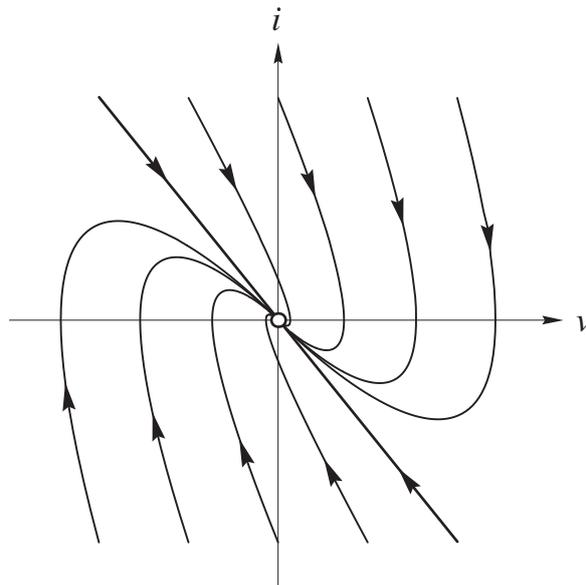


図 5.5 臨界減衰の場合の相平面図.

化しているというのは、図 5.4 の 2 本の不変直線が一致して 1 本になった特殊な場合と考えられるからである。

この臨界減衰の場合は、回路のパラメータが特殊な値でのみ生じるので、物理的にはまず実現されることはないと考えてよい。たとえば、抵抗の値を僅かに変動させると、先に述べた過減衰の場合かあるいは次に述べる減衰振動の場合になってしまう。

しかし、見方を変えるとこのような臨界値は工学的にも、また理論的にも有用となることがある。状態が振動的（減衰振動の場合）となるか、あるいは非振動的（過減衰の場合）となるかのちょうど境のパラメータなので、この性質を利用して未知の回路定数を知るための計測に応用したり、振動をおさえて速やかに状態を別の状態に変化させる制御に応用できる。

線形代数の教科書では、重複固有値の場合は線形写像の Jordan 標準形の問題として述べられている。理論的に興味のある人は一度チャレンジしてみるとよいであろう。

一般に現象が定性的に変化するパラメータの値は、数学的にみると相平面図の性質が質的に変化するパラメータの値に対応し、臨界、特異、分岐などの用語で呼ばれる特殊な状態が現れる。今後、注意しておくるとよいであろう。

5.6.3 特性根が共役複素根の場合

この場合は減衰しながら振動する解 (5.48) となる。原点（平衡点）は渦状点となっている。図 5.6 参照。標準形の対数螺旋が線形変換を受け扁平になっている。零傾斜直線に注目してみると抵抗の値が幾らであるか概算できる。

さて、減衰の程度について少し検討しておこう。ζ あるいは Q の値で減衰の度合いが

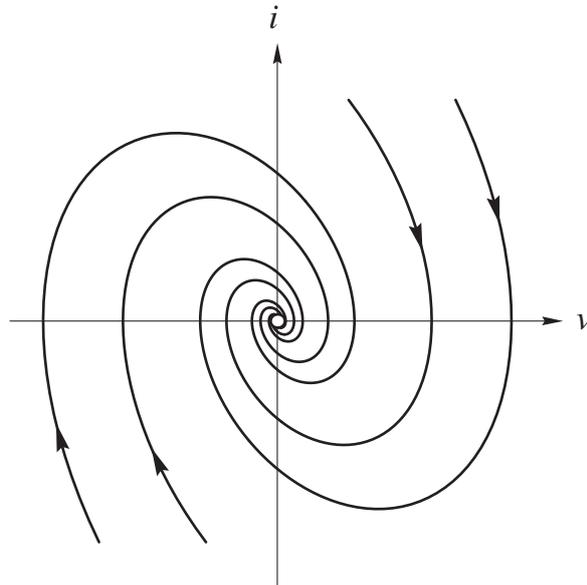


図 5.6 減衰振動の場合の相平面図.

測られる。たとえば、 Q の値が大きい程（すなわち ζ の値が小さい程）回路は振動的となり、減衰がゆるやかとなる。つまり、過渡現象が落ち着きにくくなる。図 5.7 参照。逆に、観測波形から Q の値が次のようにして求められる。

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \zeta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad (5.60)$$

であるから、 $Q \gg 1$ のとき $\omega_d \simeq \omega_0$ となる。今、簡単のため初期値を $v(0) = v_0, i(0) = 0$ と選んだ解 (5.48) を考えると、電圧波形は次式となる。

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega_0 t - \phi) \quad (5.61)$$

そこで、この波形の振幅は

$$V(t) = v_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \quad (5.62)$$

に従って減衰する。式 (5.61) の振動の周期を T 、式 (5.62) の時定数を T_e とすると

$$\omega_0 T = 2\pi, T_e = \frac{2Q}{\omega_0} \quad (5.63)$$

したがって

$$\frac{T}{T_e} = \frac{Q}{\pi} \quad (5.64)$$

の関係を得る。これは、式 (5.61) の波形が約 $\frac{Q}{\pi}$ 回振動する間に、振幅が $\frac{1}{e}$ に減衰することを示している。このことに着目すれば、減衰の緩やかな振動波形からその系の Q 値を知ることができる。

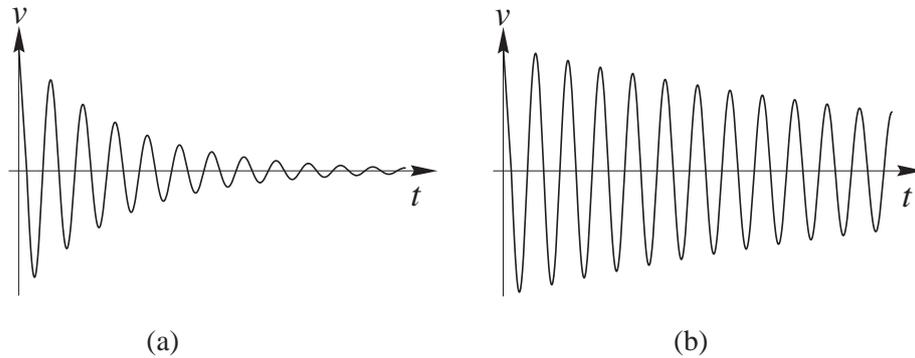


図 5.7 減衰振動の波形. (a) Q が小さい場合と, (b) Q が大きい場合.

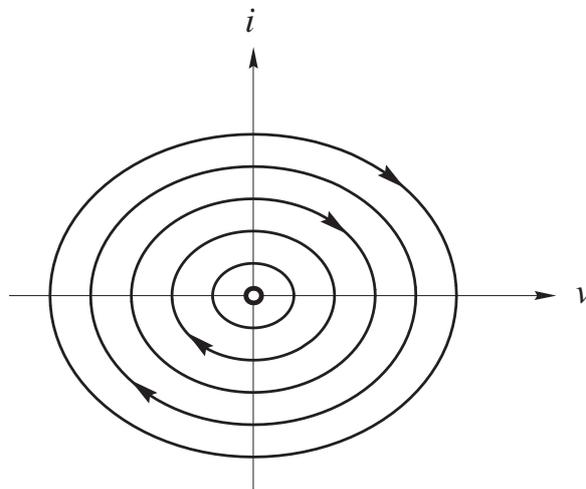


図 5.8 LC 回路の相平面図.

5.6.4 特性根が純虚根の場合

抵抗の値が零となっているこの回路は RLC 回路としては特殊な回路であるが, 状態が永久に振動するのはこの場合に限られる. 抵抗の無い世界は, 物理学においては最も基本的な世界像である. したがって, 力学の教科書でも質点とバネの運動や振り子の微小振動として紹介されている. この振動は単振動 (simple oscillation) あるいは調和振動 (harmonic oscillation) として知られている. 相平面図は, 図 5.8 のように楕円群の軌道で構成される.

この相平面図は, 式 (5.51) と式 (5.52) から直ちに描くことができる.

特に, 式 (5.52) はエネルギー保存則を表す式であることに注意しよう. 実際, 式 (5.52) に $\frac{1}{2}C$ を掛けて整理すると次式を得る.

$$\frac{1}{2}C \{v(t)\}^2 + \frac{1}{2}L \{i(t)\}^2 = \frac{1}{2}Cv_0^2 + \frac{1}{2}Li_0^2 \quad (5.65)$$

これは、キャパシタに蓄えられる電気的エネルギー $\frac{1}{2}Cv(t)^2$ とインダクタに蓄えられる磁氣的エネルギー $\frac{1}{2}Li(t)^2$ の和が時間的に変化しないことを表している。つまりこの回路の全エネルギーは時間的に変化せず一定値に保存される。回路の全エネルギーは、初期値によって決まってしまうことは言うまでもない。

最後に、保存則は次のように相平面図と関係している。今、相平面内の任意の面積要素が時間の経過によりどう変化するかをみてみよう。 $t = 0$ で面積が

$$S(0) = \iint_{S(0)} dv_0 di_0 \quad (5.66)$$

の部分集合を考える。 $S(0)$ 内に初期値 (v_0, i_0) を持つ解は時刻 t で楕円軌道に沿って $((v(t), i(t)))$ に写される。このとき面積は

$$S(t) = \iint_{S(t)} dv di \quad (5.67)$$

となる。これは $S(0)$ 内の各点が解 (5.51) によって変換された後の面積である。 $S(t)$ は式 (5.51) を相平面内の変換と考えると

$$\frac{\partial(v, i)}{\partial(v_0, i_0)} = \begin{vmatrix} \cos \omega_0 t & \frac{1}{\omega_0 C} \sin \omega_0 t \\ -\omega_0 C \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{vmatrix} = 1 \quad (5.68)$$

より、

$$S(t) = \iint_{S(t)} dv di = \iint_{S(0)} \frac{\partial(v, i)}{\partial(v_0, i_0)} dv_0 di_0 = \iint_{S(0)} dv_0 di_0 = S(0) \quad (5.69)$$

となり、 $S(0)$ に等しくなることが分かる。

5.7 エネルギー関数と安定性の問題

この章で述べてきた RLC 回路では、平衡点の近傍の状態は時間の経過とともに平衡点に漸近する（抵抗がある場合）か、平衡点のまわりに留まっている（ LC 回路の場合）かのいずれかであった。このような場合、平衡点は安定であるというのであった。第2章 2.2.3 参照。前節までの解析でこれらの事実は、回路方程式 (5.3) を直接解くことにより確かめられた。

他方、前節の 5.6.4 でみたように *Lossless* 回路においては、回路に蓄えられたエネルギーは状態が変化しても一定に保たれていることもわかった。この節ではエネルギー関数について考え、これを用いて回路方程式を解くことなく平衡点の安定性を検討できることを示す。

図 5.1 に示した RLC 直列回路を考える。この回路の状態はインダクタを流れる電流 $i(t)$ とキャパシタ電圧 $v(t)$ であり、それぞれの素子に蓄えられる磁氣的エネルギーおよ

び電気的エネルギーは、これらの状態を用いて計算できる。すなわち、全エネルギーを $H(t)$ とすると、

$$H(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t) + \frac{1}{2}Li^2(t) \quad (5.70)$$

である。この表現は誤解を招くかも知れない。丁寧に述べると「まず状態 (v, i) の関数 $H(v, i)$ を定義し、そのあと回路方程式に従う時間の関数としての状態 $(v(t), i(t))$ を代入する。その結果、時間の関数としてのエネルギー関数が得られる」ということである。状態 (v, i) の関数 $H(v, i)$ としてみると、これは初期状態 (v_0, i_0) において

$$H(v_0, i_0) = \frac{1}{2}Cv_0^2 + \frac{1}{2}Li_0^2 \quad (5.71)$$

の値を持つ。また、相平面内でこの点を通るエネルギー関数は次の楕円を描く。

$$\frac{1}{2}Cv^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}Cv_0^2 + \frac{1}{2}Li_0^2 \quad (5.72)$$

一方、状態 $(v(t), i(t))$ の時間変化は回路方程式に従う。ここで、念のため回路方程式 (5.1) をもう一度書いておこう。

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= i \\ L \frac{di}{dt} &= -v - Ri \end{aligned} \quad (5.73)$$

さてそこで、エネルギー関数 (5.70) の時間的な変化がどうなるか計算してみよう。式 (5.70) を時間で微分し、回路方程式 (5.73) の関係を代入すると、次式となる。

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial H}{\partial i} \frac{di}{dt} = Cv \frac{dv}{dt} + Li \frac{di}{dt} = vi - (v + Ri)i = -Ri^2 \leq 0 \quad (5.74)$$

このことから、 $R > 0$ ならば、 $i \neq 0$ で $H(t)$ は時間とともに減少していることが分かる。 $i = 0$ では、 $v = 0$ の平衡点を除いて

$$L \left. \frac{di}{dt} \right|_{i=0} = -v - Ri|_{i=0} = -v \neq 0$$

より、軌道は直ちに $i \neq 0$ となる。これまでの相平面図を参照。したがって、 $H(t)$ は平衡点を除いていつも減少する。図 5.9 参照。

以上のことから、 $R > 0$ ならば、平衡点である原点は漸近安定となる。すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.75)$$

5.8 時間反転と負性抵抗

状態や平衡点の漸近安定性の概念は、時間に方向性のあることを示唆している。すなわち、平衡点は時間の正の向きである未来に向かっては漸近安定となるが、過去に向かって

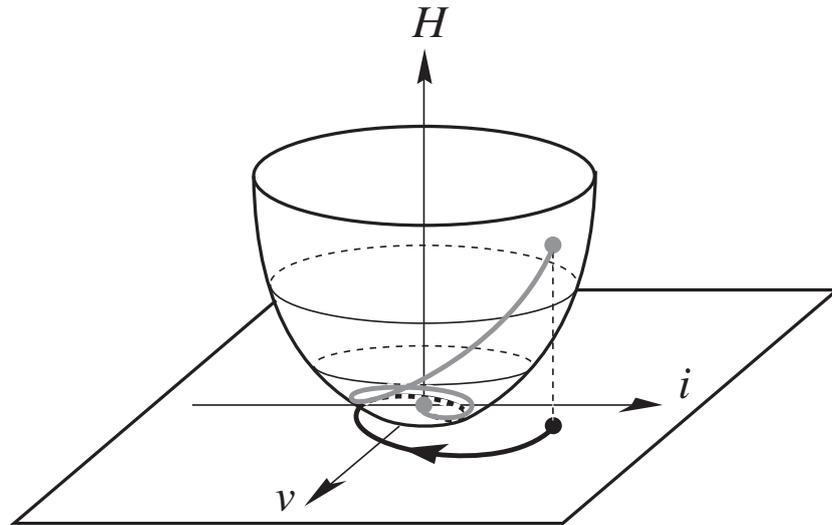


図 5.9 エネルギー関数と軌道の関係.

は逆に不安定となる。これは、相平面図の中に描かれた軌道の向きが時間を負の方向としたとき逆転することから容易に理解できる。

一方、漸近安定性の判定は、抵抗の値が正値であることにのみ依存していた。式 (5.74) を参照。したがって、時間を反転し過去に向かって状態の変化を検討する問題は、抵抗の値を負にした回路を考えればよいのではないかという推論が成り立つ。実際、そうであることを以下において検討しよう。なお、抵抗を含む物理系全般にわたってこの議論が成り立つことから、抵抗を含む系を**散逸系** (dissipative system) という*1。通常の電気回路は、代表的な散逸系ということが出来る。

時間反転を考えるために、過去に向かう時間軸を τ とする。すなわち、時間軸の変換

$$\tau = -t \quad (5.76)$$

を考えよう。 t は勿論これまで考えてきた通常の未来に向かう時間である。このとき、時間微分の関係は次式となる。

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d}{d(-t)} = -\frac{d}{dt}, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{d^2}{dt^2}, \quad \frac{d^3}{d\tau^3} = -\frac{d^3}{dt^3}, \quad \dots \quad (5.77)$$

したがって、回路方程式 (5.1) は、この変換によって次式となる。

$$\begin{aligned} -C \frac{dv}{d\tau} &= i \\ -L \frac{di}{d\tau} &= -v - Ri \end{aligned} \quad (5.78)$$

*1 これに対して抵抗のない系、つまり *Lossless* 回路言い換えると *LC* 回路、は保存系 (conservative system)、あるいは Hamilton 系という。ここで言う「散逸」とは、もちろんエネルギーが減少するという意味である。

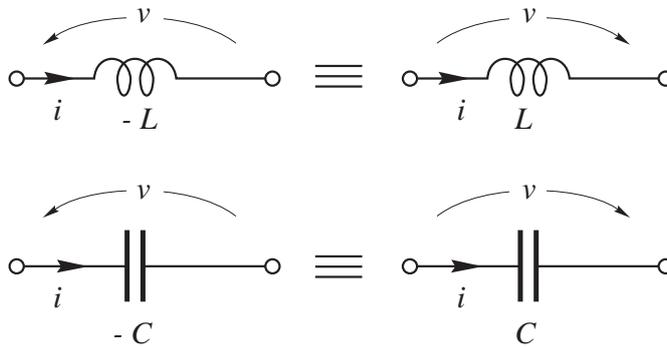


図 5.10 負インダクタと負キャパシタの特性.

また、式 (5.2) は次式となる.

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} - 2\zeta \frac{dv}{d\tau} + \omega_0^2 v = 0 \quad (5.79)$$

式 (5.78) は、このままではキャパシタンスとインダクタンスを負の値にした回路方程式と言える. そこで両辺に $-$ を掛けると

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{d\tau} &= -i \\ L \frac{di}{d\tau} &= v + Ri \end{aligned} \quad (5.80)$$

を得る. これは、相平面内でベクトル場の方向を反転することを意味している. 他方、式 (5.79) は、 ζ の符号を変えたことになっているので、負の値の抵抗を考えたことになっている. これを**負性抵抗** (negative resistor) という.

すこし混乱しそうなので、整理して考え直そう. 素子特性の定義にさかのぼって考えてみるとよい. 時間反転によって影響をうける素子は、時間微分を定義式に含むインダクタとキャパシタである. そこで、負インダクタや負キャパシタ素子の特性とは、図 5.10 の左右を見比べてみると、通常の素子とみて電圧・電流の向きを取り直した右側の素子と考えることができる. そこで、負性リアクタンス (負性インダクタと負性キャパシタ) を含む回路を通常のリアクタンス回路で描くと図 5.11 となる. この回路の回路方程式は

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= i \\ L \frac{di}{dt} &= -v + Ri \end{aligned} \quad (5.81)$$

となる. これは図 5.12 に示した、通常のリアクタンスを考え、抵抗を負性抵抗とした回路の回路方程式にほかならない.

以上のことから、式 (5.81) の原点 (平衡点) は、

1. $-\zeta > \omega_0$ ならば特性根は相異なる正の 2 実根、従って不安定結節点,
2. $-\zeta = \omega_0$ ならば特性根は正の重根、従って退化した不安定結節点,

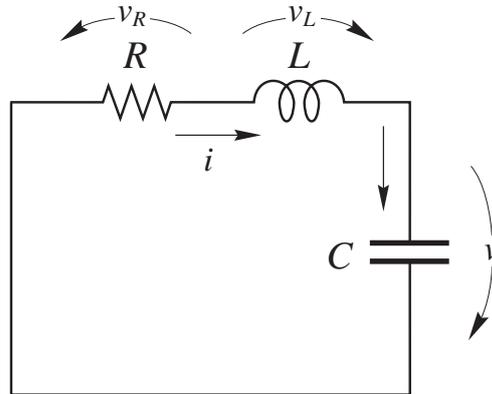


図 5.11 インダクタとキャパシタの特性の向きが通常と異なる回路.

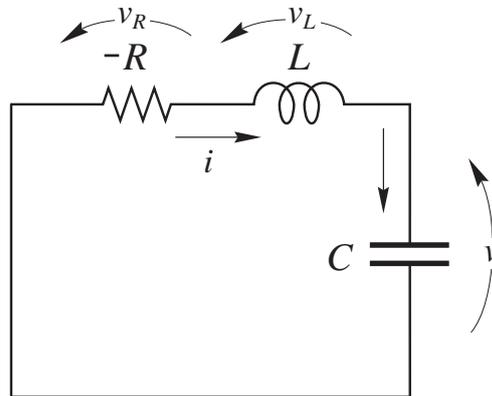


図 5.12 負性抵抗を仮定した回路.

3. $-\zeta < \omega_0$ ならば特性根は実部が正の共役複素根, 従って不安定渦状点,
4. $\zeta = 0$ ならば特性根は純虚数, 従って今回の議論に関係なしの渦心点

となる. ここに, $\zeta = R/2L, \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ とおいた, それぞれの場合の相平面図を図 5.13 に示した, これらは「5.6 節でみた相平面図の軌道の向きを変えただけの相平面図ではない」ことに注意しよう.

負性抵抗など現実に存在するのだろうか. このことについて少しふれておこう. まず, 半導体など能動素子の中には部分的に負性抵抗を持つ素子がある. たとえば, 江崎ダイオードなどがよく知られている. このことについてはいずれ電子回路や回路網解析の授業で教えてもらえるであろう. もう少し簡単に作る方法としては, 演算増幅器 (operational amplifier) を使って等価的に負性抵抗を作るやり方である. たとえば図 5.14 の回路を考える. この回路の図中の変数を使って, 端子からみた電圧・電流特性は次式となる.

$$i = \frac{v - v_0}{R} = \frac{v - \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v}{R} = -\frac{R_2}{RR_1}v \quad (5.82)$$

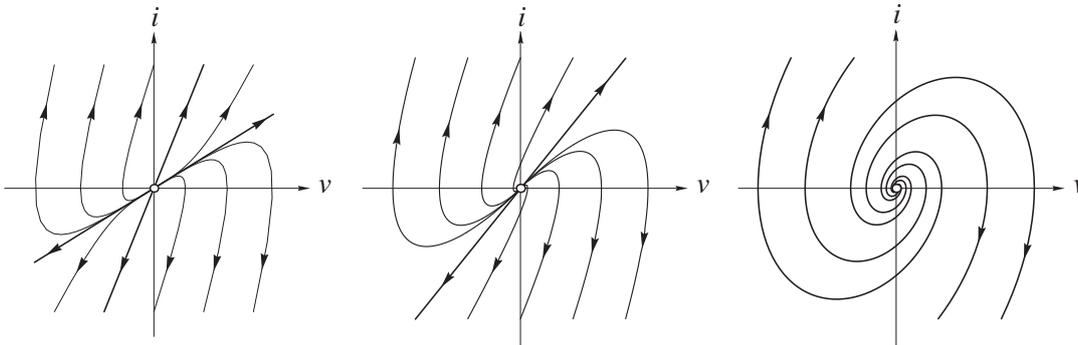


図 5.13 平衡点の相平面図.

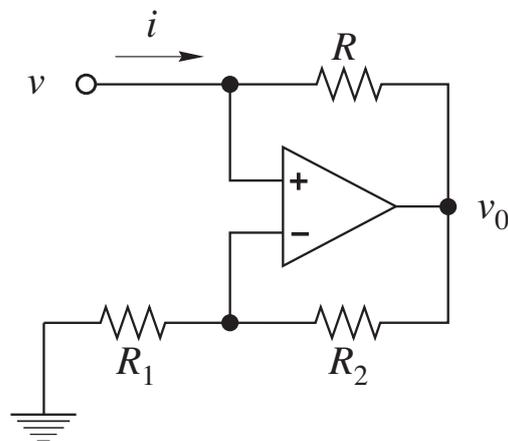


図 5.14 演算増幅器による負性抵抗の実現.

したがって,

$$v = -\frac{RR_1}{R_2}i \quad (5.83)$$

となって、等価的に抵抗が $-\frac{RR_1}{R_2}$ の素子が構成できたことになる。ただし、この構成では、出力電圧 v_0 が増幅器の基準電圧（通常 10 V）を越えると普通の抵抗 R になってしまう。したがって、 v_0 が増幅器の基準電圧以内で動作する範囲に限って負性抵抗が実現されたこととなる。

5.9 非線形回路と発振現象

負性抵抗が平衡点を不安定にすることが分かったので、このことを積極的に利用した回路を考える。自励振動回路 (self-oscillatory circuit) がその一例である。この回路は発振器 (oscillator) と呼ばれ、正弦波や矩形波を発生するために広く用いられている。ここでは、正弦波発振器 (harmonic oscillator) の動作原理を考える。

さて、これまで RLC 直列回路の自由振動を考えてきたが、この節では RLC 並列回

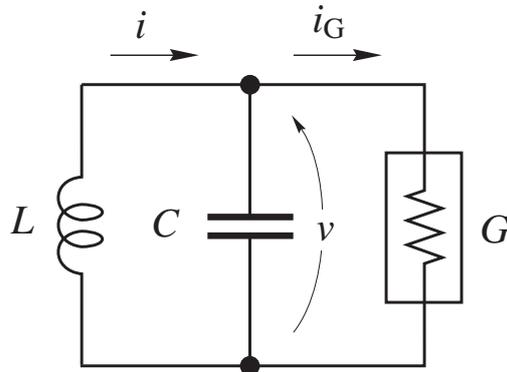


図 5.15 RLC 並列回路.

路を考える。抵抗の代わりにコンダクタンスを用いる^{*2}ので並列回路を取りあげることとした。

図 5.15 の回路を考える。キャパシタとインダクタはこれまで通りの線形特性を持つものとする。キャパシタに並列につないだ抵抗の特性を次式と仮定する。

$$i_G = g(v_G) = -g_1 v_G + g_3 v_G^3 \quad (5.84)$$

ここに、 i_G, v_G はそれぞれ抵抗（コンダクタ）を流れる電流，端子間電圧である。また，係数は $g_1, g_3 > 0$ と仮定する。このようにコンダクタを流れる電流が素子に加わる電圧の関数で与えられる抵抗素子のことを電圧制御型抵抗（あるいはコンダクタ）と呼ぶ。また，特性がこのように比例の関係ではない素子のことを非線形素子 (nonlinear element) という。非線形抵抗の場合は，抵抗値（あるいはコンダクタンス値）は電圧の値によって異なる。ある電圧でのコンダクタンスは，特性 (5.84) を微分して

$$\frac{di_G}{dv_G} = -g_1 + 3g_3 v_G^2 \quad (5.85)$$

で与えられる。これを微分コンダクタンス（微分抵抗）という。式 (5.85) の場合，微分コンダクタンスは

1. $v_G^2 < \frac{g_1}{3g_3}$ ならば $\frac{di_G}{dv_G} < 0$,
2. $v_G^2 = \frac{g_1}{3g_3}$ ならば $\frac{di_G}{dv_G} = 0$,
3. $v_G^2 > \frac{g_1}{3g_3}$ ならば $\frac{di_G}{dv_G} > 0$,

となる。すなわち，原点近くでは負性抵抗， $v_G^2 > \frac{g_1}{3g_3}$ では通常の抵抗とみることができるとなる。一般に非線形抵抗は，状態の値によって微分抵抗が異なる点に特徴がある。

^{*2} 負性抵抗をどう実現するかによって RLC 直列回路を考えるかあるいは RLC 並列回路を考えるかに分かれる。電流制御型の抵抗ならば RLC 直列回路を，電圧制御型抵抗（コンダクタ）ならば RLC 並列回路を考える。なお，後者の場合 GLC 並列回路というべきであろうが，ここでは RLC 並列回路と呼ぶことにする。

回路方程式は次式となる.

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{1}{C} \{i - g(v)\} \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{L}v\end{aligned}\quad (5.86)$$

平衡点は原点のみであることを注意しよう. この点での線形化方程式*3は次式となる.

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{1}{C} \{i + g_1v\} \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{L}v\end{aligned}\quad (5.87)$$

この方程式の原点は不安定である. この結果は式 (5.86) の原点についても同様に適用できる. おおざっぱに考えて v, i が小さい範囲で, つまり相平面の原点 (平衡点) の近傍において, 両式の性質は同じと考えてよい.

非線形抵抗の性質が顕著となるのは v, i が大きくなった場合である. 微分抵抗が通常の正の値を持つ抵抗となるので, 軌道は原点近傍をめざして巻き込んでくる. 他方, 原点は不安定なので, 原点近傍の軌道は原点から巻き出す. 平衡点は原点しか無いので, すべての軌道は相平面内で原点を取り囲む適当な円環領域に入って, 永久回転運動をすることになる. 実際この円環内に閉曲線軌道が存在して, すべての軌道 (原点は除く) は, この閉曲線軌道に漸近する. 閉曲線軌道上の状態は, 周期的に振動する周期解が対応する. 図 5.16 および図 5.17 参照. なお, これらの図は, 式 (5.86) において, $C = 1, L = 1, g_1 = 0.5, g_3 = 1/3$ の場合を数値積分して描いた. 図 5.17 の波形は, 初期値 $(v_0, i_0) = (0, 0.02)$ とした場合である.

発振現象の特徴は, このように孤立した閉軌道が存在することであり, これは線形回路では実現できない非線形回路特有の現象である. 孤立した閉軌道のことをリミット・サイクル (limit cycle) という. 発振現象には, リミット・サイクルが対応し, これはまた負性抵抗による平衡点の不安定化が関係しているといえる. 負性抵抗によって, 相平面がリミット・サイクル内の時間反転の世界と, リミット・サイクル外の通常の世界に二分されているとみることもできる.

これらの非線形振動の研究は, 20 世紀前半ヨーロッパやロシアにおいてその基礎が確立された. 式 (5.86) から i を消去し, v についての 2 階スカラー方程式を導くと次式を得る.

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{d\tau} + x = 0 \quad (5.88)$$

ここに,

$$x = \sqrt{\frac{3g_3}{g_1}}v, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{LC}}t$$

*3 原点における等価抵抗は $\frac{di}{dv}(0) = -g_1$ である. この抵抗で線形近似した方程式を線形化方程式という.

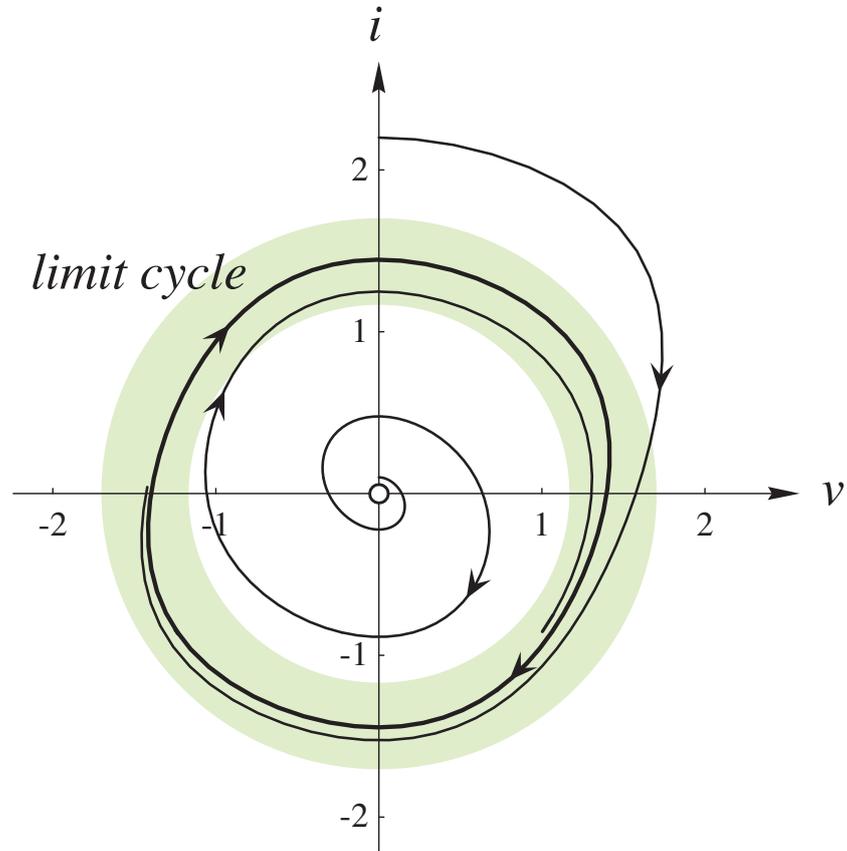


図 5.16 リミット・サイクルのある相平面図.

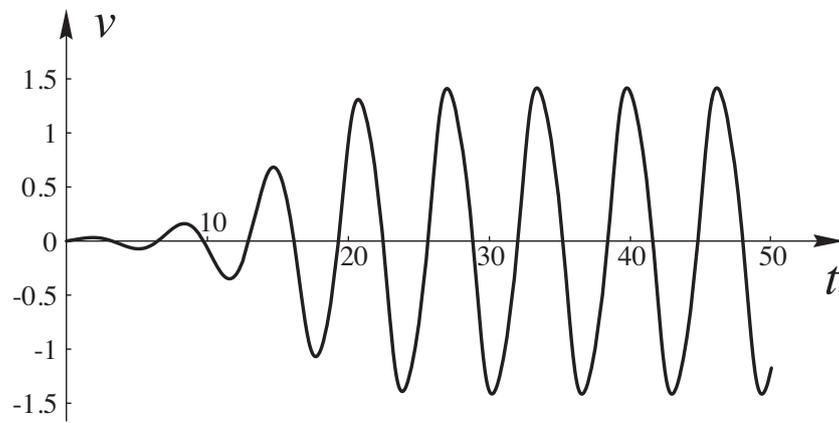


図 5.17 自励振動波形.

とおいた。この方程式は、真空管を用いた最初の発振器の動作を説明するために、オランダの電気技術者 van der Pol によって導かれた式である。彼の研究にちなんでファンデアポールの方程式と呼ばれている。おもしろいことに、生物が持つ各種各様のリズム、たとえば、睡眠と覚醒、動物の歩行、心臓の鼓動、植物の日周運動や季節的な運動など、の数学モデルは、このファンデアポールの方程式を基に作られることが多い。

同様に、式 (5.86) から v を消去し、 i についての 2 階スカラー方程式を導くと次式を得る。

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} - \varepsilon \left\{ 1 - \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 \right\} \frac{dy}{d\tau} + y = 0 \quad (5.89)$$

ここに、

$$y = \sqrt{\frac{g_3 L}{g_1 C}} i, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{LC}} t$$

とおいた。こちらの方程式は、19 世紀末、英国の物理学者レーリィー (Rayleigh) によって楽器の自励振動の方程式として導かれていた。したがってレーリィーの方程式として知られている。勿論 3 つの式 (5.86), (5.88), および (5.89) は状態変数の選択が異なるだけにすぎないので、等価な方程式である。

素子特性を非線形関数にまで拡張し、負性抵抗も許した回路を考えると、線形定係数常微分方程式の理論からはみだした非線形常微分方程式の世界に入って考察を進めなければならなくなる。一般に、非線形常微分方程式は解くことが出来ないので数学的扱いがいきおい難しくなる。他方、現実の世界にみられる状態の挙動に関して、おもしろい性質はほとんどすべて非線形システムから導かれる。非線形系の研究は、1975 年ごろから「カオス現象」をきっかけにして多くの分野でなされ始め、21 世紀の興味ある基礎理論として現在注目を集めている。

第 6 章

強制振動 I — 直流入力への応答 —

この章からは、 RLC 直列回路の強制振動を考える。最初に、電源として直流電圧源を印加した場合について解析する。直流電圧源が印加された回路は、一定となる電圧・電流を定常状態を持つ。すなわち、回路方程式は自律系となり、平衡点が定常状態に対応する。回路の状態は、この定常状態と前節で扱った自由振動すなわち過渡状態を加え合わせると得られる。解析手法に一般性を持たせるため、この章でもベクトル方程式を解くことを考える。

6.1 直流電圧源の印加された RLC 回路とその定常状態

直流電圧源の印加された図 6.1 の回路を考える。回路方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= i \\ L \frac{di}{dt} &= -v - Ri + E \end{aligned} \quad (6.1)$$

あるいは、ベクトル方程式

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x + \mathbf{b} \quad (6.2)$$

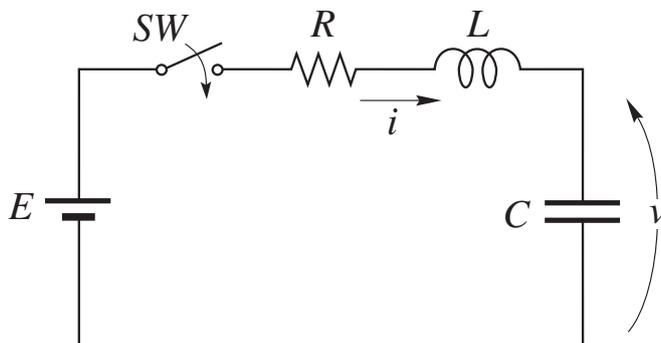


図 6.1 直流電圧源が印加された RLC 直列回路。

となる。ここに

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{E}{L} \end{bmatrix}$$

とおいた。式 (6.1) の最も大きな特徴は自律系ということである。したがって、第4章、第5章で考察した相平面図の概念が、変更することなく使用できる。実際、以下にみるように第5章の議論と本質的に同じとなる。

そこでまず、平衡点を求めよう。平衡点は次式となる。

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} v^* \\ i^* \end{bmatrix} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

この平衡点は、勿論回路の定常状態に対応している。

さて、初期値問題として、最初に回路は静止していた。すなわち、 $t=0$ でスイッチを閉じると考え、

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} v(0) \\ i(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

の場合を考えよう。これは、回路のステップ応答 (step response) と呼ばれる応答である。

解析の基本は、重ね合わせの理により、次のように述べることができる。平衡点に原点を平行移動させて考えると回路の状態は自由振動する。すなわち、回路方程式は、同次方程式となる。実際、新しい座標

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v^* \\ i^* \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

を考えると、式 (6.2) は次式となる。

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad (6.6)$$

したがって、平衡点を原点と考えて前章で描いた式 (6.6) の相平面図を描き、式 (6.2) の原点を通る解を求めるとこれが初期値 (6.4) を満たす解となる。

前章を参考にしながら、初期値 (6.4) を満たす解を求めてみよう。自由振動と同様に場合を分けて考える。

6.2 ステップ応答

6.2.1 特性根が相異なる負の2実根の場合

一般解は次式となる。

$$\mathbf{x}(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{h}_1 + K_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{h}_2 + \mathbf{x}^* \quad (6.7)$$

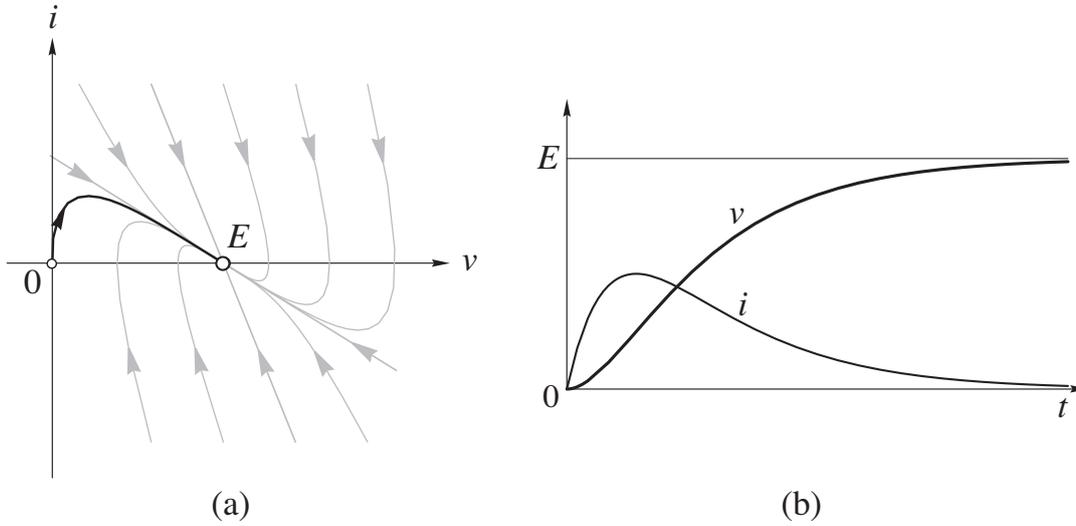


図 6.2 過減衰の場合：(a) 相平面図と (b) 波形の例.

さてそこで、初期値 (6.4) を満足する解を求めることにしよう.

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = K_1 \mathbf{h}_1 + K_2 \mathbf{h}_2 + \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 C & \lambda_2 C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

この連立方程式を解いて K_1, K_2 は次式となる.

$$K_1 = -\frac{C\lambda_2 E}{C(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad K_2 = \frac{C\lambda_1 E}{C(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (6.9)$$

そこで、この初期値を満足する解は次式となる.

$$\mathbf{x}(t) = -\frac{C\lambda_2 E}{C(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{\lambda_1 t} \mathbf{h}_1 + \frac{C\lambda_1 E}{C(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{\lambda_2 t} \mathbf{h}_2 + \mathbf{x}^* \quad (6.10)$$

これを \mathbf{x} の成分 $v(t), i(t)$ で表すと

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{E}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) + E \\ i(t) &= \frac{CE\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \end{aligned} \quad (6.11)$$

この場合の相平面図と波形をそれぞれ、図 6.2 (a) と (b) に示した.

6.2.2 特性根が特性根が重根の場合

前章の 5.5.2 式 (5.5.6) を参照して、一般解は次式となる.

$$\mathbf{x}(t) = K_1 e^{\lambda t} \mathbf{h}_1 + K_2 e^{\lambda t} (t\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) + \mathbf{x}^* \quad (6.12)$$

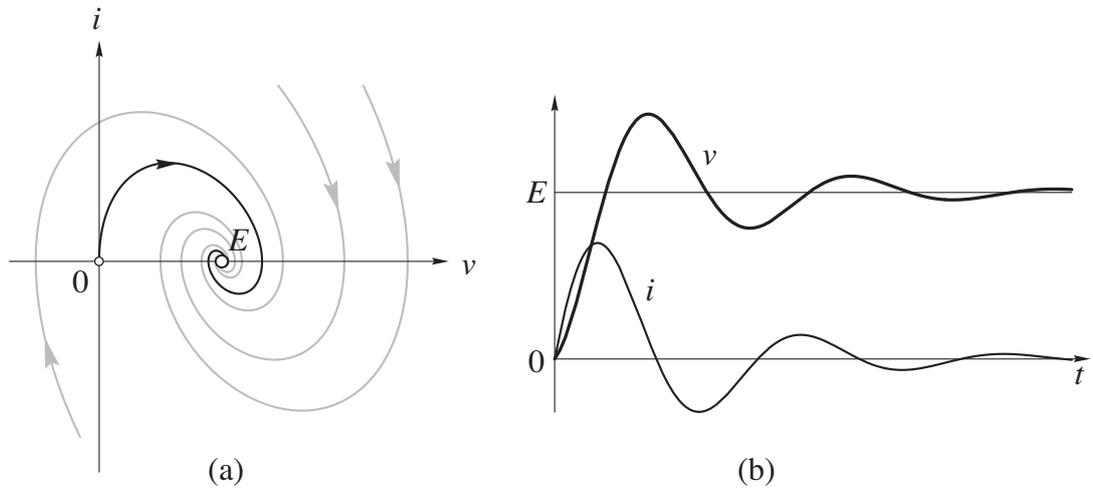


図 6.3 減衰振動の場合：(a) 相平面図と (b) 波形の例.

したがって、初期値 (6.4) を満足する解は

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = K_1 \mathbf{h}_1 + K_2 \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\zeta C & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

より

$$K_1 = -E, \quad K_2 = -\zeta E \quad (6.14)$$

と求められる。したがって、初期値 (6.4) を満足する解は

$$\mathbf{x}(t) = -Ee^{-\zeta t} \mathbf{h}_1 - \zeta Ee^{-\zeta t} (t\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) + \mathbf{x}^* \quad (6.15)$$

となる。すなわち、

$$\begin{aligned} v(t) &= -E(1 + \zeta t)e^{-\zeta t} + E \\ i(t) &= \zeta^2 CEte^{-\zeta t} \end{aligned} \quad (6.16)$$

となる。

6.2.3 特性根が共役複素根の場合

前章の 5.5.3 式 (5.5.10) を参照して、一般解は次式となる。

$$\mathbf{x}(t) = (K_1 \cos \omega_d t + K_2 \sin \omega_d t) e^{-\zeta t} \mathbf{h}_1 + (-K_1 \sin \omega_d t + K_2 \cos \omega_d t) e^{-\zeta t} \mathbf{h}_2 + \mathbf{x}^* \quad (6.17)$$

したがって、初期値 (6.4) を満足する解は

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = K_1 \mathbf{h}_1 + K_2 \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\zeta C & \omega_d C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

より

$$K_1 = -E, K_2 = -\frac{\zeta}{\omega_d} E \quad (6.19)$$

と求められる。したがって、初期値 (6.4) を満足する解は

$$\mathbf{x}(t) = -Ee^{-\zeta t} (\cos \omega_d t \mathbf{h}_1 - \sin \omega_d t \mathbf{h}_2) - \frac{\zeta}{\omega_d} Ee^{-\zeta t} (\sin \omega_d t \mathbf{h}_1 + \cos \omega_d t \mathbf{h}_2) + \mathbf{x}^* \quad (6.20)$$

となる。この式を整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} v(t) &= -\frac{\omega_0}{\omega_d} Ee^{-\zeta t} \cos(\omega_d t - \phi) + E \\ i(t) &= \omega_0 C \frac{\omega_0}{\omega_d} Ee^{-\zeta t} \sin \omega_d t \end{aligned} \quad (6.21)$$

ここに、 $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \zeta^2$ の関係を使い、 $\phi = \tan^{-1} \frac{\zeta}{\omega_d}$ とおいた。この場合の相平面図と波形をそれぞれ、図 6.3 (a) と (b) に示した。

6.2.4 特性根が純虚根の場合

この場合は式 (6.17) において $\zeta = 0$ とおいて、次の正弦波解を得る。

$$\mathbf{x}(t) = (K_1 \cos \omega_0 t + K_2 \sin \omega_0 t) \mathbf{h}_1 + (-K_1 \sin \omega_0 t + K_2 \cos \omega_0 t) \mathbf{h}_2 + \mathbf{x}^* \quad (6.22)$$

初期値 (6.4) より、 $K_1 = -E, K_2 = 0$ となるので

$$\mathbf{x}(t) = -E \cos \omega_0 t \mathbf{h}_1 + E \sin \omega_0 t \mathbf{h}_2 + \mathbf{x}^* \quad (6.23)$$

すなわち、解は次式となる。

$$\begin{aligned} v(t) &= -E \cos \omega_0 t + E \\ i(t) &= \omega_0 C E \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (6.24)$$

この解の軌道は

$$\{v(t)\}^2 + \left\{ \frac{i(t)}{\omega_0 C} \right\}^2 = E^2 \quad (6.25)$$

の楕円となっている。

6.2.5 ステップ応答曲線

以上の応答をまとめて、電圧波形のグラフを図 6.4 及び図 6.5 示す。これはステップ応答曲線と呼ばれている。これらのグラフでは電圧 $v(t)$ を入力電圧 E で割った正規化 (基準化) した変数を縦軸に選んである。また、自然周波数 $\omega_0 = 1$ として計算した。

応答は、非振動的な過減衰 $\zeta > 1$ から、 $\zeta = 1$ の臨界振動を経て、振動的 $\zeta < 1$ となっていることが分かる。可動コイル型電圧計などの針のふれ振動は、制動部分を調整し

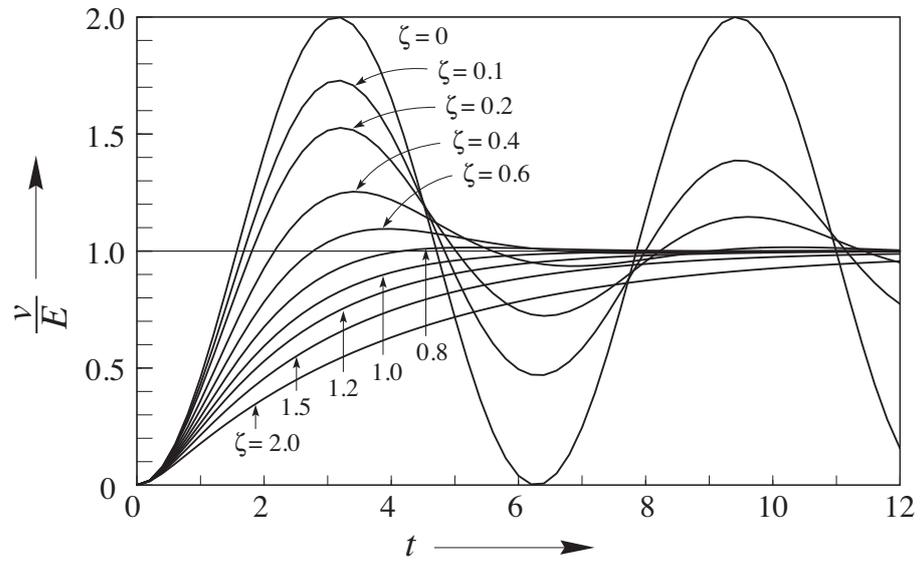


図 6.4 電圧のステップ応答曲線.

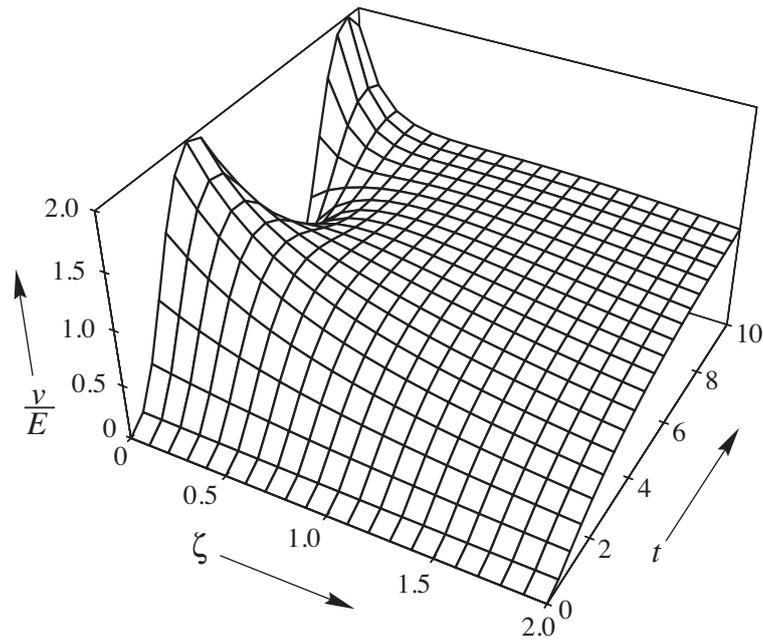


図 6.5 電圧のステップ応答曲線.

て臨界振動となる^{*1}ようにしてあることが多い。これはメータのふれをできるだけ速く平衡位置に移動させ、安定化させたいからである。この考え方は、制御工学においても制御系設計の際の仕様決定に生かされている。

^{*1} 臨界振動の場合を臨界制動 (critical damping) ということもある。これに伴って過振動、振動的な場合をそれぞれ、過制動 (over damping), 不足制動 (under damping) という。

第7章

強制振動 II — 交流定常応答 —

この章では、交流電源を印加した RLC 回路の定常状態、すなわち回路方程式の周期解について考察する。一般に、正弦波入力に対する定常周期応答の解析は、線形システムの主要テーマの一つといっても過言ではない。種々の角度から検討されているので、それらの手法の要点をつかんでおきたい。

7.1 交流電圧源の印加された RLC 回路

この章と次の章では、交流電圧源の印加された図 7.1 の回路を考える。回路方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= i \\ L \frac{di}{dt} &= -v - Ri + E \cos(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (7.1)$$

あるいは、ベクトル方程式に書き直すと

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \cos(\omega t + \theta) \quad (7.2)$$

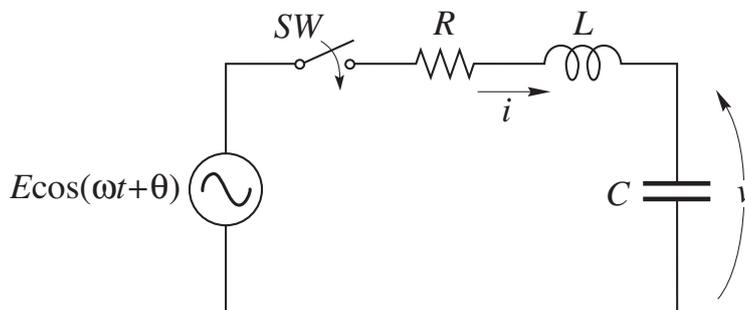


図 7.1 交流電圧源が印加された RLC 直列回路。

となる。ここに

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{E}{L} \end{bmatrix}$$

とおいた。

式 (7.1) の最も大きな特徴は非自律系ということである。したがって、第 4 - 6 章で考察した相平面図の概念は、このままでは使用できない。ただし、重ね合わせの理は成り立つので、周期解すなわち定常解からの差を考えると同次方程式が得られる。定常解に座標変換して過渡現象のみに着目すると、これは第 5 章の議論と本質的に同じとなる。

そこでまず、この章では交流理論 (記号法) の手法により定常周期解を求め、その性質を種々の観点から検討する。

7.2 定常周期解

第 3 章 3.2.2 で考えたように、電源を複素正弦波で置き換えて、とりあえず複素周期解を求めよう。交流理論の原理を復習するつもりで解析を進めよう。

まず、電源を複素正弦波で置き換えた方程式

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= i \\ L \frac{di}{dt} &= -v - Ri + Ee^{j(\omega t + \theta)} \end{aligned} \quad (7.3)$$

を考える。次に、この方程式の周期解を

$$\begin{aligned} v(t) &= Ve^{j(\omega t + \theta)} \\ i(t) &= Ie^{j(\omega t + \theta)} \end{aligned} \quad (7.4)$$

と仮定し、式 (7.3) に代入して整理すると、複素振幅 V, I に関する次式を得る。

$$\begin{aligned} j\omega CV - I &= 0 \\ V + (R + j\omega L)I &= E \end{aligned} \quad (7.5)$$

これより、 V, I は次式となる。

$$\begin{aligned} V &= \frac{E}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} = \frac{E}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} e^{-j\phi} \\ I &= \frac{j\omega CE}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} = \frac{\omega CE}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} e^{j(\frac{\pi}{2} - \phi)} \end{aligned} \quad (7.6)$$

ここに、

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC} \quad (7.7)$$

とおいた。したがって、複素周期解 (7.4) は次式となる。

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{E}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} e^{j(\omega t + \theta - \phi)} \\ i(t) &= \frac{\omega CE}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} e^{j(\omega t + \theta - \phi + \frac{\pi}{2})} \end{aligned} \quad (7.8)$$

最後に、この実数部を取り出して、元の方程式 (7.1) の周期解は次式となる。

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{E}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} \cos(\omega t + \theta - \phi) \\ i(t) &= -\frac{\omega CE}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} \sin(\omega t + \theta - \phi) \end{aligned} \quad (7.9)$$

この解法の特徴をまとめると次のようになる。

1. 回路の複素化：元の交流電源を複素電源に置き換える、すなわち式 (7.1) を式 (7.3) に変換する。
2. 回路の複素直流化：式 (7.4) の複素定常周期解を仮定し、振幅に関する回路方程式 (7.5) を導く。回路方程式 (7.5) には時間関数は含まれず、直流回路方程式となっている。複素抵抗をインピーダンスと言うのであった。式 (7.5) では、第 1 式から V を消去し、 I について解くと、電源からみたこの回路のインピーダンス

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (7.10)$$

が得られる。

3. 解析と逆変換：式 (7.5) を解き、式 (7.4) に代入し、式 (7.8) の実部または虚部^{*1}を取り出し、式 (7.1) の解 (7.9) を求める。

交流理論とは、このようにして交流電源の印加された線形回路の定常周期解を計算する方法、およびインピーダンスの周波数依存性を検討する理論と言えよう。我々電気工学者にとっては、最も基礎となる考え方であるので、むやみに公式のみを覚えるのではなく、公式の背後にある理論の構造や枠組みを理解しておきたい。

7.3 定常周期解の伝達特性

前節で求めた定常解 (7.9) の振幅と位相についてその周波数依存性をみてみよう。この問題は、交流理論と古典線形制御理論において周波数応答あるいは周波数特性を求める問題としてとりあげられている。以下、図 7.2 に示した 2 種類の出力特性を検討する。すなわち、

^{*1} 式 (7.1) の右辺の入力電源が $E \sin(\omega t + \theta)$ の場合は虚数部をとる。

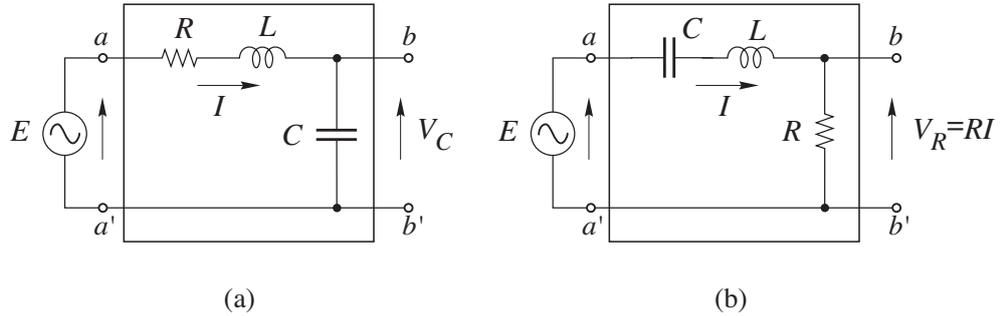


図 7.2 回路を 2 端子対とみたときの伝達特性.

- 交流電源の周波数を変化させた場合に、キャパシタ電圧の振幅と位相はどう変化するか. すなわち、状態 $v(t)$ の定常特性.
- 交流電源の周波数を変化させた場合に、抵抗にかかる電圧の振幅と位相はどう変化するか. すなわち、状態 $i(t)$ の定常特性.
- 交流電源の周波数を変化させた場合に、抵抗で消費される電力はどう変化するか. すなわち、パワーの消費（吸収）特性.

の諸点を考える. これらを検討するには、式 (7.5) で求めた複素直流回路の方程式を解析すれば十分である.

(1) キャパシタ電圧の特性

式 (7.6) の第 1 式からただちに求められる. 入力電圧 E で割って基準化*2すると、次式となる.

$$G_V = \frac{V}{E} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} e^{-j\phi} \quad (7.11)$$

したがって、この量の振幅*3と位相は、それぞれ次式となる.

$$|G_V| = \frac{|V|}{E} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (7.12)$$

$$\arg G_V = -\phi = -\tan^{-1} \frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC} = -\tan^{-1} \frac{1}{Q \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)} \quad (7.13)$$

*2 正規化 (normalized quantity), 基準化 (standardized quantity), 規格化 (standardized quantity?), それに無次元化 (dimensionless quantity) などの用語は、似通った意味を持つ. ここでは、そのときの気分で適当に使用する. すべて同じ意味である. すなわち、ある物理量 Q を基準となる物理量 Q_0 で割って、無次元化した量のことをさす.

*3 入力電圧の振幅に対する利得 (gain) とも呼ばれている.

いま, $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ の規格化された周波数を用いると, 上式は次式となる.

$$|G_V(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2}}} = \frac{Q}{\sqrt{Q^2(1-\Omega^2)^2 + \Omega^2}} \quad (7.14)$$

$$\arg G_V(\Omega) = -\tan^{-1} \frac{1}{Q(\Omega^{-1} - \Omega)} \quad (7.15)$$

ここで Q の定義については, 式 (5.3.7) より次式となっていることを思いだしておこう.

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{\omega_0}{2\zeta} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{Z_0}{R}$$

さて, G_V の Ω 依存性をみることにしよう. 最大値を与える周波数は

$$\frac{d|G_V|}{d\Omega} = 0 \Rightarrow \Omega_V = 1 - \frac{1}{2Q^2} \Rightarrow \omega_V = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (7.16)$$

となる. したがって, この周波数での最大値は次式となる.

$$\max \{|G_V(\Omega)|\} = |G_V(\Omega_V)| = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \quad (7.17)$$

電圧利得の場合は, 最大値を与える周波数が ω_0 よりも低くなることに注意しよう.

(2) 抵抗にかかる電圧の特性

式 (7.6) の第 2 式から次式を得る.

$$G_I = \frac{V_R}{E} = \frac{RI}{E} = \frac{j\omega CR}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} = \frac{\omega CR}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} e^{j(\frac{\pi}{2} - \phi)} \quad (7.18)$$

したがって, 振幅と位相は次式となる.

$$|G_I| = \frac{|RI|}{E} = \frac{R}{|Z|} = \frac{\omega CR}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} = \frac{1}{\sqrt{Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 1}} \quad (7.19)$$

$$\arg G_I = \frac{\pi}{2} - \phi = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{Q \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)} \quad (7.20)$$

規格化された周波数を用いると, 次式となる.

$$|G_I(\Omega)| = \frac{1}{Q \sqrt{(\Omega^{-1} - \Omega)^2 + \frac{1}{Q^2}}} = \frac{\Omega}{\sqrt{Q^2(1 - \Omega^2)^2 + \Omega^2}} \quad (7.21)$$

$$\arg G_I(\Omega) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{Q(\Omega^{-1} - \Omega)} \quad (7.22)$$

電流利得の最大値を与える周波数は

$$\frac{d|G_I|}{d\Omega} = 0 \Rightarrow \Omega_I = 1 \Rightarrow \omega_I = \omega_0 \quad (7.23)$$

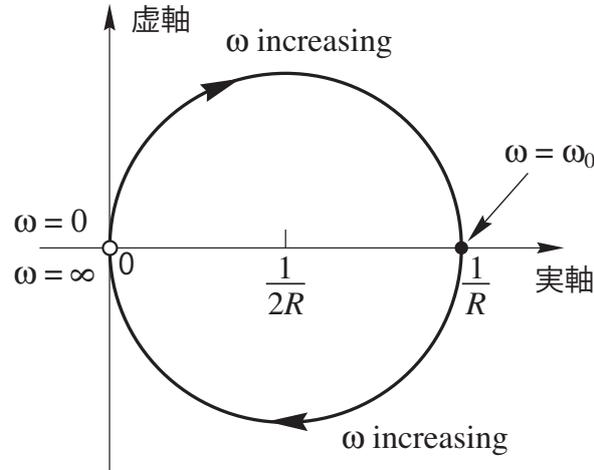


図 7.3 アドミタンス軌跡.

$$\max \{|G_I(\Omega)|\} = |G_I(\Omega_I)| = 1 \quad (7.24)$$

より $\omega = \omega_0$ となる. これはインピーダンスが最小となる周波数である.

式 (7.18) をみると, G_I は入力端子からみたアドミタンス Y に抵抗 R を掛けた量なので, 交流理論を習った我々としては Y の周波数特性をみる方が自然かも知れない.

$$Y = \frac{1}{Z} = x + jy = \frac{1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} - j \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad (7.25)$$

したがって, 実部と虚部はそれぞれ次式となる.

$$\begin{aligned} x &= \frac{R}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \\ y &= -\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \end{aligned} \quad (7.26)$$

そこで, ω を変化させたときの Y の複素平面での軌跡をみるには, この式から ω を消去すればよい.

$$\frac{y}{x} = -\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

の関係を第 1 式に代入して, 軌跡は次の円になる.

$$\left(x - \frac{1}{2R}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2R}\right)^2 \quad (7.27)$$

図 7.3 にこの軌跡を示した. $-\infty < \omega < \omega_0$ の部分が上半円, $\omega_0 < \omega < \infty$ の部分が下半円となることに注意しよう. ちょうど $\omega = \omega_0$ で原点からの距離が最大となり, 最大値は $\frac{1}{R}$ となる. インピーダンスやアドミタンスの軌跡は, 回路の周波数伝達特性を表していると考えれば, 制御工学で扱う伝達関数のナイキスト線図 (Nyquist diagram) (ベク

トル軌跡ともいう)と同じものである。最近は、講義に十分な時間がないことからあまり詳しく説明しなくなったが、簡単なインピーダンスやアドミタンスの軌跡は、複素平面で直線や円になることが多い。このことから電力工学では、今は昔、円線図として親しまれていた。ここで、複素一次有理関数の理論をひもといてみるのも有意義であろう。

(3) 抵抗で消費される電力の特性

最後に、抵抗で消費される電力について考えておこう。瞬時電力は次式となる。

$$p(t) = v_R(t) i(t) = R i^2(t) = \frac{\omega^2 C^2 R E^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2} \cos^2(\omega t + \theta - \phi) \quad (7.28)$$

したがって、一周りにわたる平均供給電力 P は次式となる。

$$\begin{aligned} P &= \overline{p(t)} = \frac{E^2}{2R} \frac{\omega^2 C^2 R^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2} \\ &= \frac{E^2}{2R} \frac{1}{Q^2 (\Omega^{-1} - \Omega)^2 + 1} = \frac{E^2}{2R} \frac{\Omega^2}{Q^2 (1 - \Omega^2)^2 + \Omega^2} \end{aligned} \quad (7.29)$$

この平均電力は、電流利得同様 $\omega = \omega_0$ のとき、最大となりその最大供給電力は

$$P(\omega_0) = \frac{E^2}{2R} \quad (7.30)$$

である。

7.4 線形共振

前節でみた伝達特性を周波数を横軸にしてグラフに描いてみよう。周波数が $\omega = \omega_0$ の近傍で振幅が大きくなり、位相も急変する。この現象を、一般に**共振現象** (resonant phenomenon) という。このことから、振幅が最大となる周波数を**共振周波数** (resonant frequency) という。

(1) キャパシタ電圧の共振曲線

図 7.4 にキャパシタ電圧の共振曲線を示す。位相曲線は、 $\Omega = 1$ で $-\frac{\pi}{2}$ となるが、振幅の最大値はこの点より左にずれる。すなわち、キャパシタ電圧特性では ω_0 より僅かに低い周波数で振幅が最大となっている。しかし、 Q の値が十分大きいと、この「ずれ」は無視できる程度に小さくなる。式 (7.16) 参照。

(2) 抵抗の電圧と消費電力の共振曲線

図 7.5 に抵抗の電圧と、この素子で消費される電力の共振曲線を示す。これらの曲線の共振周波数はいずれも ω_0 である。位相曲線は図 7.4 (b) を $\frac{\pi}{2}$ だけずらせばよい。

(3) 帯域通過フィルタ

共振回路は、入力信号の周波数が回路の共振周波数に近い信号のみ大きな応答を出力する。逆に、共振周波数からはずれた信号はほとんど出力されない。このように、特定の周波数の信号のみを通過させ、他の周波数の信号を通さない回路のことを**フィルタ** (filter) という。 RLC 直列回路は最も簡単なフィルタ回路ということができる。

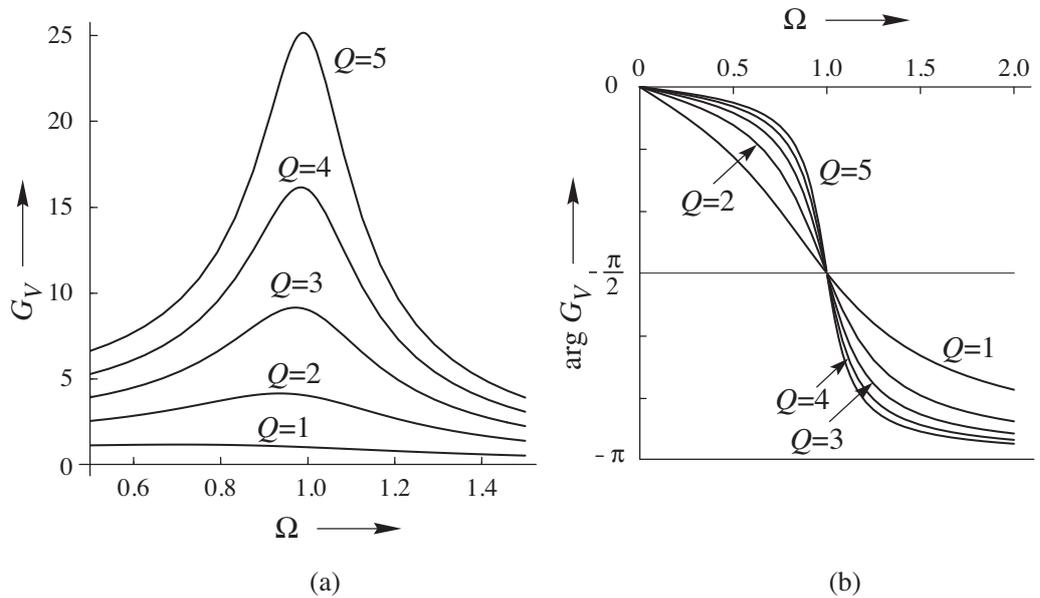


図 7.4 キャパシタ電圧の共振曲線. (a) $|G_V|$ 曲線, (b) 位相特性.

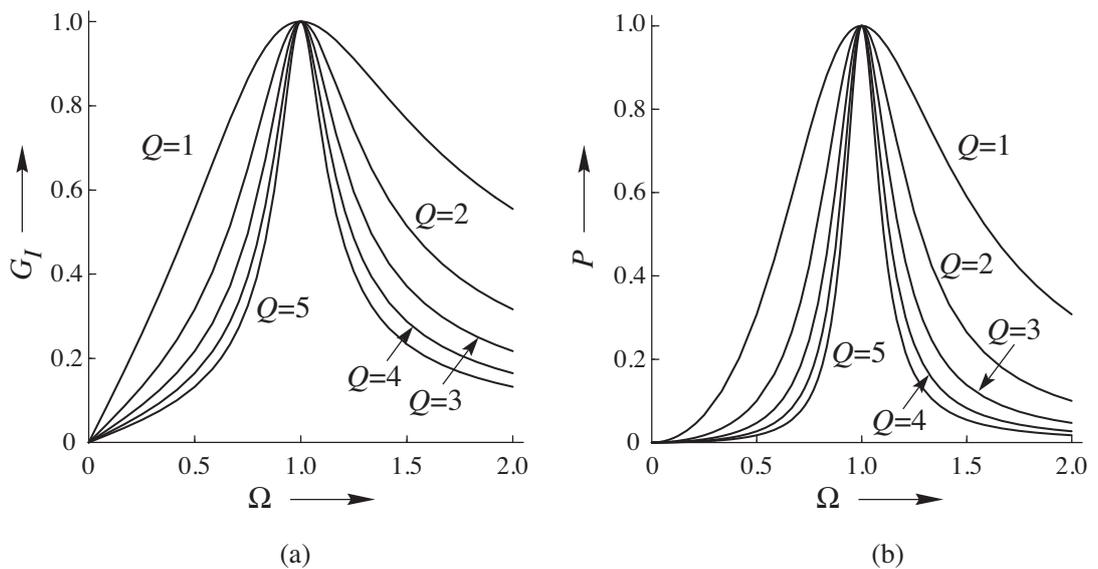


図 7.5 抵抗の電圧と電力の共振曲線. (a) $|G_I|$ 曲線, (b) 電力の曲線.

フィルタとして使用する場合は、勿論どの端子から出力を取り出すかによってその性質が違ってくる。低い周波数のみを通過させるフィルタを低域（通過）フィルタ、ある帯域の周波数のみを通過させるフィルタを帯域通過フィルタ、そして高周波のみを通過させるフィルタを高域（通過）フィルタという。ここでは抵抗の電圧について帯域通過フィルタとしての性質を簡単にみておこう。

規格化した振幅特性 (7.21) が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 以上となる周波数の区間を通過帯域 (passband) と

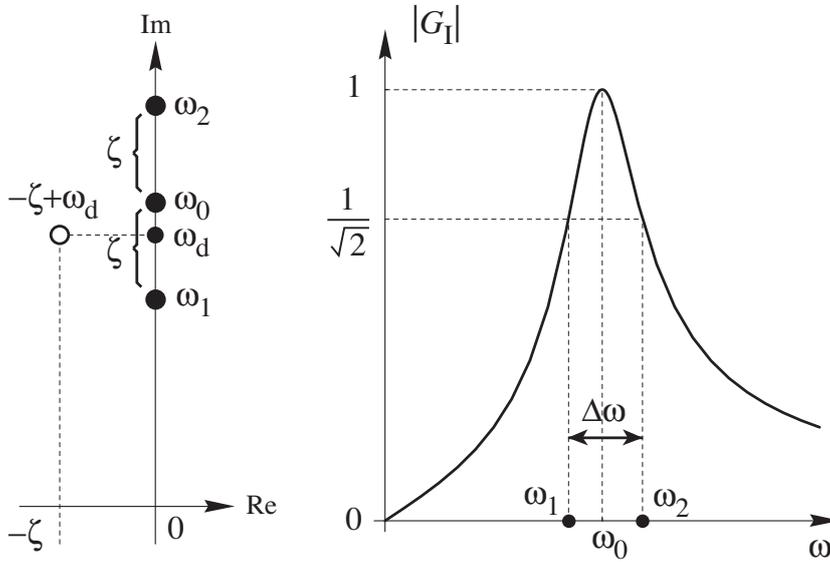


図 7.6 特性根の配置 (a) と帯域幅の関係 (b).

いう。まず、これを計算しよう。

$$|G_I| = \frac{1}{\sqrt{Q^2 (\Omega^{-1} - \Omega)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

より

$$Q^2 (\Omega^{-1} - \Omega)^2 = 1 \Rightarrow \Omega^{-1} - \Omega = \pm \frac{1}{Q}$$

したがって、この最後の Ω に関する 2 次方程式を解いて

$$\Omega = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \pm \frac{1}{2Q} \quad (7.31)$$

$$\omega = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \pm \frac{1}{2Q} \right] \cong \omega_0 \left[1 \pm \frac{1}{2Q} \right] \text{ if } Q \gg 1$$

を得る。 $Q \gg 1$ とすると最後の近似関係式を得る。

$$\omega_1 = \omega_0 \left[1 - \frac{1}{2Q} \right], \quad \omega_2 = \omega_0 \left[1 + \frac{1}{2Q} \right]$$

とおくと、通過帯域幅 $\Delta\omega$ は近似的に

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} = 2\zeta \quad (7.32)$$

と計算できる。このことから、減衰定数 ζ が小さいほど通過帯域幅 $\Delta\omega$ が狭くなり、共振曲線は鋭くなる。これらの関係を特性根、共振周波数とともに図 7.6 に示した。

なお、抵抗の電力特性を用いても同様な議論が可能である。この場合は、利得の値が最大値の $\frac{1}{2}$ となる周波数の区間が帯域幅となり、これは、式 (7.32) と一致する。

また、次にみるように利得は基準値に対する「倍率」であり、通常非常に大きな数から非常に小さな数まで変動幅が大きい。このような量に対しては対数で測るとよい。

- 電圧や電流については $20\log_{10}(\text{Gain})$ で測って、これをデシベル [dB] の単位で呼ぶ。
- 電力については $10\log_{10}(\text{Gain})$ で測って、これもデシベル [dB] の単位で呼ぶ。

この測り方によると、上述の帯域幅の端の値は電圧では

$$20\log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} = -20\log_{10} \sqrt{2} = -10\log_{10} 2 \cong -3.0$$

電力では

$$10\log_{10} \frac{1}{2} = -10\log_{10} 2 \cong -3.0$$

となって、いずれも 3dB だけ利得が減少する周波数であることが分かる。

7.5 周波数応答

伝達特性の振幅を常用対数でとり、位相を通常の方法でとった図をボード線図 (Bode diagram) という。すなわち、利得 G については、 $20\log_{10} G$ を用い単位は [dB] で、また位相は度 [degree] で示した図のことである。図 7.7 と図 7.8 に G_V と G_I のボード線図を示した。この図から G_V の低域通過特性や、 G_I の帯域通過特性をみることができ、どちらの図においても振幅の図*4に示した曲線群は $\Omega \ll 1$ および $\Omega \gg 1$ の部分で定まった直線に漸近する。この性質をうまく使うと、これらの曲線群の近似曲線を簡単に描くことができる。

たとえば、ここで描いたゲイン線図では、次の近似が成り立っている。

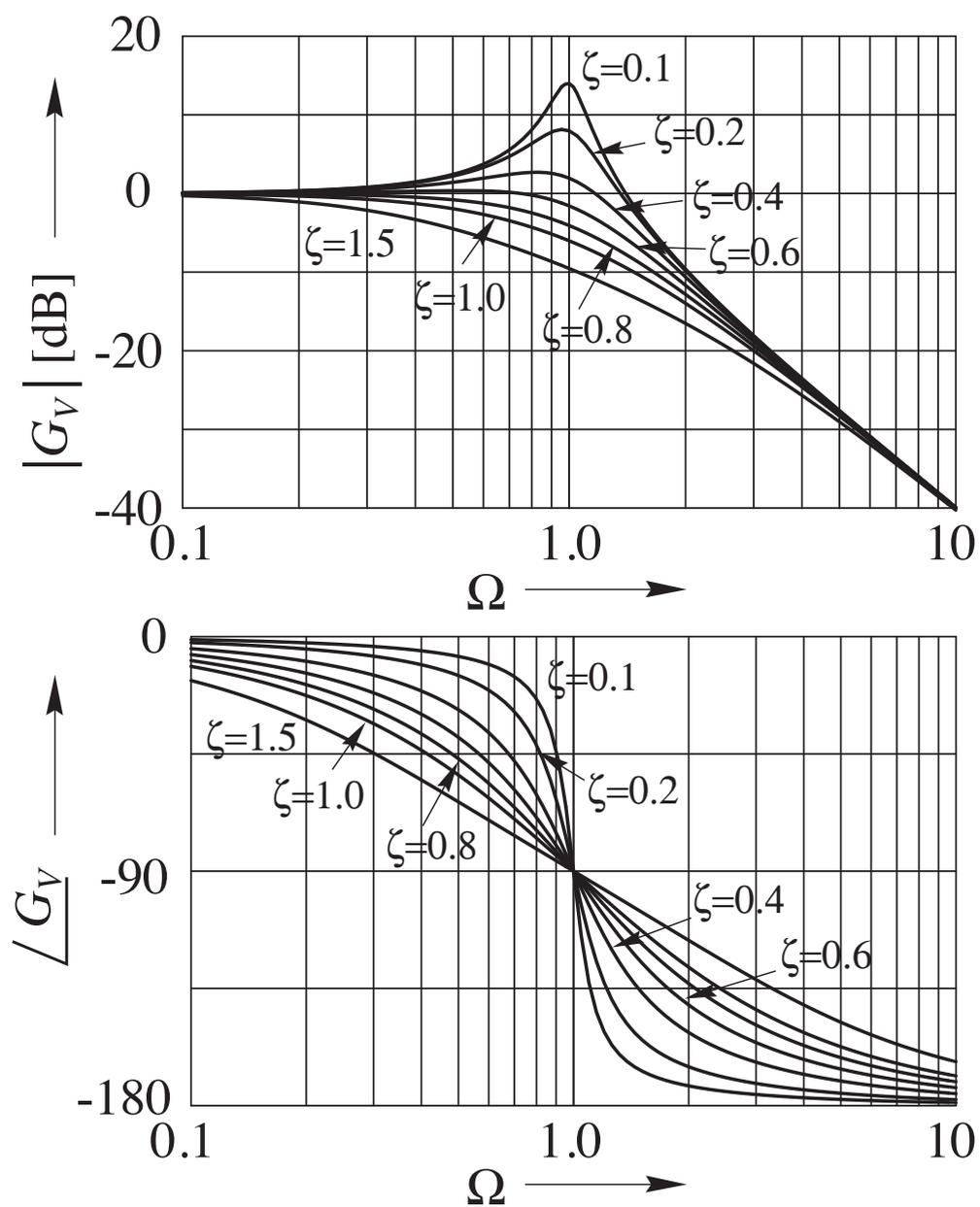
(1) $|G_V|$ の場合

- $\Omega \ll 1$ のとき、 $20\log |G_V| \cong 20\log 1 = 0[\text{dB}]$
- $\Omega \gg 1$ のとき、 $20\log |G_V| \cong -20\log \sqrt{\Omega^4} = -40\log \Omega$

(2) $|G_I|$ の場合

- $\Omega \ll 1$ のとき、 $20\log |G_I| \cong 20\log \left(\frac{2\zeta}{\omega_0} \Omega \right)$
- $\Omega \gg 1$ のとき、 $20\log |G_I| \cong -20\log \left(\frac{\omega_0}{2\zeta} \Omega \right)$

*4 ボード線図は振幅の図と位相の図からできている。振幅の図をゲイン線図、位相の図を位相線図という。

図 7.7 ボード線図, G_V の低域通過特性.

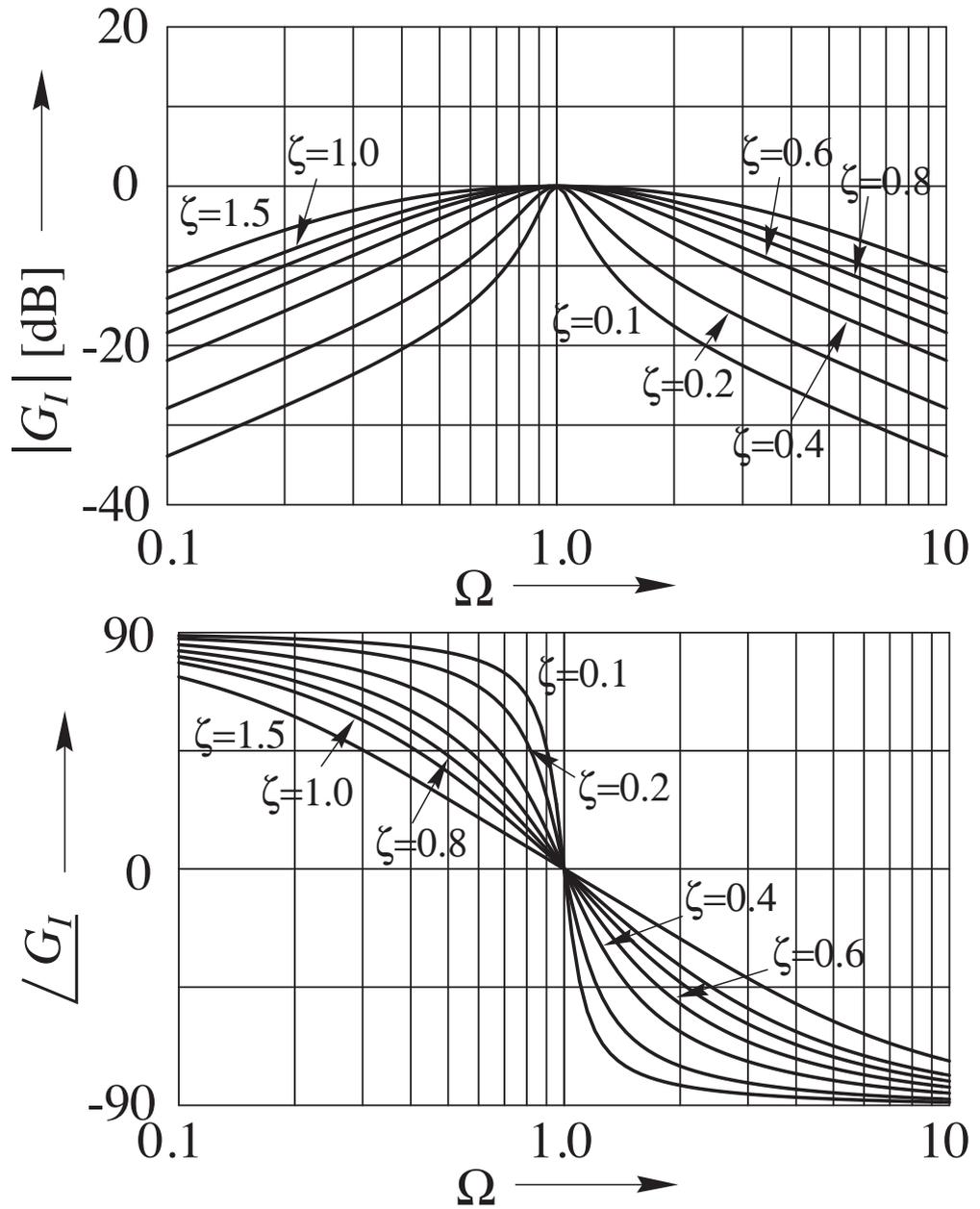


図 7.8 ボード線図, G_I の帯域通過特性.

第 8 章

強制振動 III — 交流過渡応答 —

さて、この章では、交流電源が印加された RLC 回路の過渡状態を解析する。数学的にみると、第 5, 6 章と同様に、自由振動と定常周期振動を重ね合わせ、初期値から任意定数を決定すると所要の解を得る。定常状態が周期振動になっている分、現象が複雑になる。現象を理解するためにどのような工夫をすればよいのか、といった点にも気配りして解析をすすめたい。

8.1 回路の初期値と解析方法

前章 7.1 で取りあげた RLC 直列回路を考える。回路方程式をもう一度書いておくと次式となる。

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= i \\ L \frac{di}{dt} &= -v - Ri + E \cos(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (8.1)$$

ここに、 v はキャパシタにかかる電圧、 i はインダクを流れる電流である。

8.1.1 非自律系の初期値

最初に、初期値の与え方について考えよう。自律系では、時間軸の平行移動に対して方程式は不変なので、時間の基点は問題にならなかった。しかし、正弦波のように時間的に変化する電源の印加された回路では、回路方程式が非自律系となり、何時の時点でスイッチを入れるかによってその後の状態が異なることとなる。したがって、一般性を持たせるためには

- 時刻の基点を電源の位相に合わせ、外力を $E \cos(\omega t)$ と仮定し、スイッチは $t = t_0$ (t_0 は任意) に閉じることにする。
- スイッチを閉じる時刻を時間の基点 $t = 0$ とし、外力に任意位相 θ を含ませ、 $E \cos(\omega t + \theta)$ を考える。

のいずれかを採用すればよい。ここでは、後者を用いて解析をすすめることにする。

$t = 0$ で何らかの方法で次の初期値が与えられたものと仮定しよう。

$$v(0) = v_0, i(0) = i_0 \quad (8.2)$$

これらの初期値は任意に与え得るものとする。つまり、自由に初期状態を与えてこの状態の時間発展を問題とする。

静止した状態 $v_0 = 0, i_0 = 0$ から初期値 (8.2) を与える数学的方法としてインパルスを加える方法がある。例題 2.6 参照。すなわち、

$$\mathbf{u}(t) = \delta(t) \begin{bmatrix} Cv_0 \\ Li_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ E \cos(\omega t + \theta) \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

を加えると初期値 (8.2) を与えたことと等価になる。

現象の観察には、静止した状態 $v_0 = 0, i_0 = 0$ から定常周期解に至る過渡状態をみる場合が典型的といえる。したがってこの章では、適宜、上で考えたいずれかの初期値を用いて解析を進める。

8.1.2 解析方法

解析を進める前に、どのような解析方法があるのか概観しておこう。思いつくままに列挙すれば次のような方法が考えられる。

1. これまでに述べてきた線形代数を用いる普通の解析的方法。
2. 幾何学的方法。系の時間に関する周期性を利用して時間を離散化し、差分方程式を解いて状態の時間発展を調べる方法。
3. 定常周期振動を中心とした回転座標に座標変換し、状態の時間発展をみる方法。
4. 演算子法を用いて解析する方法。

この章では、以下 1. の方法を概要だけ説明し、そのあと 3. の方法を使って Q が大きくかつ共振周波数に近い外力が加わった場合の現象を考える。4. の方法については、第 III 部で概要が述べられる。2. の方法は、

- 離散時間系の解析や非線形回路の解析へ応用できる。
- 相平面図の概念を拡張して幾何学的接近法を可能にする。

などの特徴があり、ぜひ紹介したい一般的方法であるが、かなり道具立てが大きくなるので今回は割愛する。

8.1.3 過渡現象の例

ここで簡単に、典型的な過渡現象の例をみておこう。図 8.1 は、静止状態から定常周期解へ漸近する波形の例である。太い実線が定常状態の波形を、細い実線が静止状態から定

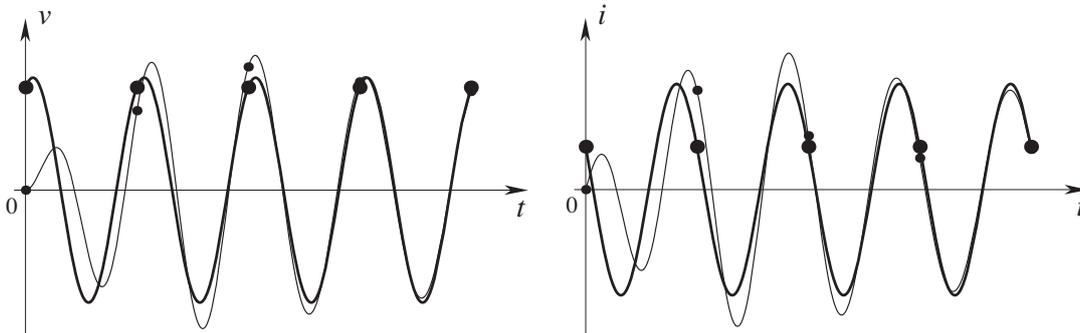


図 8.1 静止状態から定常周期解へ漸近する波形の例.

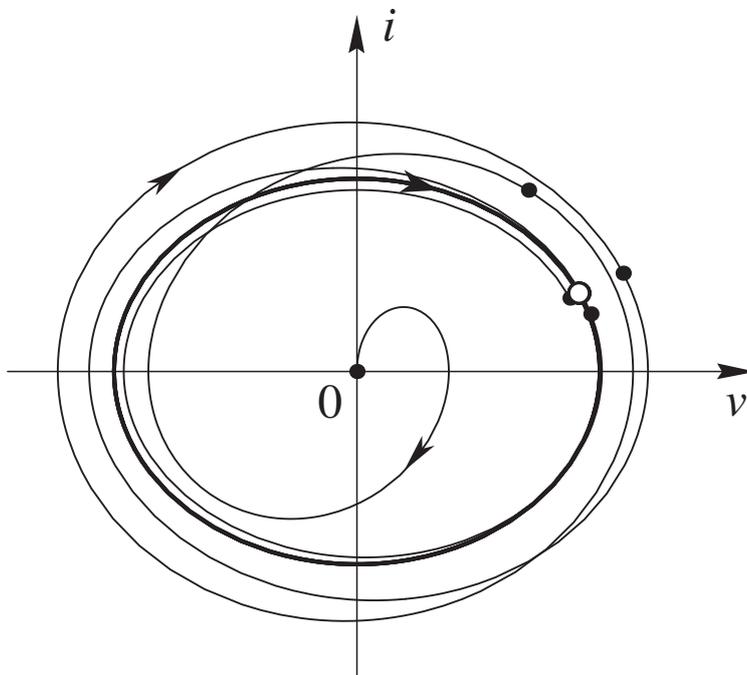


図 8.2 静止状態から定常周期解へ漸近する軌道の例.

常周期解へ漸近する過渡波形を表している。この系の自由振動は振動的に選んである。また電源周波数は、回路の自然周波数より低い場合なので、定常周期解の電流は電源の位相より進んでいる。図中に示した黒丸は、電源 $E \cos \omega t$ ^{*1} が最大となる瞬間、すなわち時刻 $\frac{2n\pi}{\omega}$ $n = 1, 2, \dots$ を表している。

波形情報からは、定常状態に漸近する様子しか得られないので、相平面に解軌道を描いてみよう。図 8.2 がこれである。太線が定常周期軌道、この軌道上に付した白抜きの点が周期解の初期値となる初期状態を表している。原点から出る細線が静止状態から、定常周期軌道に漸近する過渡状態を表している。非自律系なので軌道は交差してもおかしくな

^{*1} 簡単のため、式 (8.1) で電源の位相角 θ は零とした。

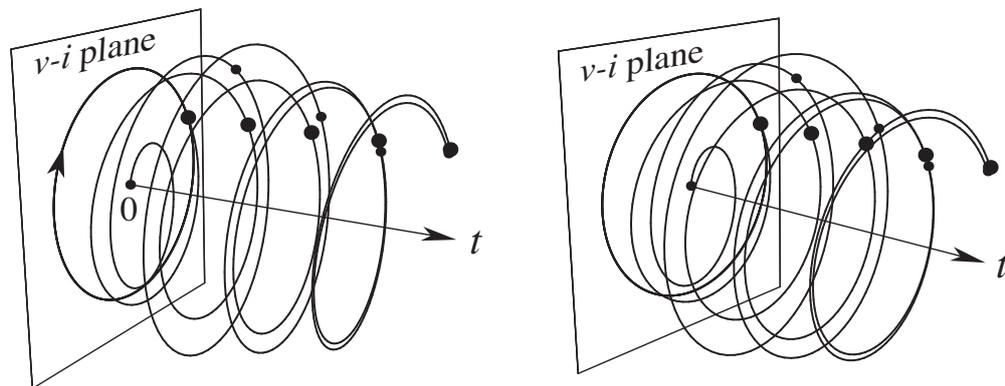


図 8.3 静止状態から定常周期解へ漸近する軌道の 3 次元表示.

い. 過渡状態は原点から一旦定常周期軌道より外に出て, 以後内外と振動しながら定常状態の周期軌道に漸近してゆく. この様子をもう少し見やすくするために, 時間軸を入れた 3 次元表示でみてみよう. 図 8.3 は水平方向に時間軸をとって, これまでにみた軌道を描いた図である. 両眼をうまく使えば立体視できる.

さて, この例からも分かるように定常状態が周期的に変化するので過渡現象を定性的に把握するのはかなり難しい. 実は, 図に示した黒丸点列の挙動, すなわち点列の運動, が周期外力の印加された系全般の解析に重要な役割を果たすことになる. 外力の周期にあわせてフラッシュを焚いて, 光った瞬間のデータのみに着目するというのが黒丸の点列の意味である. この手法はストロボ写像の方法と呼ばれ, 線形非線形を問わず力学系の解析に威力を発揮する*2. 前節の 2. の方法である. ここでは, 以下もう少し簡便な方法で現象を観察することにしたい.

8.2 状態の解析

簡単のため回路は静止した状態にあり, $t = 0$ でスイッチが閉じられたと仮定しよう. この時の状態を計算する. 第 6 章 6.2 と同様に計算すればよい.

8.2.1 特性根が相異なる負の 2 実根の場合

一般解は次式となる.

$$\mathbf{x}(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{h}_1 + K_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{h}_2 + \mathbf{x}^*(t) \quad (8.4)$$

*2 一例を挙げると, 定常周期軌道に付られた点は, 相平面上で静止した点として観察される. この点はストロボを焚いてみるとあたかも「平衡点」のようにみえることになる.

ここで $\mathbf{x}^*(t)$ は、前章 7.2 で計算した定常周期解 (7.2.7) である。すなわち、

$$\mathbf{x}^*(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} \cos(\omega t + \theta - \phi) \\ -\frac{\omega CE}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} \sin(\omega t + \theta - \phi) \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

ここに、

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC} \quad (8.6)$$

である。

さてそこで、初期値 $v(0) = 0, i(0) = 0$ を満足する解を求めることにしよう。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = K_1 \mathbf{h}_1 + K_2 \mathbf{h}_2 + \mathbf{x}^*(0) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 C & \lambda_2 C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} \cos(\theta - \phi) \\ -\frac{\omega CE}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} \sin(\theta - \phi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.7)$$

この連立方程式を解いて K_1, K_2 は次式となる。

$$K_1 = -\frac{\lambda_2 A + B}{(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad K_2 = \frac{\lambda_1 A + B}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (8.8)$$

ここで

$$A = \frac{E}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} \cos(\theta - \phi), \quad B = \frac{\omega E}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} \sin(\theta - \phi) \quad (8.9)$$

とおいた。そこで、この初期値を満足する解は次式となる。

$$\mathbf{x}(t) = -\frac{\lambda_2 A + B}{(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{\lambda_1 t} \mathbf{h}_1 + \frac{\lambda_1 A + B}{(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{\lambda_2 t} \mathbf{h}_2 + \mathbf{x}^*(t) \quad (8.10)$$

8.2.2 特性根が特性根が重根の場合

前章の 5.5.2 式 (5.5.6) を参照して、一般解は次式となる。

$$\mathbf{x}(t) = K_1 e^{\lambda t} \mathbf{h}_1 + K_2 e^{\lambda t} (t \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) + \mathbf{x}^*(t) \quad (8.11)$$

したがって、初期値 $v(0) = 0, i(0) = 0$ を満足する解は

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = K_1 \mathbf{h}_1 + K_2 \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\zeta C & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} \cos(\theta - \phi) \\ -\frac{\omega CE}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} \sin(\theta - \phi) \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

より

$$K_1 = -A, K_2 = -\zeta A + B \quad (8.13)$$

と求められる。したがって、初期値を満足する解は

$$\mathbf{x}(t) = -Ae^{-\zeta t} \mathbf{h}_1 + (-\zeta A + B)e^{-\zeta t} (t\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) \quad (8.14)$$

となる。

8.2.3 特性根が共役複素根の場合

前章の 5.5.3 式 (5.5.10) を参照して、一般解は次式となる。

$$\mathbf{x}(t) = (K_1 \cos \omega_d t + K_2 \sin \omega_d t) e^{-\zeta t} \mathbf{h}_1 + (-K_1 \sin \omega_d t + K_2 \cos \omega_d t) e^{-\zeta t} \mathbf{h}_2 + \mathbf{x}^*(t) \quad (8.15)$$

したがって、初期値を満足する解は

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = K_1 \mathbf{h}_1 + K_2 \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\zeta C & \omega_d C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} \cos(\theta - \phi) \\ -\frac{\omega CE}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} \sin(\theta - \phi) \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

より

$$K_1 = -A, K_2 = \frac{1}{\omega_d} (-\zeta A + B) \quad (8.17)$$

と求められる。これより求める解は

$$\mathbf{x}(t) = -Ae^{-\zeta t} (\cos \omega_d t \mathbf{h}_1 - \sin \omega_d t \mathbf{h}_2) + \frac{1}{\omega_d} (-\zeta A + B) e^{-\zeta t} (\sin \omega_d t \mathbf{h}_1 + \cos \omega_d t \mathbf{h}_2) + \mathbf{x}^*(t) \quad (8.18)$$

となる。

8.2.4 特性根が純虚根の場合

この場合は式 (8.18) において $\zeta = 0$ とおいて、次の正弦波解を得る。

$$\mathbf{x}(t) = (K_1 \cos \omega_0 t + K_2 \sin \omega_0 t) \mathbf{h}_1 + (-K_1 \sin \omega_0 t + K_2 \cos \omega_0 t) \mathbf{h}_2 + \mathbf{x}^* \quad (8.19)$$

初期値より, $K_1 = -A, K_2 = \frac{B}{\omega_0}$ となるので

$$\mathbf{x}(t) = \left(-A \cos \omega_0 t + \frac{B}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \mathbf{h}_1 + \left(A \sin \omega_0 t + \frac{B}{\omega_0} \cos \omega_0 t \right) \mathbf{h}_2 + \mathbf{x}^*(t) \quad (8.20)$$

となる.

8.3 回路方程式の正規化

前節において解析解が得られたので, これで一応は解けたことになる. しかし, 実際どんな過渡現象がみられるのかほとんど見通しがきかない. たとえば, 系が振動的になる場合や共振周波数近傍でどのような過渡現象がみられるのか, このままでは凡人には何も見えてこない.

そこで, 回路方程式をもう一度整理し, 何を問題とすべきかも含めて最初から考え直してみよう. そのためまず, 系のパラメータができるだけ少なくなるように方程式を正規化してみよう.

8.3.1 正規化された回路とその方程式

変数変換

$$x = \sqrt{C}v, y = \sqrt{L}i, \tau = \frac{1}{\sqrt{LC}}t = \omega_0 t \quad (8.21)$$

を考える. これを式 (8.1.1) に代入して整理すると次式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= y \\ \frac{dy}{d\tau} &= -x - ky + B \cos(\Omega\tau + \theta) \end{aligned} \quad (8.22)$$

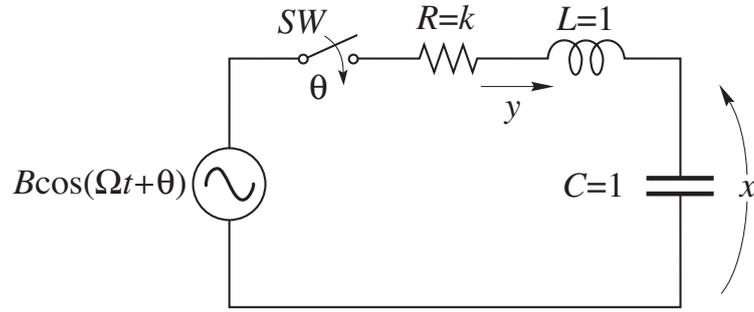
ここに,

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, B = \sqrt{C}E, k = \frac{1}{Q}$$

とおいた. この正規化によって

- 入力のない回路のパラメータは k のみとなった. これは, 抵抗に対応した減衰定数を与える. ω_0 は Ω に繰り入れられて式 (8.22) からは姿を消し, この式の自然周波数は 1 に正規化された.
- 入力には 3 つのパラメータ B, Ω, θ が含まれている. B は振幅で, Ω は周波数である. $\Omega = 1$ で正規化する前の条件 $\omega = \omega_0$ を満たす. したがって $\Omega \cong 1$ が共振周波数を与える. また, θ は位相角で, これはスイッチを投入する時刻と関係する^{*3}.

^{*3} $t = 0$ でスイッチを投入するので, この時刻における電源の位相角を与えるパラメータである.

図 8.4 正規化された RLC 直列回路.

ことが分かる. なお, この章ではこれ以後ことわりがなければ, 正規化された方程式 (8.22) を回路方程式と呼び, この式を解析する. したがって, 時刻 τ を改めて t と書き直し, 以後 τ の代わりに t を用いる. 回路図 8.4 参照.

この正規化に伴って, 定常周期解 (8.5) も次式のように正規化される.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{C}v(t) = \frac{B}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + k^2\Omega^2}} \cos(\Omega t + \theta - \phi) \\ &= \frac{(1-\Omega^2)B}{(1-\Omega^2)^2 + k^2\Omega^2} \cos(\Omega t + \theta) + \frac{k\Omega B}{(1-\Omega^2)^2 + k^2\Omega^2} \sin(\Omega t + \theta) \end{aligned} \quad (8.23)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \sqrt{L}i(t) = -\frac{\Omega B}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + k^2\Omega^2}} \sin(\Omega t + \theta - \phi) \\ &= -\frac{(1-\Omega^2)\Omega B}{(1-\Omega^2)^2 + k^2\Omega^2} \sin(\Omega t + \theta) + \frac{k\Omega^2 B}{(1-\Omega^2)^2 + k^2\Omega^2} \cos(\Omega t + \theta) \end{aligned} \quad (8.24)$$

【注意 1】正規化された回路 8.4 の複素インピーダンス Z は

$$Z = k + j\Omega + \frac{1}{j\Omega} = k + j(\Omega - \Omega^{-1})$$

である. また, 電圧 $x(t)$ および電流 $y(t)$ に対応した複素電圧と電流をそれぞれ X と Y とすれば*4, これらは次式となる.

$$\begin{aligned} Y &= \frac{B}{Z} = \frac{B}{k + j(\Omega - \Omega^{-1})} = \frac{B}{\sqrt{k^2 + (\Omega - \Omega^{-1})^2}} e^{-j\varphi} \\ X &= \frac{Y}{j\Omega} = \frac{B}{\Omega \sqrt{k^2 + (\Omega - \Omega^{-1})^2}} e^{-j(\varphi + \frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

ここでの位相角は

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\Omega - \Omega^{-1}}{k}$$

*4 ここで使った Y はアドミタンスではなく, 電流 $y(t)$ の複素電流を表す.

とおいた。

【注意 2】これまで使ってきた位相角 ϕ は

$$\phi = \tan^{-1} \frac{k\Omega}{1 - \Omega^2}$$

と定義していた。したがって、両者の関係は

$$\begin{aligned} \varphi &= -\tan^{-1} \frac{1 - \Omega^2}{k\Omega} = -\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \phi - \frac{\pi}{2} \\ \phi &= \varphi + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

となっている。インピーダンスを基準に考える場合は φ を、アドミタンスを基準に考える場合は ϕ を使うのが便利であろう。なお、位相角は周波数 Ω の大きさによって、次のようになる。

- $\Omega > 1$ のとき、 $\varphi > 0$ となり、電流 $y(t)$ は電源の位相より遅れる。すなわち、回路は誘導的となる。
- $\Omega < 1$ のとき、 $\varphi < 0$ となり、電流 $y(t)$ は電源の位相より進む。すなわち、回路は容量的となる。

8.3.2 周期軌道とその初期値

回路方程式 (8.22) の定常周期解は、式 (8.23), (8.24) で与えられる。したがって、この解は相平面の上に射影すると次の楕円となる。

$$\frac{x^2(t)}{\frac{B^2}{(1-\Omega^2)^2+k^2\Omega^2}} + \frac{y^2(t)}{\frac{\Omega^2 B^2}{(1-\Omega^2)^2+k^2\Omega^2}} = 1 \quad (8.25)$$

時刻 $t = 0$ における初期値は、この楕円上の点

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{(1 - \Omega^2) B}{(1 - \Omega^2)^2 + k^2 \Omega^2} \cos \theta + \frac{k \Omega B}{(1 - \Omega^2)^2 + k^2 \Omega^2} \sin \theta \\ y(0) &= -\frac{(1 - \Omega^2) \Omega B}{(1 - \Omega^2)^2 + k^2 \Omega^2} \sin \theta + \frac{k \Omega^2 B}{(1 - \Omega^2)^2 + k^2 \Omega^2} \cos \theta \end{aligned} \quad (8.26)$$

となる。このことから、電源の位相角 θ を変化させると、初期値の集合もまた、同じ楕円の上を一周する。周期軌道は

- $\Omega < 1$ のとき、 x 軸方向に長い扁平な楕円に、
- $\Omega > 1$ のとき、 y 軸方向に長い縦長な楕円に、
- $\Omega = 1$ のとき、共振となり円に

なる。図 8.5 参照。

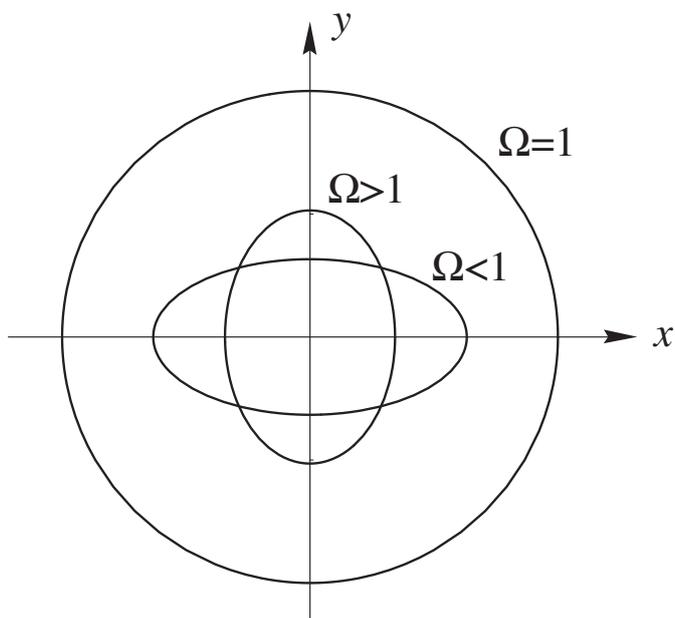


図 8.5 周期軌道，これはまた電源の位相角を変えたときの初期値の軌跡でもある。

8.3.3 パラメータ平面 $\Omega - k$

以上のことを考え合わせると，方程式 (8.22) の解の様子を調べるには，パラメータ Ω と k を変化させた場合に生じる現象を検討すれば十分であることが分かる．この意味でパラメータ Ω と k は RLC 直列回路の解析にとって本質的なパラメータと言える．すなわち

- k を変化させることで，回路の自由振動を制御できる．
- Ω を変化させることで，共振状態を含む定常周期解を制御できる．
- 振幅 B は本質的なパラメータではない．一般性を失うことなく必要に応じて適当な値に固定してよい．方程式 (8.22) をみよ．
- 位相角 θ も本質的ではない．時間の並行移動に対応して初期値を移動させるとよい．

と言える．

8.4 静止状態からの過渡現象

過渡現象として，複雑となり興味があるのは，自由振動が振動的な場合である．すなわち，回路の抵抗が小さくて回路の過渡応答が振動しながら減衰する場合である．このとき，電源の周波数による強制振動（定常周期振動）と過渡状態の減衰振動が重なり合っ

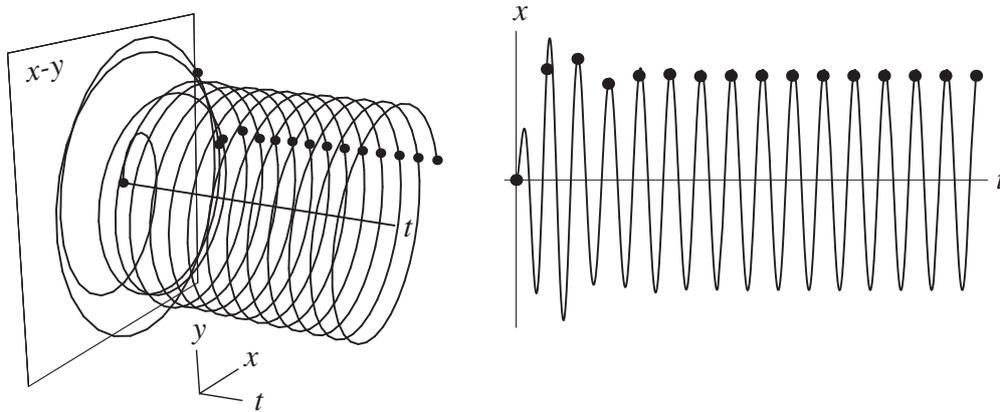


図 8.6 減衰定数が大きくかつ共振から離れた場合： $k = 0.2, \Omega = 0.75$.

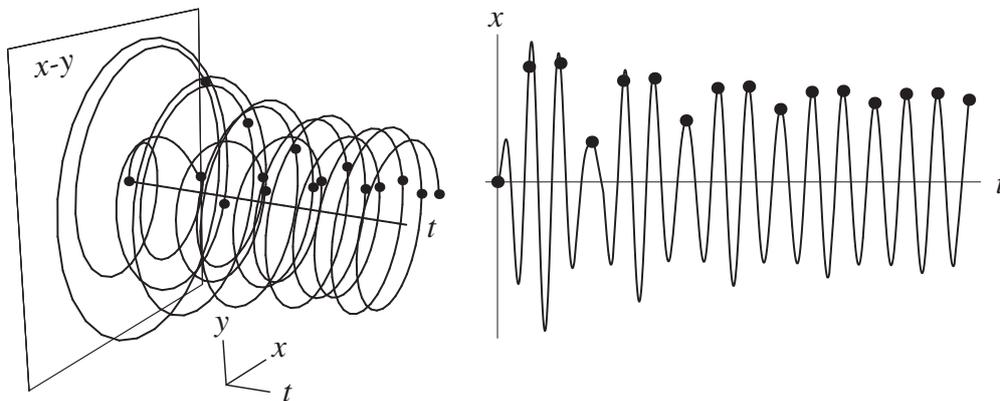


図 8.7 減衰定数が小さくかつ共振から離れた場合： $k = 0.05, \Omega = 0.75$.

「うなり減衰振動」が生じる。まずは、この現象をみることから始めよう。

8.4.1 共振から離れた過渡現象

(1) 減衰定数が大きくかつ共振から離れた場合： $k = 0.2, \Omega = 0.75$

図 8.6 に軌道の時間的な発展の様子（左図）とキャパシタ電圧 $x(t)$ の波形を示した。図中に示した黒丸は、電源 $E \cos \omega t$ が最大となる瞬間、すなわち時刻 $\frac{2n\pi}{\omega}$ $n = 1, 2, \dots$ を表している。減衰定数が大きいので過渡現象は、数回の黒丸時刻後には消失し定常周期解に落ち着く。

(2) 減衰定数が小さくかつ共振から離れた場合： $k = 0.05, \Omega = 0.75$

図 8.7 に軌道の時間的な発展の様子（左図）とキャパシタ電圧 $x(t)$ の波形を示した。減衰定数を小さくしたので過渡現象は、長時間にわたって落ち着かず黒点列の動きも幅が広がっている。

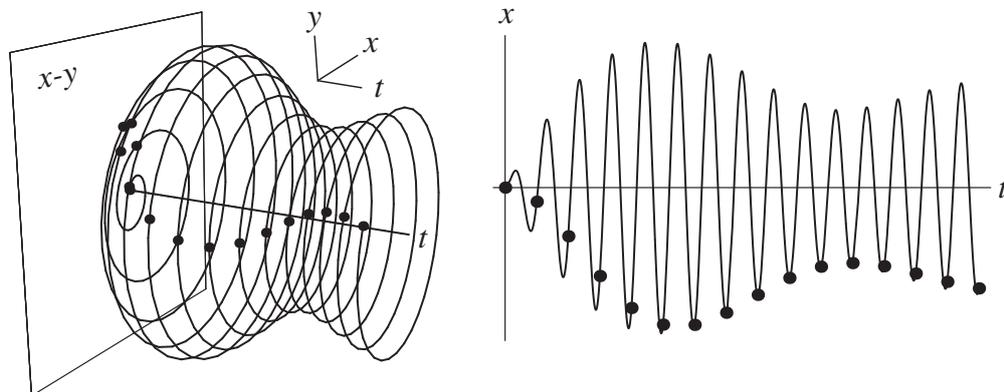


図 8.8 減衰定数が小さくかつ共振に近い場合： $k = 0.05, \Omega = 1.1$.

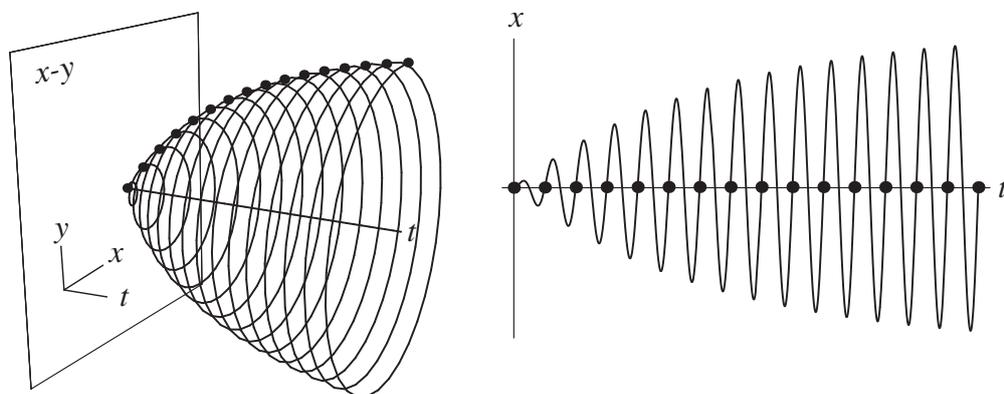


図 8.9 減衰定数が小さくかつ共振点の場合： $k = 0.05, \Omega = 1.0$.

8.4.2 共振に近い過渡現象

図 8.8 に軌道の時間的な発展の様子（左図）とキャパシタ電圧 $x(t)$ の波形を示した。 Ω の値を共振点の近くを選ぶと、振動の包絡線がはっきりしてくる。点列の動きもに包絡面を螺旋状にうねりながら落ち着いてゆく。

8.4.3 共振時の過渡現象

図 8.9 に軌道の時間的な発展の様子（左図）とキャパシタ電圧 $x(t)$ の波形を示した。 Ω の値を共振点に選ぶと、振動の包絡線は指数関数的に増大する。点列の動きは一定位相（ y 軸上）で最初から落ち着いている。

8.4.4 減衰のない過渡現象

(1) 共振に近い場合： $k = 0.0, \Omega = 1.1$

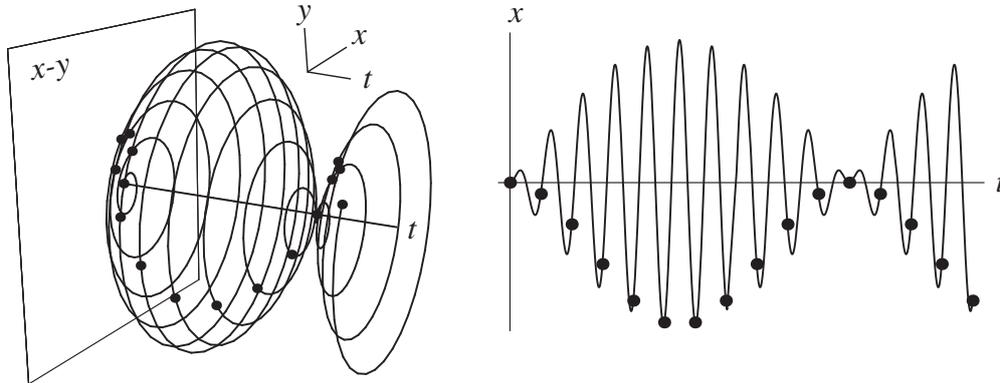
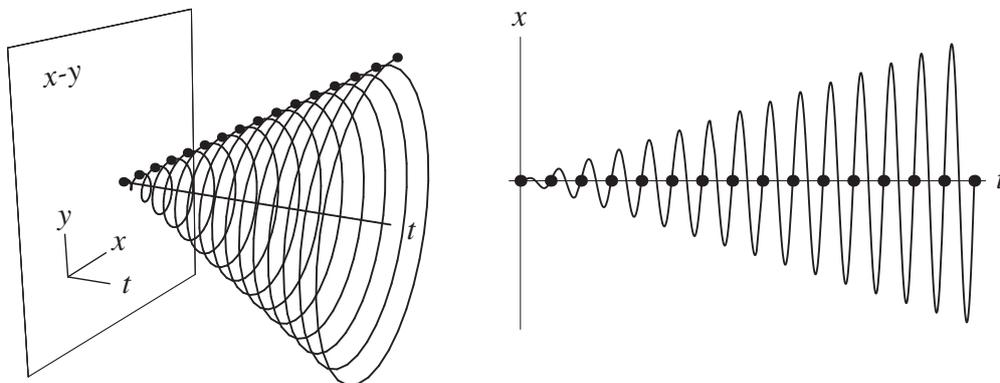
図 8.10 減衰が無かつ共振に近い場合： $k = 0.0, \Omega = 1.1$.図 8.11 減衰が無かつ共振点の場合： $k = 0.0, \Omega = 1.0$.

図 8.10 に軌道の時間的な発展の様子 (左図) とキャパシタ電圧 $x(t)$ の波形を示した。振動の包絡線は正弦波状に変化し、綺麗な節ができる。波形はうなり振動 (beat oscillation)^{*5} となり周期を持たなくなる。

(2) 共振点の場合： $k = 0.0, \Omega = 1.0$

図 8.11 に軌道の時間的な発展の様子 (左図) とキャパシタ電圧 $x(t)$ の波形を示した。振動の包絡線は直線状に変化し、無限に大きくなる。共振現象が起こり波形の振幅は無限に増大する。したがって、周期を持たなくなる。実際、方程式は

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + B \cos t$$

となり、静止状態を初期値とする解は次式となるからである。

$$x(t) = \frac{B}{2} t \sin t, \quad y(t) = \frac{B}{2} (\sin t + t \cos t)$$

^{*5} うなり振動とは $E_1 \sin \omega_1 t + E_2 \sin \omega_2 t$ のように 2 つ以上の異なる周波数の正弦波の和となった振動のことである。ただし、 $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ は無理数と仮定する。特に $\omega_1 - \omega_2$ が小さくなると図 8.10 の波形のように包絡線が正弦波状に変化するようになる。

このように、時刻 t が陽に三角関数の振幅の項に出てくる。これを振動論では永年項 (secular term) という。

8.5 うなり減衰振動の解析

前節でみた現象、すなわち減衰定数が小さい場合にみられるうなり減衰振動を解析したい。前にも触れたようにこの現象を解析するにはストロボ写像を用いる必要がある。問題を共振に近い場合に限ると、次のような近似的な解析方法が考えられる。これを紹介しよう。なお、解析は包絡線の動きそのものでなく、これまでに示した波形や軌道に付した点列の動きをとらえる手法である。点列が txy 空間の軌道包絡面に乗っていることから、点列の運動を追跡することで現象を追うことができることに注意しよう。波形は、この包絡面の x 軸あるいは y 軸への射影にすぎない。

さて、次の仮定をおく。

1. 周波数は共振に近い。すなわち、 $1 - \Omega^2$ は十分小さい。
2. 外力の振幅 B は十分小さい。 B は任意に選んでよかつたことに注意しよう。
3. 減衰定数は小さい。すなわち、 k は十分小さい。

8.5.1 定常周期解への座標変換と平均化

定常周期解 (8.23) および式 (8.24) に注目しよう。この周期解に乗って回転する座標系を考え、その上で現象を観察してみよう。このため、つぎの座標変換を考える。

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) \cos(\Omega t + \theta) + v(t) \sin(\Omega t + \theta) \\ y(t) &= -\Omega u(t) \sin(\Omega t + \theta) + \Omega v(t) \cos(\Omega t + \theta) \end{aligned} \quad (8.27)$$

ここで、定常周期解 (8.23) および式 (8.24) では定数となっていた係数を時間の関数とおいた点に注目してほしい。一種の定数変化法といえる。式 (8.27) を回路方程式 (8.22) に代入し次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} \cos(\Omega t + \theta) + \frac{dv(t)}{dt} \sin(\Omega t + \theta) &= 0 \\ -\Omega \frac{du(t)}{dt} \sin(\Omega t + \theta) + \Omega \frac{dv(t)}{dt} \cos(\Omega t + \theta) &= F(u, v, t) \end{aligned} \quad (8.28)$$

ここに、

$$\begin{aligned} F(u, v, t) &= \{k\Omega u(t) - (1 - \Omega^2)v(t)\} \sin(\Omega t + \theta) \\ &+ \{-(1 - \Omega^2)u(t) - k\Omega v(t) + B\} \cos(\Omega t + \theta) \end{aligned} \quad (8.29)$$

とおいた。これを解いて次式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= -\frac{1}{\Omega}F(u, v, t) \sin(\Omega t + \theta) \\ \frac{dv(t)}{dt} &= \frac{1}{\Omega}F(u, v, t) \cos(\Omega t + \theta)\end{aligned}\quad (8.30)$$

いま、式 (8.29) をよくみると、右辺の三角関数の係数は、 u, v の一次式であり、その係数および定数項は、上述の仮定によって、すべて十分に小さい数となっている。したがって、式 (8.30) の右辺は十分に小さいことが分かる。言い換えると、 u, v の速度は小さく、 u, v はゆっくりと変化する。

以上のことから、座標変換 (8.27) によって、 u, v は、 $\sin(\Omega t + \theta), \cos(\Omega t + \theta)$ の動きに比して、ゆっくりと動くことが分かった。そこで、 u, v の運動方程式 (8.30) を、 $\sin(\Omega t + \theta), \cos(\Omega t + \theta)$ の一周期にわたる平均値で近似する。このようにしても現象は十分説明できるであろう。そこで、式 (8.30) の右辺を平均値

$$-\frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \frac{1}{\Omega} F(u, v, t) \sin(\Omega t + \theta) dt, \quad \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \frac{1}{\Omega} F(u, v, t) \cos(\Omega t + \theta) dt$$

で置き換えた運動方程式は、次式となる。

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= \frac{1}{2\Omega} \{-k\Omega u(t) + (1 - \Omega^2)v(t)\} \\ \frac{dv(t)}{dt} &= \frac{1}{2\Omega} \{-(1 - \Omega^2)u(t) - k\Omega v(t) + B\}\end{aligned}\quad (8.31)$$

これを、平均化方程式という。また、このような手法は平均化法 (averaging method) と呼ばれている。座標変換 (8.27) と一緒にこの方程式をみると、これは包絡面の運動をとらえる運動方程式であることが分かる。

8.5.2 平均化方程式の平衡点

平均化方程式 (8.31) は自律系である。したがって、これまでの解析方法、特に相平面での幾何学的解析法、が適用できる。平衡点は次式を解いて求められる。

$$\begin{aligned}-k\Omega u^* + (1 - \Omega^2)v^* &= 0 \\ -(1 - \Omega^2)u^* - k\Omega v^* + B &= 0\end{aligned}\quad (8.32)$$

したがって、次の平衡点を得る。

$$u^* = \frac{(1 - \Omega^2)B}{(1 - \Omega^2)^2 + k^2\Omega^2}, \quad v^* = \frac{k\Omega B}{(1 - \Omega^2)^2 + k^2\Omega^2}\quad (8.33)$$

これを式 (8.27) に代入すると、定常周期解 (8.23) および式 (8.24) に一致する。これは当然のことであろう。

なお、この平衡点の電源位相角 θ への依存性も、小節 8.3.2 の議論と一致する。

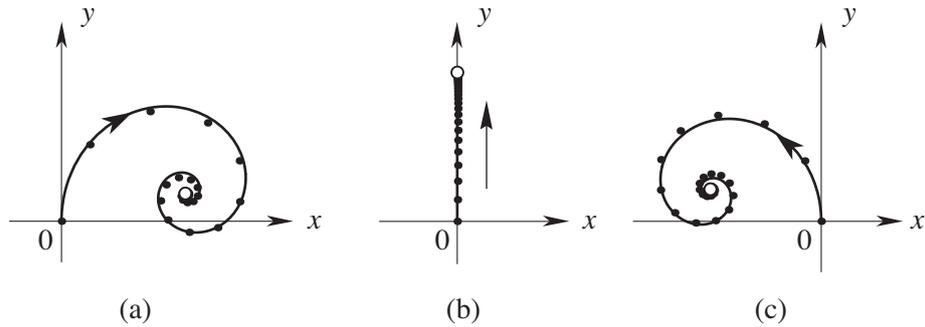


図 8.12 $k = 0.05$ の場合の相平面図. (a) $\Omega = 0.9$, (b) $\Omega = 1.0$, (c) $\Omega = 1.1$.

8.5.3 平均化方程式の解析

平均化方程式の初期値を原点に選んだ解軌道は、前節でみた静止状態からの過渡現象に対応している。これを調べよう。この問題は、方程式こそ異なるものの第 6 章でみたステップ応答と同じ問題となっていることにも注意してほしい。第 1 章 1.2 を参照して、式 (8.31) の初期値 $u(0) = 0, v(0) = 0$ より出る解は次式となる。

$$\begin{aligned} u(t) &= u^* \left\{ 1 - e^{-\frac{k}{2}t} \cos \frac{\Omega^2 - 1}{2\Omega} t \right\} + v^* e^{-\frac{k}{2}t} \sin \frac{\Omega^2 - 1}{2\Omega} t \\ v(t) &= v^* \left\{ 1 - e^{-\frac{k}{2}t} \cos \frac{\Omega^2 - 1}{2\Omega} t \right\} + u^* e^{-\frac{k}{2}t} \sin \frac{\Omega^2 - 1}{2\Omega} t \end{aligned} \quad (8.34)$$

そこで Ω を変化させて、うなり減衰振動の様子を観察しよう。

1. $\Omega < 1$ の場合：平衡点は第 1 象限にあり、原点からの軌道は時計まわりでこの平衡点に巻き付く。図 8.12 (a) 参照。なお、この図の黒丸は、これまで同様元の方程式の解を時刻 $\frac{2n\pi}{\omega}$ $n = 1, 2, \dots$ 毎にサンプルした点列を表す。以下に示す図はすべて同様。
2. $\Omega = 1$ の場合：平衡点は y 軸上にあり、原点からの軌道は y 軸を離れることなく平衡点に近づく。図 8.12 (b) 参照。
3. $\Omega > 1$ の場合：平衡点は第 2 象限にあり、原点からの軌道は反時計まわりでこの平衡点に巻き付く。図 8.12 (c) 参照。
4. $k = 0, \Omega \neq 1$ の場合：単振動。図 8.10 のようにうなりが続く。

次に、図 8.13 から図 8.15 に上述の各場合の波形を示す。いずれの図においても太い実線が平均化方程式の解曲線を表す。波形と黒丸は元の方程式の解と上述のサンプル点列を表している。これらは、ここでの解析が定性的にみて十分であることを示している。このようにして、共振点近傍ではうなり減衰振動の包絡線の運動は平均化方程式の性質で説明ができる。

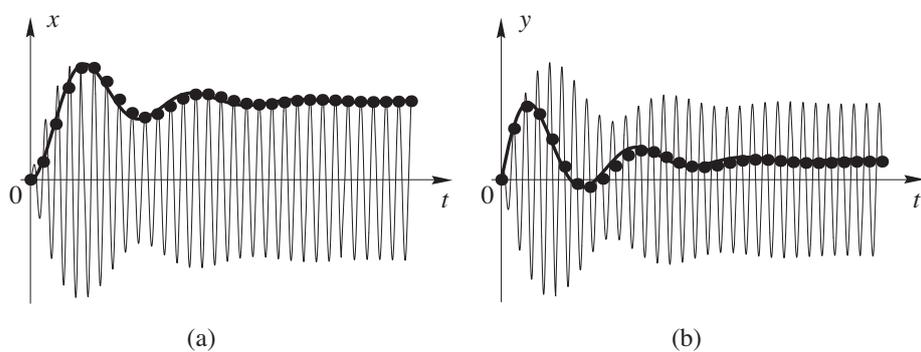


図 8.13 平均化方程式と元の方程式の解の比較. $k = 0.05, \Omega = 0.9$ の場合.

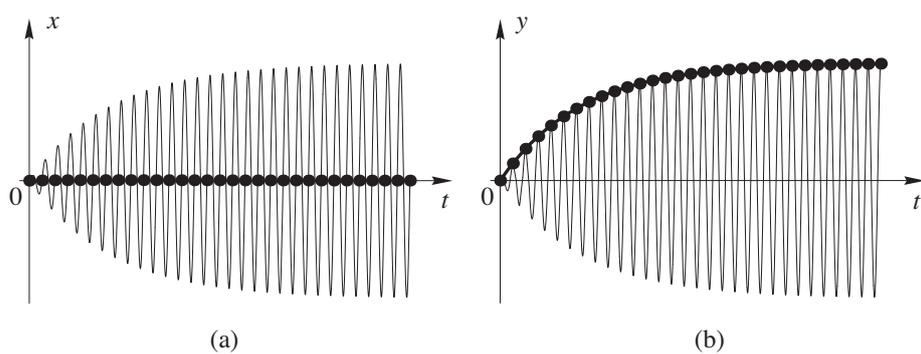


図 8.14 平均化方程式と元の方程式の解の比較. $k = 0.05, \Omega = 1.0$ の場合.

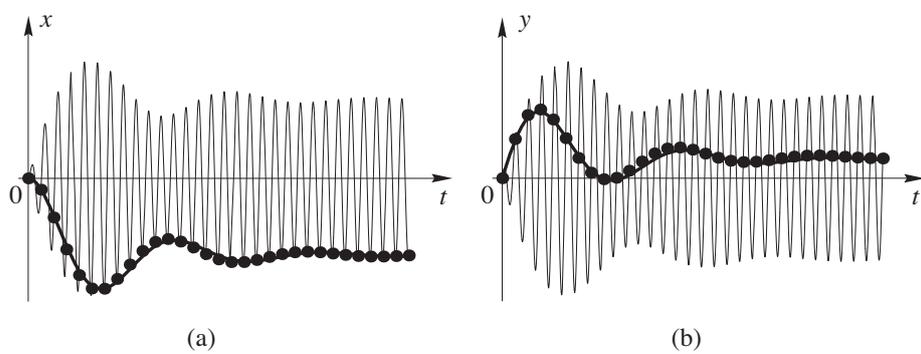


図 8.15 平均化方程式と元の方程式の解の比較. $k = 0.05, \Omega = 1.1$ の場合.

第 III 部

演算子法入門

第9章

演算子法へのプレリユード

交流理論において $j\omega$ を用いた記号法が役立ったと同じように、演算子法は微分方程式を代数方程式に変換し解析を容易にしてくれる有用な手法である。また、記号法を別の見方からすれば、時間的に変化する時間の関数を $j\omega$ をうまく利用して時間の概念を追い出し、複素直流すなわち周波数の世界へと変換して考える手法であるとも考えられる。

この章では、演算子法を考えるに先だって、必要となるであろう事柄を3つに限って見しておくことにしよう。それらは、部分積分、インパルスとステップ関数、それにたたみ込み積分である。

一般に、演算子法は線形定係数微分方程式に限って適用可能である。この範囲では種々の演算子法が考えられている。いずれも、数学的には関数解析の分野に基礎を置いている。したがって厳密な証明などについては学部の授業の段階では馴染みが無いのが普通である。我々としては、如何に利用するかという観点から、考え方の概要を学び正しく使用できればよいそれでよいであろう。

ここでもまた、指数関数がどう活躍するのかじっくりと見てほしい。なお、この章での説明は非常に直感的である。間違っている部分も多いかも知れない。そのつもりで読んでほしい。疑問に感じた時点で適当な参考書を読まれることを希望したい。この章でも、断りのない限り独立変数は時間 $t \in \mathbf{R}$ である。

9.1 部分積分

よく知られているように、2つの関数 $x(t)$ と $y(t)$ の積の微分は次式となる。

$$\frac{d}{dt} \{x(t)y(t)\} = \frac{dx(t)}{dt}y(t) + x(t)\frac{dy(t)}{dt} \quad (9.1)$$

したがって、これを積分すると

$$[x(t)y(t)]_a^b = \int_a^b \frac{dx(t)}{dt}y(t) dt + \int_a^b x(t)\frac{dy(t)}{dt} dt$$

の関係を得る。両辺の項を適当に入れ換えて整理すると、次の部分積分の公式を得る。

$$\int_a^b \frac{dx(t)}{dt} y(t) dt = [x(t) y(t)]_a^b - \int_a^b x(t) \frac{dy(t)}{dt} dt \quad (9.2)$$

ここに、 a, b は任意の定数である。

さて、この部分積分の公式は次の点で我々にとって有用である。

1. $x(t)$ の微分 (左辺の被積分関数) を $y(t)$ の微分に肩代わりさせている (右辺第 2 項の被積分関数)。
2. したがってもし、 $y(t)$ として指数関数を選ぶと、右辺には $x(t)$ の微分操作は含まれなくなる。すなわち、

$$\int_a^b \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = [x(t) e^{-st}]_a^b + s \int_a^b x(t) e^{-st} dt \quad (9.3)$$

ここに、 s は任意定数である。− 符号は、これからよく出てくる公式が − の付いている場合が多いので、便宜上付した。

一方、これまでに述べてきた線形定係数微分方程式の解達がどのような関数であったか振り返ってみよう。これらの関数は

1. 指数関数： e^{-at}
2. 指数関数と三角関数の積： $e^{-at} \cos bt, e^{at} \sin bt$
3. t の多項式と指数関数の積： $te^{-at}, (t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n) e^{-at}$

などであった。

さらに、強制外力としての入力信号には任意の有界な関数が考えられた。特に、入力関数はスイッチの開閉動作などによって部分的に「不連続で飛びのある」関数となることが許された。

これらの 2 点を考え合わせて、次の問題をうまく処理できる方法が見つければ有用であろう。

- 微分演算 (操作) をもっと簡単な演算、たとえば代数的な演算に置き換え、計算を楽にする方法は無いものだろうか？
- 不連続な関数を自由に「微分できる」ように、微分演算そのものを拡張するにはどうしたらよいのであろうか？

部分積分の公式 (9.2) は、指数関数の性質と組み合わせることによって、ある意味でこれらの問題を処理できることを示唆している。実際、種々の演算子法や積分変換の公式において、このことを見ることができよう。

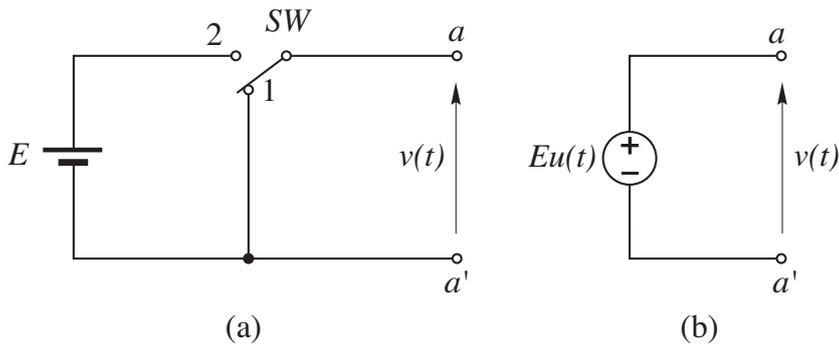


図 9.1 ステップ関数を出力する電圧源 (a) とその等価表現 (b).

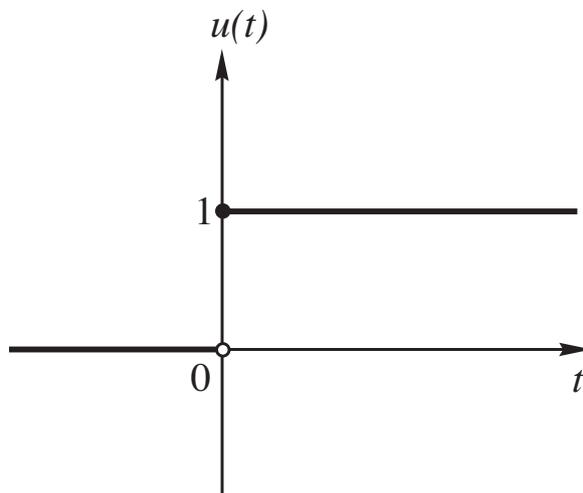


図 9.2 単位ステップ関数 $u(t)$.

9.2 インパルス関数とステップ関数

インパルス関数 (δ 関数) とステップ関数は、通信工学や信号処理を考える分野では最も基本的な関数である。最も、彼女ら^{*1}を関数と呼ぶと数学者からは「イヤ」な顔をされるだろう。

他方、我々にとってこれらの関数は、「電池をスイッチで開閉するだけで幾らでも実例をつくることができる」ほどに、物理的実在として日常的な関数と言える。ここでは、教科書 [7] の最初で述べた例 (pp. 7 - 11) を再録して、これらの関数を思い出すことにする。

^{*1} 関数は、英語で a function, フランス語で une fonction という。後者は女性名詞である。

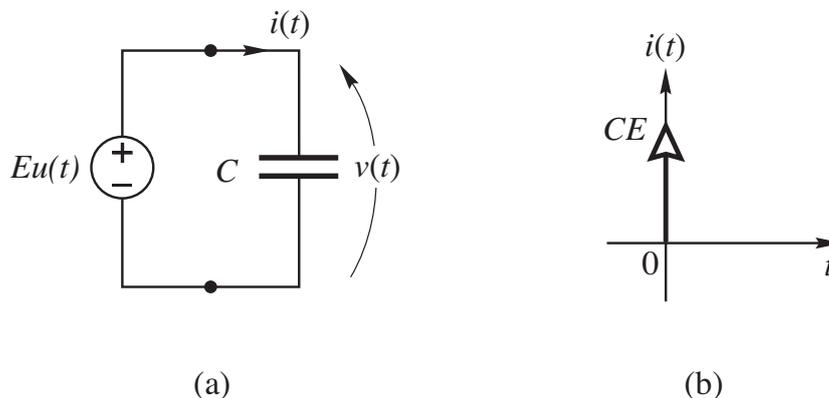


図 9.3 ステップ電源にキャパシタを接続した回路 (a) と流れる電流 (b).

【例題 9.1】

図 9.1(a) に示した電圧源とスイッチからなる回路を考える。端子対 aa' に現れる電圧 $v(t)$ を時間の関数として表せ。ただし、スイッチは $t=0$ で動作し、 $t < 0$ では端子 1 に、 $t > 0$ では端子 2 に接続されるものとする。

【解】明らかに $v(t)$ は

$$v(t) = \begin{cases} E & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (9.4)$$

となる。すなわち、端子対 aa' からみたこの回路は、式 (9.4) で表される電圧源と考えることができる。 $v(0)$ は有界な値であるが、この回路だけでは具体的な値を何にすればよいか定めることができない。ここでは便宜上 $v(0) = E$ とおいた。式 (9.4) は最も単純な不連続関数の例である。

ここで単位ステップ関数 (unit step function) と呼ばれる関数 $u(t)$ を

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (9.5)$$

と定義しておこう、図 9.2 参照。この関数を用いると、式 (9.4) は

$$v(t) = Eu(t) \quad (9.6)$$

と表すことができる。これを使って図 9.1 (a) は、等価な電圧源 (b) のように表すこともできる。

【例題 9.2】

図 9.3(a) の回路に流れる電流を求めよ。

【解】キャパシタを流れる電流は

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} = CE \frac{du(t)}{dt} \quad (9.7)$$

である. $u(t)$ は $t \neq 0$ で一定であるから, $\frac{du}{dt} = 0$ である. $t = 0$ では不連続であるので, 通常の意味では微分できない. $t = 0$ で右方向微分と左方向微分が共に 0 であるから $t = 0$ で $\frac{du}{dt} = 0$ と考えるのは誤りである.

キャパシタに蓄えられる電荷に着目して, $\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0}$ をどう考えたらよいか検討してみよう. 今, 時間軸で $t = 0$ に左 (負の側) から近づいた極限を $t = 0-$, 右から (正の側) から近づいた極限を $t = 0+$ と書くことにしよう. $u(0-) = 0$, $u(0+) = 1$ であることに注目すると, スイッチの動作前後でキャパシタに蓄えられる電荷は次式となる.

$$\begin{aligned} q(0-) &= CEu(0-) = 0 \\ q(0+) &= CEu(0+) = CE \end{aligned} \quad (9.8)$$

式 (9.8) は, $t = 0$ で CE クーロンの電荷が, 電池から瞬時にキャパシタに移動したことを意味している. $\varepsilon > 0$ として

$$q(\varepsilon) = q(-\varepsilon) + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} i(\tau) d\tau$$

$q(\varepsilon) = q(0+) = CE$, $q(-\varepsilon) = q(0-) = 0$ なので, これより

$$q(0+) = CE = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} i(\tau) d\tau = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dq}{d\tau} d\tau = CE \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{du}{d\tau} d\tau$$

そこで, CE で割って

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{du}{d\tau} d\tau = 1 \quad (9.9)$$

の関係を得る.

一方, $t = 0$ で ∞ , $t \neq 0$ で 0 の値を持ち,

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(\tau) d\tau = 1, \delta(t) = 0, t \neq 0 \quad (9.10)$$

の性質を持つ特異な関数は, **単位インパルス関数** (unit impulse function) または**デルタ関数** (delta function) として知られている. 式 (9.9) と式 (9.10) より, $t \neq 0$ で被積分関数が零であることから積分の上, 下限が任意となることにより,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{d\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$$

これより

$$\frac{du}{dt} = \delta(t) \quad (9.11)$$

と考えることができる. $\delta(t)$ は

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(\tau) d\tau = x(0) \quad (9.12)$$

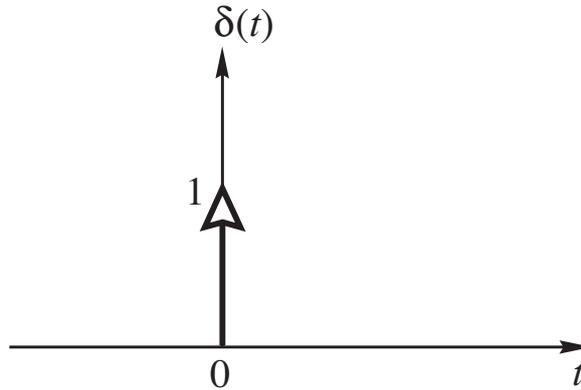


図 9.4 単位インパルス関数の表示法.

の性質を持つ。ただし $x(t)$ は原点で連続な任意の関数とする。一般に次式が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) \quad (9.13)$$

このように $\delta(t)$ は、常に積分の被積分関数として用いる。 $\delta(t)$ の表し方であるが、 $t=0$ で ∞ であるが、式 (9.10) を考慮して、 $t=0$ で高さ 1 の矢印記号を用いて表す、図 9.4 参照。以上のことから、流れる電流は

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} = CE \frac{du(t)}{dt} = CE\delta(t) \quad (9.14)$$

となる。一瞬に無限大の電流が流れ、キャパシタは瞬時に充電され、電圧は $v(t) = E$ となる。図 9.3 (b) 参照。

9.3 たたみ込み積分

9.3.1 インパルス応答

さて、この節ではインパルス応答から始めよう。静止した回路*2にインパルスを入力して、状態の変化を求めることをインパルス応答をみるという。いつものように簡単な例を見ながら話をすすめよう。

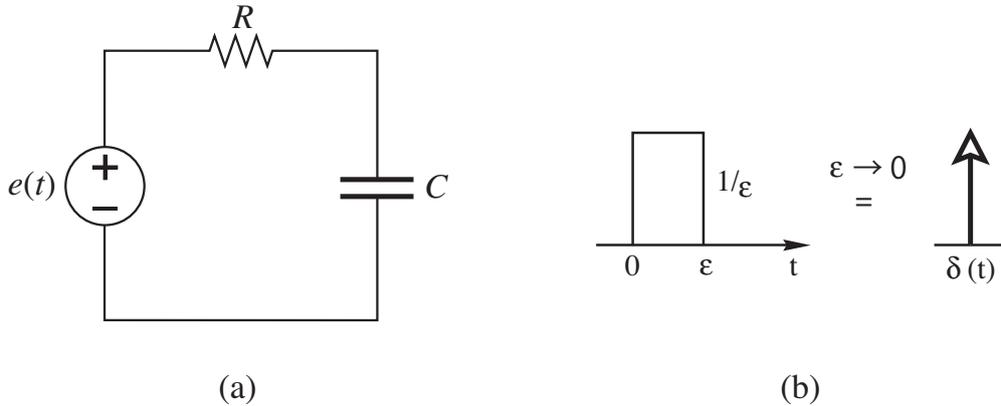
【例題 9.3】

図 9.5(a) に示した RC 回路を考える。回路は静止していた。インパルス電圧源 $e(t) = \delta(t)$ が印加されるとしよう。このときキャパシタ電圧を求めよ。

【解】 回路方程式は

$$RC \frac{dv}{dt} + v = \delta(t) \quad (9.15)$$

*2 状態がすべて零となっている回路のこと。

図 9.5 インパルス電圧源の印加された RC 回路 (a) と近似電圧源 (b).

である。さて、インパルス電圧源 $\delta(t)$ を、図 9.5 (b) のように高さが $\frac{1}{\epsilon}$ で幅が ϵ の矩形波のパルスで近似し、結果の応答を $\epsilon \rightarrow 0$ の極限として求めよう。応答は次式となる。

$$\begin{aligned} v(t) &= 0, t \leq 0 \\ v(t) &= \frac{1}{\epsilon} \left[1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right], 0 \leq t \leq \epsilon \\ v(t) &= \frac{1}{\epsilon} \left[1 - e^{-\frac{\epsilon}{RC}} \right] e^{-\frac{(t-\epsilon)}{RC}} = \frac{1}{\epsilon} \left[e^{\frac{\epsilon}{RC}} - 1 \right] e^{-\frac{1}{RC}t}, \epsilon \leq t \end{aligned} \quad (9.16)$$

最後の式は、係数を展開し

$$e^{\frac{\epsilon}{RC}} = 1 + \frac{\epsilon}{RC} + \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{RC} \right)^2 + \dots$$

を使って整理すると、次式となる。

$$v(t) = \frac{1}{\epsilon} \left[\left\{ 1 + \frac{\epsilon}{RC} + \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{RC} \right)^2 + \dots \right\} - 1 \right] e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} + \epsilon(\dots)$$

ここで、 $\epsilon \rightarrow 0$ とすると

$$v(t) = h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (9.17)$$

となる。これがインパルス応答である。 v を改めて h と書いた。この応答は式 (9.15) の同次方程式を考え、その初期値を $\frac{1}{RC}$ とおいた解を表している。実際、回路方程式 (9.15) を整理してみると

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = \frac{1}{RC}\delta(t) \quad (9.18)$$

となって、入力 $\frac{1}{RC}\delta(t)$ が入っているからである。

さて、インパルス応答が求められると、任意の入力 $f(t)$ に対する応答が次のように計算できる。式 (9.13) を用いると、 $f(t)$ は δ 関数を使って

$$f(t) = \int_0^t f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (9.19)$$

と表せることに注意しよう。そこで、 $\delta(t)$ を印加して得られるインパルス応答 (9.17) は、回路方程式が自律系なので、時間遅れ τ の入力 $\delta(t-\tau)$ には $h(t-\tau)$ と応答する。勿論、スカラー $f(\tau)$ 倍された遅れインパルス $f(\tau)\delta(t-\tau)$ に対する応答は、 $f(\tau)h(t-\tau)$ となる。結局、入力 (9.19) に対して次の応答が得られる。

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau = \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} f(\tau) d\tau \quad (9.20)$$

以上の事実は回路方程式

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = \frac{1}{RC}f(t) \quad (9.21)$$

を直接解くことによって、簡単に確かめられる。第2章 2.1.5 で述べた定数変化法により、解を

$$g(t) = K(t) e^{-\frac{1}{RC}t}$$

とにおいて、式 (9.21) に代入し整理すると

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{RC} e^{\frac{1}{RC}t} f(t)$$

となる。これを積分して仮定した解に代入し

$$g(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

を得る。これは式 (9.20) と一致する。このようにしてこの節の議論は、線形定係数常微分方程式で記述される系ではいつも成り立つことが分かるであろう。

9.3.2 たたみこみ積分

2つの関数 $f(t)$ と $g(t)$ から

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau = f(t) * g(t) \quad (9.22)$$

や

$$h(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = f(t) * g(t) \quad (9.23)$$

によって作られる関数 $h(t)$ を $f(t)$ と $g(t)$ の **たたみ込み積分** (convolution) ^{*3} という。積分の範囲は考える問題によって適当に選ばれる。たたみ込み演算は「積」の性質を持っている。たとえば、

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t), \{af(t) + bg(t)\} * k(t) = af(t) * k(t) + bg(t) * k(t)$$

等は容易に証明できる。

^{*3} たたみ込み積分は合成積 (composition product) とも呼ばれている。

線形自律系では、任意の入力に対する応答がインパルス応答と入力のたたみ込み積分で表されることから、この積は重要である。すなわち、第3章で述べた線形系

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (9.24)$$

の応答は

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (9.25)$$

となる。この応答の右辺第1項は、系から入力を取り去った自由な系の応答であり、同次方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (9.26)$$

の一般解が対応している。これを**零入力応答** (zero input response) というのであった。これは適当に初期値を定めるとインパルス応答にほかならない。

他方、第2項は入力に起因する応答であり、こちらは**零状態応答** (zero state response) と呼ばれた。インパルス応答とのたたみ込み積分となっている。この場合、積分は各瞬間でのインパルス応答と入力のたたみ込み演算を連続的に重ね合わせる操作とみることができる。

第 10 章

Laplace 変換法

ラプラス変換法は我々電気屋にとっては、 $j\omega$ 記号法と同様になじみ深い演算子法である。もっともこれから学ぶので、なじみが深くなるというべきであろう。ひと昔前、いやもうふた昔も前、いやもっと昔 1950 年代、ラプラス変換を紹介して下さった先輩の先生方の講義には、時代の先端の理論を教えてくれているみたいな熱気と *à la mode* な雰囲気があった。やたらと難しい複素積分が出てきて、益々「有難味」をかき立てたりもしたものだ。おそらく、Heaviside の演算子法でもやもやしていた問題点がラプラス変換法では数学的にすっきりすることや、制御理論の解析を担う方法として採用されていたことがこの様な状況を感じさせたのであろう。

その後、1960 年後半から線形代数を使って自然に解く方法も広く用いられるようになり、有難味は幾分薄らいだ気もする。それに、ミクシンスキーの演算子法なども知られるようになり、どの演算子法を使うかは「好みの問題」となってしまった。ただ、斜陽になったとは言え、電気屋はやっぱりラプラス変換を知っていなければいけないのだ。先輩達が使ってきた手法だし、それに相棒の *Fourier* 変換との相性の良さという特徴からも無視はできない。

以下、ラプラス変換法を必要最小限の範囲で紹介しよう。

10.1 定義と簡単な性質

時間の関数 $x(t)$ を次の積分により複素数 s の関数 $X(s)$ に変換することをラプラス変換 (Laplace transform) という。

$$\int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt = \mathcal{L}[x(t)] = X(s) \quad (10.1)$$

【注意】この章で考える時間の関数は、 $t < 0$ において常に $x(t) = 0$ となっている関数のみを考える。別の言い方をすれば、 $t < 0$ の時間については一切考えない。これが、積分 (10.1) の下限を 0 にしてある理由である。時刻 $t = 0$ でスイッチを入れ、状態がどう発

展するかということにのみ注目する。したがって特に、関数

$$x(t) = \begin{cases} x(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

の時間軸方向へ移動された関数^{*1}

$$x(t-T) = \begin{cases} x(t-T) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

は、定義域が $t \geq 0$ となることに注意が必要である。

定義 (10.1) から次の性質がただちに導かれる。ただし、 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$, $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ とおいた。

1. 線形性：

$$\mathcal{L}[ax(t) + by(t)] = aX(s) + bY(s) \quad (10.2)$$

2. 微分のラプラス変換 (1 階微分)：

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) \quad (10.3)$$

3. 微分のラプラス変換 (2 階微分)：

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - sx(0) - \frac{dx(0)}{dt} \quad (10.4)$$

4. 積分のラプラス変換：

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(t) dt\right] = \frac{1}{s}X(s) \quad (10.5)$$

5. 時間遅れ T を持つ関数のラプラス変換：

$$\mathcal{L}[x(t-T)] = e^{-sT}X(s) \quad (10.6)$$

6. 初期値定理：

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad (10.7)$$

7. 最終値定理：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (10.8)$$

標語的には、式 (10.3), (10.4) を微分は s を掛けること、積分は s で割ることと覚えておくとよい。念のため、これらの関係を証明しておこう。

式 (10.2):

^{*1} 時間軸方向に T だけ「ずらした」関数は、時間 T だけ「遅れた」信号なので、遅れ T の関数 (信号) という。

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \{ax(t) + by(t)\} dt = a \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt + b \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt$$

式 (10.3):

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dx}{dt} dt = [e^{-st} x(t)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt = x(0) + sX(s)$$

式 (10.4):

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) \right] = s \mathcal{L} \left[\frac{dx}{dt} \right] - \frac{dx}{dt} (0) = s \{sX(s) - x(0)\} - \frac{dx}{dt} (0)$$

式 (10.5):

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \left[\int_0^t x(\tau) d\tau \right] dt = -\frac{1}{s} \left[e^{-st} \int_0^t x(\tau) d\tau \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt$$

式 (10.6): $\tau = t - T$ と変換して,

$$\mathcal{L}[x(t-T)] = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t-T) dt = \int_{-T}^{\infty} e^{-s(\tau+T)} x(\tau) d\tau = e^{-sT} X(s)$$

式 (10.7):

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dx}{dt} dt = 0 = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) - x(0)$$

式 (10.8):

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dx}{dt} dt = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0)$$

この左辺は次式となる.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{\infty} \left\{ \lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} \right\} \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{\infty} \frac{dx}{dt} dt = [x(t)]_0^{\infty}$$

【例題 10.1】次の同次方程式をラプラス変換し, $X(s)$ を求めよ.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta \frac{dx}{dt} + (\zeta^2 + \omega^2) x = 0$$

【解】 上で述べた性質 1., 2., 3. を使って, 次式を得る.

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta \frac{dx}{dt} + (\zeta^2 + \omega^2) x \right] = s^2 X - sx(0) - \frac{dx}{dt} (0) + 2\zeta [sX - x(0)] + (\zeta^2 + \omega^2) X = 0$$

したがって

$$\{s^2 + 2\zeta s + (\zeta^2 + \omega^2)\} X = sx(0) - \dot{x}(0) - 2\zeta x(0)$$

これより $X(s)$ は次式となる.

$$X(s) = \frac{sx(0) - \dot{x}(0) - 2\zeta x(0)}{s^2 + 2\zeta s + (\zeta^2 + \omega^2)}$$

10.2 指数関数, 三角関数とインパルス関数のラプラス変換

さて, ここで重要な関数のラプラス変換を計算しておく.

(1) 指数関数 e^{-at}

$$\frac{de^{-at}}{dt} = -ae^{-at}$$

であるから両辺をラプラス変換すると, 式 (10.3) を使って次式を得る.

$$s\mathcal{L}[e^{-at}] - 1 = -a\mathcal{L}[e^{-at}]$$

したがって

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a} \quad (10.9)$$

もちろん, 次のように直接計算できる.

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \left[-\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

ここで特に, $a=0$ の場合を考えると, 単位ステップ関数のラプラス変換が得られる.

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \quad (10.10)$$

(2) 指数三角関数

式 (10.9) で $a = \zeta + j\omega$ とおくと

$$\mathcal{L}[e^{-\zeta t} \cos \omega t - je^{-\zeta t} \sin \omega t] = \frac{1}{s + \zeta + j\omega} = \frac{s + \zeta}{(s + \zeta)^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{(s + \zeta)^2 + \omega^2}$$

したがって

$$\mathcal{L}[e^{-\zeta t} \cos \omega t] = \frac{s + \zeta}{(s + \zeta)^2 + \omega^2} \quad (10.11)$$

$$\mathcal{L}[e^{-\zeta t} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s + \zeta)^2 + \omega^2} \quad (10.12)$$

特に, $\zeta = 0$ の場合を考えると, 三角関数のラプラス変換が得られる.

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (10.13)$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (10.14)$$

(3) 単位インパルス関数

インパルス関数 (δ 関数) は, その定義から直ちに計算できる.

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t) dt = e^{-s \times 0} = 1$$

表 10.1 ラプラス変換表

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$	$X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-\zeta t} \cos \omega t$	$\frac{s + \zeta}{(s + \zeta)^2 + \omega^2}$
$e^{-\zeta t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + \zeta)^2 + \omega^2}$

したがって,

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (10.15)$$

次に, 基本的な関数のラプラス変換した結果を表 10.1 にあげておく.

【例題 10.2】

表 10.1 にあげた t, te^{-at} のラプラス変換を求め, 一般に

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^n}{n!}\right] = \frac{1}{s^{n+1}}, \quad \mathcal{L}\left[\frac{t^n e^{-at}}{n!}\right] = \frac{1}{(s+a)^{n+1}}$$

となることを示せ.

【解】 指数関数のラプラス変換 (10.9) をパラメータ a で微分する. 左辺は次式となる.

$$\frac{d}{da} \mathcal{L}[e^{-at}] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{da} e^{-at}\right] = \mathcal{L}[-te^{-at}]$$

一方, 右辺は次式となるので, これらの式が成り立つ.

$$\frac{d}{da} \frac{1}{s+a} = -\frac{1}{(s+a)^2}$$

この微分を n 回繰り返すと,

$$\frac{d^n}{da^n} \mathcal{L}[e^{-at}] = (-1)^n \mathcal{L}[t^n e^{-at}]$$

$$\frac{d^n}{da^n} \frac{1}{s+a} = (-1)^n n! \frac{1}{(s+a)^{n+1}}$$

となり，所要の式が得られる．

10.3 微分方程式を解く

準備ができたのでラプラス変換を使って微分方程式を解いてみよう．簡単な例題でどのような手順で解けばよいのか解法の道筋を考えることにしよう．

【例題 10.3】

次の微分方程式をラプラス変換によって解け．

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 5 \quad (10.16)$$

ただし，初期値は， $x(0) = 1$ ， $\dot{x}(0) = 4$ とする．

【解】例題 10.1 と同様にして，まずラプラス変換して $X(s)$ を求めよう．

$$\mathcal{L}[\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x] = \mathcal{L}[5]$$

より，次式を得る．

$$s^2 X - s - 4 + 3(sX - 1) + 2X = \frac{5}{s}$$

これを整理すると

$$X = \frac{s+7}{s^2+3s+2} + \frac{5}{s(s^2+3s+2)} \quad (10.17)$$

となる．この段階でラプラス変換後の複素関数 $X(s)$ が求められた．

次の段階はこれを逆変換して時間関数 $x(t)$ を求めることである．そのために，式 (10.17) の右辺を部分分数展開して，できるだけ簡単な有理関数にする．すると，表 10.1 を左右見比べて逆変換の関数が何であるか知ることができる．

式 (10.17) の右辺の第 1 項から計算しよう．まず，

$$\frac{s+7}{s^2+3s+2} = \frac{s+7}{(s+1)(s+2)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2}$$

と置いて，係数 a, b を求める．最後の式を通分して最初の式と分子どおしを比べると，次の連立方程式を得る．

$$a + b = 1, \quad 2a + b = 7$$

したがって， $a = 6, b = -5$ であることが分かる．結局

$$\frac{s+7}{s^2+3s+2} = \frac{6}{s+1} - \frac{5}{s+2}$$

となる．同様に

$$\frac{5}{s(s^2+3s+2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s+2}$$

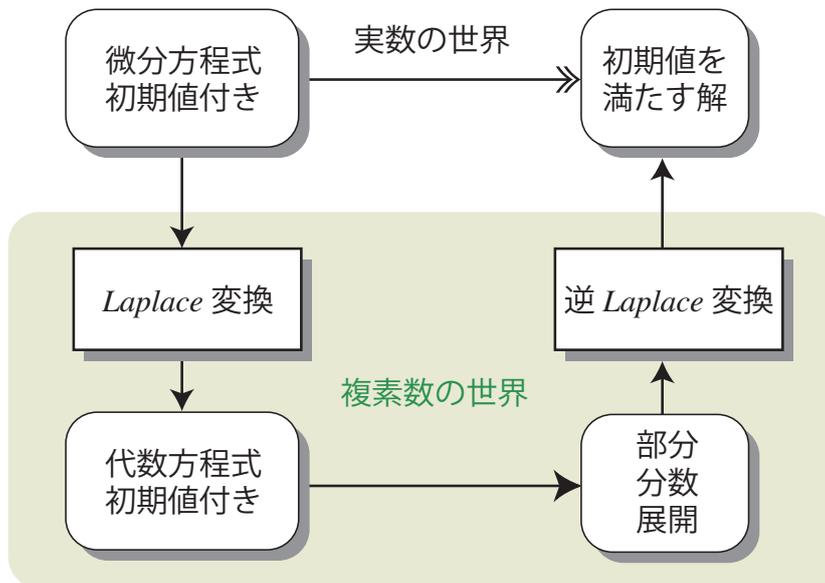


図 10.1 ラプラス変換法による解法の流れ図.

と置いて, a, b, c を求め, 展開式は

$$\frac{5}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{5}{2} \frac{1}{s} - \frac{5}{s+1} + \frac{5}{2} \frac{1}{s+2}$$

となる. そこで, これらを足し合わせると次の展開式を得る.

$$X(s) = \frac{s+7}{s^2 + 3s + 2} + \frac{5}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{5}{2} \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{5}{2} \frac{1}{s+2} \quad (10.18)$$

表 10.1 を参照して逆ラプラス変換すると式 (10.16) の解を得る.

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{5}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \frac{5}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = \frac{5}{2}u(t) + e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t} \quad (10.19)$$

以上の手順をフローチャート風にまとめると図 10.1 となる. これは, 解法の一般的な道筋と考えてよい.

なお, 逆変換の公式は複素積分

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds \quad (10.20)$$

で与えられる. これを留数定理を用いて計算すると勿論同じ解を得る. 複素関数論を勉強した段階で計算してみるとよいであろう.

10.4 部分分数展開

ラプラス変換された複素関数は、一般に s の有理関数となっている。これを最も簡単な有理関数の和に分解する計算を部分分数展開という。我々の考える有理関数は

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (10.21)$$

の形をしている。ここに、分母と分子の多項式は

$$\begin{aligned} D(s) &= s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \\ N(s) &= s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + a_{m-1} s + a_m \end{aligned} \quad (10.22)$$

となっている。更に通常は、 $n > m$ となっていて分母の次数のほうが大きい。以下、そのようになっている場合の展開式を考えよう。なお、 $D(s)$ の根となる複素数 s を X の極 (pole), $N(s)$ の根となる複素数 s を X の零点 (zero) という。大抵の方程式では重複のない極や零点となっている。これは、極と時間関数の微分方程式を解く際問題にした特性方程式の根とが 1:1 に対応していることから理解できるであろう。ただ、重複している場合の扱いも知っておく必要はあるであろう。以下、部分分数展開後の各項の係数の求め方について考える。

10.4.1 $X(s)$ の極が 1 位の場合

最も普通にでてくる場合が、この極の次数が 1 の場合である。分母の多項式の根には重複がないので、 $X(s)$ は次式で表される。

$$X(s) = \frac{N(s)}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2) \cdots (s + \alpha_n)} = \frac{\beta_1}{(s + \alpha_1)} + \frac{\beta_2}{(s + \alpha_2)} + \cdots + \frac{\beta_n}{(s + \alpha_n)} \quad (10.23)$$

そこで、右辺の各係数 β_k は次式で計算できる。

$$\beta_k = [(s + \alpha_k) X(s)]_{s = -\alpha_k} \quad (10.24)$$

特別な場合として 1 対の複素数が極となっている場合は、次のようにまとめて考えるとよい。

$$\frac{\beta + j\gamma}{s + \alpha + j\omega} + \frac{\beta - j\gamma}{s + \alpha - j\omega} \quad (10.25)$$

したがって

$$\frac{\beta + j\gamma}{s + \alpha + j\omega} + \frac{\beta - j\gamma}{s + \alpha - j\omega} = \frac{2\beta(s + \alpha) + 2\gamma\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} = \mathcal{L} \{ 2\beta e^{-\alpha t} \cos \omega t + 2\gamma e^{-\alpha t} \sin \omega t \} \quad (10.26)$$

10.4.2 $X(s)$ の極が 2 位以上の場合

分母の多項式の根に重複のある場合である。あまり出くわす事はないが、一応公式をあげておこう。

$$X(s) = \frac{N(s)}{(s+\alpha)^m} = \frac{\beta_m}{(s+\alpha)^m} + \frac{\beta_{m-1}}{(s+\alpha)^{m-1}} + \cdots + \frac{\beta_2}{(s+\alpha)^2} + \frac{\beta_1}{s+\alpha} \quad (10.27)$$

$$(s+\alpha)^m X(s) = \beta_m + \beta_{m-1}(s+\alpha) + \cdots + \beta_2(s+\alpha)^{m-2} + \beta_1(s+\alpha)^{m-1} \quad (10.28)$$

したがって

$$\begin{aligned} \beta_m &= [(s+\alpha)^m X(s)]_{s=-\alpha} \\ \beta_{m-1} &= \left[\frac{d}{ds} \{(s+\alpha)^m X(s)\} \right]_{s=-\alpha} \\ \beta_{m-2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{ds^2} \{(s+\alpha)^m X(s)\} \right]_{s=-\alpha} \\ &\dots\dots\dots \\ \beta_1 &= \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \{(s+\alpha)^m X(s)\} \right]_{s=-\alpha} \end{aligned} \quad (10.29)$$

を得る。なお

$$\frac{\beta_m}{(s+\alpha)^m} + \frac{\beta_{m-1}}{(s+\alpha)^{m-1}} + \cdots + \frac{\beta_2}{(s+\alpha)^2} + \frac{\beta_1}{s+\alpha} = \mathcal{L} \left\{ \beta_m \frac{t^{m-1} e^{-\alpha t}}{(m-1)!} + \cdots + \beta_2 t e^{-\alpha t} + \beta_1 e^{-\alpha t} \right\} \quad (10.30)$$

である。

10.5 正弦波応答の計算例

教科書 [7] pp. 60-61 にある例題 2.2 をラプラス変換を用いて解いてみよう。式 (2.36) を初期値 $v(0) = v_0$ で解く問題である。まず、回路方程式

$$RC \frac{dv}{dt} + v = E \sin(\omega t + \theta) \quad (10.31)$$

を複素化しておく (何故か?)

$$RC \frac{dz}{dt} + z = E e^{j(\omega t + \theta)} \quad (10.32)$$

勿論、式 (10.32) を解いてその虚数部をとれば、求める解となる。式 (10.32) をラプラス変換して、

$$RC [sZ - v_0] + Z = \frac{E e^{j\theta}}{s - j\omega} \quad (10.33)$$

Z について整理すれば,

$$Z = \frac{RCv_0}{sRC + 1} + \frac{Ee^{j\theta}}{(sRC + 1)(s - j\omega)} = \frac{v_0}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{Ee^{j\theta}}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \frac{1}{s - j\omega} \quad (10.34)$$

この式の最後の項を部分分数展開して

$$Z = \frac{v_0}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{Ee^{j\theta}}{1 + j\omega RC} \left[-\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{1}{s - j\omega} \right] \quad (10.35)$$

式 (10.35) をラプラス逆変換すると

$$\begin{aligned} z(t) = \mathcal{L}^{-1}(Z) &= v_0 e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{Ee^{j\theta}}{1 + j\omega RC} \left[-e^{-\frac{t}{RC}} + e^{-j\omega t} \right] \\ &= v_0 e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{Ee^{j(\theta-\phi)}}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \left[-e^{-\frac{t}{RC}} + e^{-j\omega t} \right] \end{aligned} \quad (10.36)$$

ここに $\phi = \tan^{-1} \omega RC$ である. したがって

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 e^{-\frac{t}{RC}} + \Im \left[\frac{Ee^{j(\theta-\phi)}}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \left[-e^{-\frac{t}{RC}} + e^{-j\omega t} \right] \right] \\ &= \left[v_0 - \frac{E}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \sin(\theta - \phi) \right] e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{E}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \sin(\omega t + \theta - \phi) \end{aligned} \quad (10.37)$$

となる.

ここで使った小さな公式を一つあげておこう.

$$\sum_{\ell=1}^n \frac{\beta_{\ell}}{s + \alpha_{\ell}} \frac{E}{s - j\omega} = \sum_{\ell=1}^n \frac{\beta_{\ell} E}{\alpha_{\ell} + j\omega} \left[-\frac{1}{s + \alpha_{\ell}} + \frac{1}{s - j\omega} \right] \quad (10.38)$$

10.6 たたみ込み積分

2 つの時間関数 $u(t), v(t)$ を用いて次の関数

$$x(t) = \int_0^t u(\tau)v(t - \tau)d\tau = u(t) * v(t) \quad (10.39)$$

を定義する. この積分をたたみこみ積分 (convolution) というのであった. あきらかに

$$u(t) * v(t) = v(t) * u(t) \quad (10.40)$$

$$u(t) * (\alpha v(t) + \beta w(t)) = \alpha u(t) * v(t) + \beta u(t) * w(t) \quad (10.41)$$

の性質 (積の性質) を持つ.

たたみこみ積分のラプラス変換は次式となる.

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t u(\tau)v(t - \tau)d\tau \right] = \mathcal{L}[u(t) * v(t)] = U(s) \cdot V(s) \quad (10.42)$$

ここに $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$, $V(s) = \mathcal{L}[v(t)]$ である.

証明：ラプラス変換の定義から

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t u(\tau)v(t-\tau)d\tau\right] = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t u(\tau)v(t-\tau)d\tau\right] dt \quad (10.43)$$

$v(t-\tau)$ は $t-\tau < 0$ でゼロであるから、式 (10.43) の被積分関数の積分の範囲を変更し、さらに積分の順序を変えると

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t u(\tau)v(t-\tau)d\tau\right] dt &= \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^\infty u(\tau)v(t-\tau)d\tau\right] dt \\ &= \int_0^\infty u(\tau) \left[\int_0^\infty v(t-\tau)e^{-st}d\tau\right] d\tau = \int_0^\infty u(\tau) \left[\int_{-\tau}^\infty v(z)e^{-s(z+\tau)}dz\right] d\tau \\ &= \int_0^\infty u(\tau) \left[\int_0^\infty v(z)e^{-s(z+\tau)}dz\right] d\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau}u(\tau) \left[\int_0^\infty v(z)e^{-sz}dz\right] d\tau \end{aligned} \quad (10.44)$$

応用として微分方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (10.45)$$

の解は、次式で与えられる.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (10.46)$$

証明：式 (10.45) をラプラス変換すると

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (10.47)$$

整理して

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{U}(s) \quad (10.48)$$

この第 2 項はたたみこみ積分となっている.

演習問題

1. ラプラス変換を用いて次の微分方程式を解け.

(a) $\dot{x} + 3x = -4$ with $x(0) = 2$

(b) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 5$ with $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 4$

(c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 5$ with $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 4$

(d) $\dot{x} + 5x = 5 \sin 2t$ with $x(0) = 1$

(e) $\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x = \delta(t)$ with $x(0) = -1, \dot{x}(0) = -1$

2. 表 10.1 を用いて次の関数のラプラス逆変換を求めよ.

(1) $\frac{20}{s+4}$

(2) $\frac{20}{10s+1}$

(3) $\frac{10}{2s^2+32}$

(4) $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$

(5) $\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

(6) $38 + \frac{49}{s}$

(7) $\frac{s+2}{s(s+1)}$

(8) $\frac{s+2}{s+1}$

(9) $\frac{s+2}{(s+1)^2}$

(10) $\frac{2s+3}{s^2+2s+3}$

(11) $\frac{2s+3}{(s+1)(s^2+2s+3)}$

(12) $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$

(13) $\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$

(14) $\frac{1}{s(s+a)(s+b)(s+c)}$

(15) $\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)(s+d)}$

3. 次式を証明せよ.

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n x}{dt^n} \right] = s^n X(s) - s^{n-1} x(0) - \dots - s x^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)$$

4. この章の例題 10.1 の一般解を求めよ.

5. この章の 10.5 で考えた RC 回路の回路方程式 (10.5.1) をそのままラプラス変換して解き, 10.5 の解法と比較せよ.

6. このノートの第 2 章にある例題をラプラス変換して解き, 第 2 章の解法と比較せよ.

参考文献

- [1] 古屋茂：行列と行列式，倍風館，昭和 50 年。
この本は古くから読み継がれてきた名著であり，記述も分かりやすい．第 5 章までの 100 ページ位を読んでおくと大抵のことは理解できるようになる．
- [2] 砂田利一：行列と行列式 1，岩波講座：現代数学への入門，岩波書店，1995.
この本は最近書かれた良書である．非常に読みやすくおもしろく書かれている．一番推薦したい本である．できればがんばって 2 巻目も読破してほしい．
- [3] ポントリャーギン著，千葉克裕訳：常微分方程式，共立出版，1963.
微分方程式の本として 1 冊あげると言われるとこの本しかない．それほどに世界的な名著である．このノートの第 4 章 2 次元自律系についてもっと詳しく知りたいときは，この本の第 2 章 16 節を参照するとよい．回路，制御，非線形力学への最良の入門書と言える．40 年間も新鮮さを失わない教科書があるなんて信じられない気がする．ちなみに，ポントリャーギンは，旧ソ連の盲目のトポロジスト．連続群論や力学系における構造安定性の理論で有名．制御工学では「ポントリャーギンの最大値原理」で 1960 年代の流れを作った．
- [4] スメール・ハーシュ著，田村一郎・水谷忠良・新井紀久子訳：力学系入門，岩波書店，1976.
この本の原題は「Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra」となっていて，線形代数と微分方程式の関係を丁寧に述べている．例題も多くて親切である．この本の著者 S. Smale は微分可能力学系の発展にこの上もなく寄与したバークレーのフィールド・メダリストである．このノートで省略した「重複特性根に対する Jordan 標準形とそれに関連した一般化された固有ベクトル空間」について知りたいときは，この本を参照すればよい．
- [5] 渡部和：線形回路理論，昭晃堂，昭和 46 年。
第 1 章に回路の状態方程式の導出法が説明されている．著者は，当時まさにこの方面の第一人者だった日本の回路屋さんである．2 章以下には，ミクシンスキーの演算子法を使った線形回路の解析がなされている．
- [6] ローレー著，斎藤政男・篠崎寿夫訳：回路理論，学献社，1973.
こちらは，アメリカで同じ頃回路方程式の導出法について研究していた研究者によって書かれた良書である．一から始める人が躓きそうな所をカバーするように丁寧に

説明されている。

- [7] 小林邦博・川上博：電気回路の過渡現象，産業図書，1991.

回路 3 の単位を取るためには購入する必要がある本。このノートで単に教科書とあるのはこの本をさす。

付録 A

ベクトル戯画絵巻

この章に述べられている事項は、あるいは根も葉もないフィクションかも知れません。それを判断するのはあなた自身です。

では、時間がきましたから今日はここまで。次の時間はベクトル空間の性質と線形写像の知識が必要です。たとえば、ベクトルの一次独立性、ベクトル空間の次元、写像の *rank*、写像の核など。これらが何やったか思い出しておいて下さい。忘れた人は、分かっている人に教えてもらって下さい。はい、ここまで。終わります。連休は遊びほうけないように。

A.1 ベクトル達の社会：ベクトル空間

C「あれ！ いややわー。今日また休講なん？ そんなんやったら連休まえにゆうといてくれたらええのにー」

A「なんや、あの先生サボりすぎやでー」

B「まあ、その分先生に貸し作って、単位もらうとき便宜はかってももたらえやないか。授業あらへんかったらオレらもその分遊べるし。そう怒らんでもええやろ」

C「そや！ ええ時間できたわ。この間、先生が最後にいわはったベクトル空間の話。あれ誰か教えてくらはれへん。わたし、勉強してへんから思い出しようあらへんし」

A「ああ。あの「ベクトルってなんやろ」ゆうた先生の質問かいな。そやな。中途半端な時間できてもたし。どうしよう。先輩の研究室でもいって聞いてみよか？」

C「わたしもついででかまへんやろか」

A「別に何人いったってええやろ。いこか。確か3階の端っこやった。B おまえどうする？」

B「その大学院の先輩の部屋いったらお茶いれてもらえるんやろか。そやったらいくけど」

A「先輩いますかー。あつ、今日わ。先輩来てるんですね。こんな早よから」
M「早よからはないやろ。もう 11 時前やないか。なんや君ら」
B「K 先生の授業が休講になって。ここ来たらコーヒー飲ましてもらて、ついでにベクトル空間と線形写像の話してもらえるいうんで付いてきました。B です」
C「はじめまして。C います。いま、 $2 + \alpha$ 年生やってます」
M「しゃないなー。まあそのあいたイスに座り。あいにくソファーはふさがってるしー」
A「あの人。ソファーの上で一晩寝てたんですか。ものずきやなー」
M「研究会の発表が迫ってきて。まだデータ取れてへんので徹夜してたんちゃうか。あんまり大声たてんといたり」
C「あの一。唐突なんですけど。ベクトル空間の話やったら何でも知っはるし。教えていだけけるゆうことできたんですけどー。次元についてお願いできればと思います」
N「おーす。いらっしやい。えらいこちゃ。主張先の先生に Fax 送るの忘れてた。昨日取ったデータ Fax せんとあかん。技官さんに頼んでくるわ」
A「あの人おもしろそうな人やな。妙な絵のデータ持ってたけど」
M「A おまえ C さんの質問。ちょっとは答えられるだろ。なんでもええから話始めてみ」
A「まず、ベクトル 1 本取ってくる。いや、ちょっと待って。1 本では話にならん。2 本…。いや、まあええか。やっぱり 1 本からいこ。ベクトルを 1 本

$$\{\mathbf{v}\} \quad (\text{A.1})$$

考える」

C「ねえねえ。そのカッコ $\{\}$ 何？ ベクトルやったら \mathbf{v} と書いたらええんちゃう？」
A「まあ。ベクトル 1 本の集合のつもりやったんやけど。 \mathbf{v} でもええわ。ここで \mathbf{v} をスカラー倍して、長さを伸ばしたり縮めたりメイッパイしたらどうなるか考える」
C「スカラーを $\alpha \in \mathbf{R}$ として $\alpha \mathbf{v}$ ができるんちゃう」
A「いや、集合

$$\{\alpha \mathbf{v} \mid \alpha \in \mathbf{R}\} \quad (\text{A.2})$$

と書いてほしかったなあ」

C「どうでもええんちゃう。そんなん。要するに \mathbf{v} を含んだ 1 本の直線ができるんでしょ。そや、思い出した。空間と集合は意味は一緒やった」
A「そう。この直線を \mathbf{v} が精一杯ガンバッテ作った 1 次元社会という」
C「何やの。1 次元社会って。もしかして 1 次元空間のこと？」
A「うん。1 次元部分空間。式 (A.2) は \mathbf{v} から生まれた 1 次元の世界」
M「ベクトル 1 本の話はそれくらいにして 2 本の場合に話進めたらどうや思うけど。C さん、2 本の場合どう？」
C「いやー。うまいこと誘導尋問しやはるわ。わたし考えるん苦手中の苦手やけど。やっぱり無理や思うわ。ええーと。ベクトル 2 本持ってきて、それぞれスカラー倍して

$$\{\alpha \mathbf{v}_1 \mid \alpha \in \mathbf{R}\}, \{\beta \mathbf{v}_2 \mid \beta \in \mathbf{R}\} \quad (\text{A.3})$$

と 2 つの 1 次元の世界ができる。そや、いまごろ気づいたけど、この 1 次元の世界どっちも原点を通る直線やったんやね」

A「なんや、分かってへんなー、部分空間ゆうたら原点通らなあかんのや」

M「C さん、忘れてるわ、ベクトルは足し算ができること」

C「ええ？ あっそやった、忘れてました、2 本のベクトルで精一杯ガンバッテ作るんやったら

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \quad (\text{A.4})$$

も仲間に入れたげんとあかんのやった」

C「あれえっ！ これどうなってんの？ この足してできるベクトル、

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \notin \{\alpha \mathbf{v}_1 \mid \alpha \in \mathbf{R}\}, \text{ or } \{\beta \mathbf{v}_2 \mid \beta \in \mathbf{R}\} \quad (\text{A.5})$$

やし、2 つの 1 次元世界 (A.3) からはみだしてー、いややわ、M さん、こんなんあってもええん？」

M「そやし

$$\{\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} \quad (\text{A.6})$$

考えたらええ、これが \mathbf{v}_1 と \mathbf{v}_2 で張る 2 次元部分ベクトル空間」

C「…、分かった！ なるほどー、ほんまやねー、ベクトルの足し算って驚異的ちゃう、2 つ別々の 1 次元世界やったんを、ベターと (A.6) の平面にってしまうんやから、これって今日の最大の収穫やわ、目からウロコ賞や思います」

A「やっぱり C は単純や、もっちゃっとシビヤーに考えられへんのかいな、ほな 2 本のベクトルが、

$$\mathbf{v}_2 = \gamma \mathbf{v}_1 \quad (\text{A.7})$$

となったら、あかんやんか」

C「そなん、揚げ足取りや、その場合は

$$\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \gamma \mathbf{v}_1 = (\alpha + \beta \gamma) \mathbf{v}_1 \quad (\text{A.8})$$

やから、結局 1 本しかベクトル考えてえへんのと一緒やんか、1 次元しか出来ません」

A「例外ちゃんとつめとかんと、論理的ちゃう」

C「分かてる、目からウロコが落ちたんで、ちょこちょこした始末はあとでちゃんします」

M「式 (A.7) のような関係があるとき、 \mathbf{v}_1 と \mathbf{v}_2 は一次従属にある、つまり一次独立でないという」

C「やっとしてきたわ、その独立や従属やゆう言葉、もっとちゃんと教えて」

B「ちょっとコーヒーいれるお湯沸かしてもいいですか」

M「ヤカンあすこにあるから、すまん、やってくれる？ コーヒーは戸棚の中にあるブルーマウンテン使こてええわ」

B「はい」

A「そやし、式 (A.7) のとき 2 本のベクトルは従属であると定義する。定義なんや定義、そうゆんや、そうきめたんや」

M「そうむきにならんでもええやろ、

$$\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad (\text{A.9})$$

ならば

$$\alpha = \beta = 0$$

のとき、 \mathbf{v}_1 と \mathbf{v}_2 は、確かに式 (A.7) の関係になり得ないから互いに一次独立というんや、つまり、C さんが直感的にあたりまえや思て見落とした 1 次元にしかならへん場合を従属関係にあるとゆう」

C「ちょっと、わたし、また分からへんようになってしもた、 \mathbf{v}_1 と \mathbf{v}_2 が独立やったら、このお 2 人さんで作る世界が 2 次元部分ベクトル空間、それは分かったんやけど、それやったら 100 本ぐらい独立なベクトルさんに集まってもろたら 100 次元部分ベクトル空間できるんやろか、ベクトルさんの世界全体は何できまるんか教えて？」

B「コーヒーはいったけど…。いまの話、ベクトルいうたら

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

のように成分があるやろ、この場合やったら 3 次元ベクトル」

C「その話とこの話とどう関係してんの、ちょっと混乱するような話横からせんといて、3 次元ベクトルかて 100 本でも 200 本でも用意できるわよ、

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{100} \quad (\text{A.11})$$

と表わしたらおしまいなんやから、これ…の威力」

A「先輩もオレも独立にこだわってんのは、まさにその 1 点にあるんやから、さっしてくれんといかん」

C「何で何で」

M「ベクトル達があつまっている社会、すなわち集合を考えたとして、1 本ベクトル \mathbf{v}_1 を選んできて、1 次元の世界

$$\{\alpha \mathbf{v}_1 \mid \alpha \in \mathbf{R}\} \quad (\text{A.12})$$

をつくる、次にもう 1 本独立なベクトル \mathbf{v}_2 選んできて

$$\{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}\} \quad (\text{A.13})$$

の世界を作る、当然 2 次元部分空間となっている、しかしどう \mathbf{v}_2 選んでも

$$\mathbf{v}_2 = \alpha \mathbf{v}_1 \quad (\text{A.14})$$

のようにしか選びようがなかったら、それは元々 1 本しか独立なベクトルがなかった社会、すなわち 1 次元の世界だったということになる」

M「だから

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad (\text{A.15})$$

は

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad (\text{A.16})$$

に限るとなれば、 \mathbf{v}_1 と \mathbf{v}_2 で 2 次元部分空間を張ることができる。一般に

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad (\text{A.17})$$

となるときは

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0 \quad (\text{A.18})$$

に限るとなると

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\} \quad (\text{A.19})$$

は互いに独立だから、 n 次元部分空間を張る。そして、最後に \mathbf{v}_{n+1} をつけ加えて $(n+1)$ 本の独立なベクトル達をどうしても選ぶことができなくなったとき、このベクトル社会は n 次元ということになる」

C「ふんふん、

独立なベクトルの数＝ベクトル空間の次元

いうことなんやねん」

M「そう」

C「具体的に、さっき B さんがゆうたベクトル (A.10) が 3 次元ベクトルゆうんほどないしたら証明できんの」

A「成分が 3 つしかなかったら 3 本しか独立なベクトルはあらへんというたらええ」

B「そのためやったら、まあ

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

の 3 本のベクトルが互いに 1 次独立やいうといて、これに (A.10) のような任意のベクトルを一緒にして 4 本がもはや 1 次独立には出来へんいうたら終わりや」

A.「なかなかやるやんか、その最後の部分の証明は簡単や、

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{A.21})$$

やから

$$v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 - \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\text{A.22})$$

となって

$$v_1 = v_2 = v_3 = -1 = 0 \quad (\text{A.23})$$

になってえへんから独立ではない」

M「

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \quad (\text{A.24})$$

が互いに独立なことの証明はどうやろ」

B「

$$\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \quad (\text{A.25})$$

いうたらええんやろ. うーん. どうしょ. あ! そうか. 簡単やんか.

$$\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

だから終わり. 以外とあっさりしとるんやな. まあこんな話はなんとかなると思てたけど. やっぱりな」

C「もうー. ええかつこして.

独立なベクトルの数=ベクトル空間の次元=ベクトルの成分の数

いうことよう分かったわ. ありがとう」

O「なんや. あんたら. それにしても眠いなあ. このソファーもうちょっと軟らかかったら最高なんやけど. さっきから独立独立って. どこの国がまた独立したんか思たら. ベクトルの独立かいな. それやったら. 行列式つこたらええ」

C「？」

A「あそうか. 式 (A.24) の 3 本のベクトルは単位行列作ってその行列式はゼロでない！」

M「ああ. すまん. すまん. ちょっと後輩がきてるんで. 安眠妨害して申し訳ない」

O「いやー. そやけどびっくりしたなー. 学部の時に先輩のところにきて勉強する後輩がいるやなんて. どないなってるや. うちの大学は. 入学試験の偏差値でも変わったんやろか」

A「そんなこと言われても… . 今日授業が休講やったから来たんです」

N「カオスのデータやっ先生に Fax できた. … . あんたらまだいたんかいな. ここのコーヒーなかなかやろ. あの眉山の中腹の銘水で入れたか? 冷蔵庫にあったらろ」

B「そなん. もっとはよ言うてください！」

M「食堂がこまんうちにぼつぼつ昼飯いこか. みんなもう一回. 線形代数の教科書のはじめのところにあるベクトル空間の定義みといたらええわ」

A, B, C「どうもコーヒーごちそうさまでした。ありがとうございました。また、お願いします。まだ線形写像の諸々の話残ってますし」

A.2 線形写像

C「今日わ、Mさん、いてはりますか」

M「ああCさん今日わ、今日は一人？」

C「A君と一緒にです。ちょっとA君トイレに…」

M「今日はソファ空いてます。どうぞ」

A「あのトイレ。匂消す脱臭剤かなんか趣味悪いなあ…」

C「この間のつづきお願いできたら思ひまして。線形写像のランクと核できたら分かって帰りたいです」

O「最近あの計算機室のマックときどき暴走しよる。ワープロのソフトがおかしいんかいな。あー。いらっしやい」

A「発表済んだんですか？」

O「土曜日に済んだ。そやし。今日はあんたらの話。聞かしてもらおか」

A「ありがとうございます。さっきCさん言うてましたけど。線形写像の像と核の話お願いします」

O「ベクトル空間を2つ考えてこれを \mathbf{V}_1 と \mathbf{V}_2 としよう。そこで \mathbf{V}_1 から \mathbf{V}_2 への写像：

$$\mathbf{f} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.27})$$

を考える。この写像が

$$\mathbf{f}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta\mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (\text{A.28})$$

の性質を持つとき、 \mathbf{f} を線形写像という」

A「あんまりピーンときません」

O「ごめんごめん。つい張り切ってしまった。 n 次元空間 \mathbf{V}_1 から m 次元空間 \mathbf{V}_2 への写像が具体的にこないなつるとしよう：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbf{V}_1, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathbf{V}_2, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

とおいて

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (\text{A.30})$$

と書けている」

C「そう言うてもろたら，ようわかるわ。

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\beta\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{Ax} + \beta\mathbf{Ay} \quad (\text{A.31})$$

となって，たしかに式 (A.28) を満足してるわ」

O「このとき

1. \mathbf{x} を定義域の空間 \mathbf{V}_1 全体で変えたら，像の \mathbf{y} は空間 \mathbf{V}_2 のどんな集合になるか。
2. \mathbf{V}_2 空間の原点，はよ言うたらゼロ，に写っていく，空間 \mathbf{V}_1 の集合はどんな集合か。

考えよう」

C「いま気づきましたけど，この間の授業で習しえてもろた漸化式：

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) \quad (\text{A.32})$$

k 番目のデータを写像 \mathbf{A} で写したら $\mathbf{x}(k+1)$ になるとしたら，線形写像の繰り返しで漸化式そのものなんちゃう」

O「そう，そやし写像の繰り返し考えることと，同次方程式 (A.32) の解を考えることは同じようなもんなんや。まあ強いて言えば写像のほうは，点を点に写すだけやのうて，集合を集合に写すと思ってもええんで，色々別の性質が見えてくることもある…」

C「先生が何で線形写像思い出せ言わはったんか，これやねん関係は？」

O「話，さっきの問題 1. に返さんと埒あかへん」

A「式 (A.30) やから，写された像の集合は

$$\{\mathbf{y}\} = \{\mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{V}_1\} \quad (\text{A.33})$$

や思うけど…」

O「それ！ きみが今言うた集合，それを写像 \mathbf{A} の像 (image) 言うんや：

$$\text{Im}\mathbf{A} = \text{Image } \mathbf{A} = \{\mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{V}_1\} \quad (\text{A.34})$$

と書く，これは当然 \mathbf{V}_2 の部分ベクトル空間になってる」

C「 $\text{Im } \mathbf{A}$ と書いたら，何や複素数の虚数部みたい，わたし， $\text{Image } \mathbf{A}$ のほうがイメージとして好き，いま，当然言わはったけど， \mathbf{Ax} でいちいち \mathbf{x} 動かして調べられへんし，どない証明しやはるんですか」

O「 Image 言わんと， Range 言う人もいる，それに，証明しやはるん，ちごて「する」んです。

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

と書いたら、みえてくる思うけど…」

A「わかった、ベクトル

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right\} = \{ \mathbf{a}_1 : \mathbf{a}_2 : \dots : \mathbf{a}_n \} \quad (\text{A.36})$$

が張る V_2 の集合やから、先輩の言うように当然部分空間や」

O「

$$\text{Rank } \mathbf{A} = \dim(\text{Image } \mathbf{A}) \quad (\text{A.37})$$

と言う」

C「その rank いうん何て日本語で言うんか教えてくれはらへん」

O「ランクはランクやなー、訳あるんかな、知らんわ」

A「rank \mathbf{A} を計算するには、image \mathbf{A} の次元がわかればなんとかなる。これはどうすれば分かるんですか」

O「もう一回、式 (A.35) 書いてみると

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

」

C「それって、さっき A 君が気づいた \mathbf{A} のイメージやから…。わかった。

$$\text{Rank } \mathbf{A} = \text{independent number of } \{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \} \quad (\text{A.39})$$

でしょ」

O「具体的にこの独立なベクトルの個数を調べる方法は議論してないけど。まあ、1 本づつ付け加えていって、もう独立なベクトルがなくなったら、そこでその数ということになる。ま先に、独立や独立や言うてたときに行列式使う話した思うけど。チェックはベクトルの数と同数の行を適当に選んで行列式がゼロにならないことをみたらええ。Gram 行列というてもあるが…」

O「ところで

$$\text{rank } \mathbf{A} = r < m = \dim \mathbf{V}_2 \quad (\text{A.40})$$

やったら、どんなことになってると思う？」

A「*image* \mathbf{A} の次元が m より小さいことは、*image* \mathbf{A} は部分空間しか張れてない」

C「 $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_1$ をどう選んでも、写すことのできへん \mathbf{V}_2 の元がある言うことちゃう」

A「そう、

$$\mathbf{y} \notin \text{image } \mathbf{A} \quad (\text{A.41})$$

やったら

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \quad (\text{A.42})$$

となる $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_1$ は絶体ない！ あれー、これ連立方程式

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (\text{A.43})$$

が解けるかどうかの判定条件や、

$$\mathbf{b} \in \text{image } \mathbf{A} \quad (\text{A.44})$$

やったら解がある」

C「ちょっとちょっと、ちょっとまって、もう一回書いてみるし、

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ax} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n \quad (\text{A.45})$$

やから、右辺は *image* \mathbf{A} のベクトルやから、左辺の \mathbf{b} が条件 (A.44) 満たしたら、適当な x_1, x_2, \dots, x_n を選んで \mathbf{b} にできる。この x_i 達が解、そやったん、わたし、連立方程式の答えがちょっと見えてきた気するわ」

M「ここで、ついでに $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ とした同次方程式

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \quad (\text{A.46})$$

考えといたらどうやろ」

C「その式、どない読むん？ 教えて」

M「 \mathbf{V}_2 の原点に写る \mathbf{V}_1 の元ってなんだろう？ って読んだら、つまりこれは O が最初に言うた問題の 2 番目そのものってこと、集合

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{V}_1 \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}$$

には、ちゃんと名前があつて

$$\text{Ker } \mathbf{A} = \text{Kernel } \mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V}_1 \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\} \text{ i.e. null space of } \mathbf{A} \quad (\text{A.47})$$

などといわれてる」

C「あっ！ それ核言うんやね、何のやくにたつん？」

A「ともかく同次方程式解いてしまお、それから考えたらええ」

M「ほら、さっき

$$\text{rank } \mathbf{A} = r \quad (\text{A.48})$$

やったら r 本の一次独立なベクトルがあったから、番号を適当に付けかえてこれらを前に持ってきて

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \quad (\text{A.49})$$

としとく.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \quad (\text{A.50})$$

を

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_r\mathbf{a}_r = -(x_{r+1}\mathbf{a}_{r+1} + \dots + x_n\mathbf{a}_n) \quad (\text{A.51})$$

と書き換えといて

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = -(x_{r+1}\mathbf{a}_{r+1} + \dots + x_n\mathbf{a}_n) \quad (\text{A.52})$$

$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_r \end{bmatrix}$ は適当に r 行抜き出してくると行列式は

$$\det \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{r2} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{rr} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (\text{A.53})$$

となつてゼロでないから、この式は解ける」

O「式 (A.46) は、未知数は x_i 達が n 個あつて、式は見かけは m 個あり、そのうち r 個が独立。はよ言うたら式はほんまは r 個しかない。そやし未知数のうち r 個だけは他の未知数の一次式として決められる。これが式 (A.52) の意味や」

M「結局、式 (A.52) から、未知数 $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ は自由に選んでええから、これらの成分を持つベクトルが *Kernel A* を張る」

O「それで

$$\dim \text{Kernel } \mathbf{A} = n - r \quad (\text{A.54})$$

」

M「

$$\dim \text{Image } \mathbf{A} = r \quad (\text{A.55})$$

としたんやったから

$$\dim \text{Image } \mathbf{A} + \dim \text{Kernel } \mathbf{A} = n = \dim \mathbf{V}_1 \quad (\text{A.56})$$

となつている」

A「さすがですね、先輩。なんで大学院いったらとたんにえろうなるんですか」

M「あほ、オマエが勉強不足なんや」

C「わたし、*Kernel A* が部分空間になるん、証明して言おう思たけど、はずかしからやめとく」

O「ほな、ちょっと例やってこの話やめにしよう、 $n \times n$ の行列

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \\ & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.57})$$

どうかな」

A「右上に $(n-1) \times (n-1)$ の単位行列があるから

$$\text{rank } \mathbf{A} = n - 1$$

一列目が零ベクトルで

$$\dim \text{kernel } \mathbf{A} = 1$$

です」

O「はいはい、で

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & 0 & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.58})$$

だったら？」

C「これ、べき零行列言うんでしょ、ななめになってる 1 の対角要素がべきをとる毎に上にづれてく、この場合やったら零ベクトルが 2 列左端にできてる、そやし、…、そやし

$$\text{rank } \mathbf{A}^k = n - k, \quad \dim \text{kernel } \mathbf{A}^k = k \quad (\text{A.59})$$

なります」

O「まいった、今日はここまでや」

A.3 ベクトルの長さ：ベクトルの計量

今回はこの節は省略します。ベクトル空間に内積を定めると長さの概念を得ます。するとベクトル列の収束の概念が使えるようになります。たぶん、みなさんは既によく知っていることでしょう。自分で物語を作ってみましょう。作品ができたらぜひ持ってきて下さい。次のプリントに掲載しますから…。

Linear algebra is a language and a collection of results used throughout mathematics and in a great many applications. Elementary linear algebra is not very difficult; in fact, mathematicians tend to consider a problem solved when they can say: "and now it's just linear algebra." For all that, the field involves a number of ideas that are typical of modern mathematics and rather foreign to students whose background is strictly calculus.

Furthermore, although basic linear algebra is rather simple, the problem for the beginner is that it takes so many words to describe the simple procedures and results that the subject may seem tedious and deadly.

From J.H. Hubbard and B.H. West: *Differential Equations: Dynamical Systems Approach*, Springer-Verlag, 1995.

付録 B

演算子ポストリユード

とある年の風薫るころ、私の部屋に駆け込んできたとある学生の質問からこのお話は発展したのでした。

それは木内先生の通信工学のプリントから始まります。だからこのお話は *Fourier* 変換とミクシンスキーの演算子へのイントロなのです。あ、そうそう *Fourier* 変換とは

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

という変換のことです。Laplace 変換との違いが何なのか気になるところです。すべては木内先生にバトンタッチしましょう。では、ごきげんよう。

B.1 たたみ込み積ってなんなの

1. 信号と呼ばれる時間の関数たちの物語を部分積分にささえられながら再構築してみる。これは、わくわくするくらいおもしろそうな物語となりそうだ。プリントの前半をさーと読んでから、どうゆう枠組みで自分だけのストーリーを作るかを考えてみた。主役はやっぱり複素正弦波

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (\text{B.1})$$

をお願いすることにしよう。彼女を中心に主題は、

- 基本となる信号：複素正弦波、インパルス、そしてステップ関数
- 信号の加工：時間と振幅に関する反転、シフト、そしてスケーリング
- 信号の積：内積とたたみ込み積
- そして応用：通信理論、システム解析、微分方程式、確率論、エルゴート理論

と展開させたい。できるだけ簡素な素材を選び、それを加工し、ツールを使って良い作品にしたい。話はかなり長くなりそうなので、今回はそのツールとしての「信号の積」の一部をとりあげてみよう。

2. 2つの信号 $f(t), g(t)$ の積ってどんなものがあるのだろう.

$$f(t)g(t) \quad (\text{B.2})$$

もちろん積には違いないが、これは関数の積というよりは関数の値の積というべきであろう。関数の全体像を反映させるには、どうしても

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt \quad (\text{B.3})$$

のような操作が必要となりそうだ。これだって周期 T の仲間内の積だとすると

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\overline{g(t)} dt \quad (\text{B.4})$$

なんかを考えたくなるし、式 (B.3) は何となく何処からか $f(t)$ と $g(t)$ を持ってきて組み合わせたって感じである。一応、式 (B.4) は内積、式 (B.3) は得体が知れないので単に「関数対の積」ってことにして、それぞれ次の記号で書いておくことにする。

$$(f(t) | g(t)) = \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\overline{g(\tau)} d\tau \quad (\text{B.5})$$

$$\langle f(t) | g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(\tau) d\tau \quad (\text{B.6})$$

ここで注意する必要があることと言えば、これらは実は「積」の資格を持っていないということだろう。なぜって、積をとった後の結果が元の関数たちの仲間にはなっていないくて、単なる「数すなわちスカラー」になってしまっているからだ。ちょうど2つのベクトルの内積がスカラーとなって、ほんとうの積となっていないように、この場合も2つの関数を掛け合わせたとたんに数に変身してしまっているのだ。

ここで主役と基本信号に登場ねがって、少し具体例をみておこう。

1) 正弦波 $g(t) = e^{j\omega t}$ の場合

式 (B.5) に入れてみると

$$(f(t) | e^{j\omega t}) = \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\overline{e^{j\omega\tau}} d\tau = \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{B.7})$$

これは *Fourier* 級数の基本調波成分でした。では、式 (B.6) に入れてみましょう。

$$\langle f(t) | e^{j\omega t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{j\omega\tau} d\tau \quad (\text{B.8})$$

こちらのほうは別に名もない只の積分した結果でした。もちろん

$$\langle f(t) | \overline{e^{j\omega t}} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = F(\omega) \quad (\text{B.9})$$

こうしてあげると、れっきとした *Fourier* 変換の公式となります。おっと失礼しました。式 (B.8) も $f(t) = 1$ (直流) としてみると

$$\langle 1 | e^{j\omega t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\tau = 2\pi\delta(\omega) \quad (\text{B.10})$$

などという空恐ろしい公式が出てくるのでした。これも K 先生のプリントには重要公式としてあげられています。

2) インパルスとステップの場合

これらは得体が知れないので、式 (B.6) を使いましょう。

$$\langle f(t) | \delta(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau) d\tau = f(0) \quad (\text{B.11})$$

$$\langle f(t) | u(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)u(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \quad (\text{B.12})$$

式 (B.11) はインパルス発祥の式だったのですね。式 (B.12) はまたしても只の定積分。ちょっと細工してみましょう。

$$\langle f(t) | u(\alpha - t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)u(\alpha - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\alpha} f(\tau) d\tau \quad (\text{B.13})$$

$f(t)$ の不定積分が登場します。つまり関数の誕生です。ここで、時間軸を反転させて、 α だけシフトさせたところがみそなのです。こうすると

$$\int_{-\infty}^{\alpha} f(\tau) d\tau = F(\alpha)$$

となって ($F(t)$ は単に積分された関数を表す, *Fourier* 変換に有らず), 改めて α とを t と書き直すと

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = F(t) \quad (\text{B.14})$$

となって新しい関数が生み出されているわけです。そこで関数の積から、新しい関数をつくる「本当の積」を

$$h(t) = \langle f(\sigma) | g(t - \sigma) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau = f(t) * g(t) \quad (\text{B.15})$$

と書いて「信号 $f(t)$ と $g(t)$ のたたみ込み積」と呼ぶことにしましょう。

式 (B.14) のような積がなぜ考えられたのか。たとえば

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t + \tau) d\tau \quad (\text{B.16})$$

ではなぜいけないのか。それはドラマが展開するに従ってだんだん納得できることなのでしょう。積とは何か 1 度再考するのも良いでしょう。* が積を表す記号に使われていることや、積分の中身は τ を使っているけれど積の引数は t となっていることにも注意しましょう。

3. さて、例題からいつのまにか合成積を作ってしまったが別に他意があったわけではない。ことの弾みというだけのこと。例題で遊んでいたらひょっこり本題に迷い込んだだけってこともあるのです。では早速、式 (B.15) から出発しておもしろそうな式の織りなす風景をみてみましょう。念のため式 (B.15) を改めて定義式として書いておきます。

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau) d\tau \quad (\text{B.17})$$

基本関数からおもしろい公式が得られることに味をしめたので、やってみましょう。話はそこから展開するのです。それは、決して抽象的な一般論から導かれる一例題ではないのです。物を産み出すことはまったく逆の過程であることのほうが普通なのです。でも、授業ではなぜか一般論を話してしまうことが多いようです。できあがっているものを教えるには、そのほうがはるかに楽ですから。でも、創る過程はしばしばその逆であることも知っておいて下さい。では、一気に基本関数のたたみ込み積を書き下しましょう。

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau) d\tau = f(t) \quad (\text{B.18})$$

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)u(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \quad (\text{B.19})$$

$$f(t) * e^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} \quad (\text{B.20})$$

何がみえますか。式 (B.18)。インパルスさんはたたみ込み積の単位元だったのですね。式 (B.19) は積分。いやはや、式 (B.20) はすごいですね。正弦波さんがたたみ込み積の固有関数で、その固有値

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{B.21})$$

が $f(t)$ の Fourier 変換だったなんて、ちょっと頭が混乱してきました。正弦波さんがこの世界では普通の人で、直流さんは空恐ろしい怪物 (式 (B.10) をみよ) にみえてきました。これは交流理論で直流回路を習って交流回路で苦しんだことと世界が逆転しているではありませんか。え、言っていることがぴんとこない？ よろしい直流のたたみ込み積をつくりましょう。

$$1 * e^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} = 2\pi\delta(\omega) e^{j\omega t} \quad (\text{B.22})$$

うーむ。たつたつた。直流と交流はこんな関係にあったのか。お互いに相手は怪物だったのだ。何をみるって？ もちろん変換対 $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$ ですよ。なんだー。これって単に直流は $\omega = 0$ ってこと言ってるだけじゃーない。うん、あたりまえのことは難しいってことなの。あらあら、式 (B.20) は式 (B.17) の最後の式でたたみ込み積すれば $2\pi\delta(\omega)$ になって上の結果にならないわ。

4. ついでのことだからたたみ込み積に正弦波さんをたたみ込み積しておきましょう。いま、

$$g(t) = f(t) * h(t) \quad (\text{B.23})$$

として

$$g(t) * e^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = G(\omega) e^{j\omega t} \quad (\text{B.24})$$

一方

$$\begin{aligned} f(t) * h(t) * e^{j\omega t} &= f(t) * \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = f(t) * H(\omega) e^{j\omega t} \\ &= H(\omega) f(t) * e^{j\omega t} = H(\omega) F(\omega) e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

したがって

$$G(\omega) = H(\omega) F(\omega) \quad (\text{B.26})$$

つまり、*Fourier* 変換された周波数の世界では、たたみ込み積は只の積なのです。だったら *Fourier* 変換された世界で考えるほうが楽というものです。実際みんなそうしてますよね。

5. でもせっかくだからたたみ込み積すなわち実時間の信号の世界でがんばってみましょう。変換した世界でうまくゆくのなら、こちらでだつてうまくゆくはずでしょう。

ちょっとためしに線形時不変系 S の応答を計算してみましょう。いま、 S にインパルス信号 $\delta(t)$ を印加して得られるインパルス応答を $h(t)$ としましょう。時不変性によって $\delta(t-\tau)$ の応答は $h(t-\tau)$ となります。そこでスカラー倍 $f(\tau)$ をして、信号 $f(t)\delta(t-\tau)$ を印加すると応答 $f(\tau)h(t-\tau)$ が得られます。結局信号

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau) d\tau = f(t) * \delta(t)$$

(式 (B.18) をみよ) に対して、応答

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau) d\tau = f(t) * h(t) \quad (\text{B.27})$$

がみえてくるわけです。これは式 (B.26) を時間領域で考えたことにほかなりません。6.

ではインパルス応答 $h(t)$ はどうやって求めたらいいのでしょうか。まいった。ここでこのストーリーは中断します。不勉強をお許し下さい。ここからはミクシンスキーさんにバトンタッチしたほうがいいでしょう。たぶん彼の演算子法がこの問題を鮮やかに解いてくれると思います。それにしても、どこがお手上げなのか少しだけみておきましょう。

簡単のため、また例で考えることにします。 RC 回路のインパルス応答を考えましょう。回路方程式は K 先生のプリント 59 ページにあるように

$$RC \frac{dv}{dt} + v = \delta(t) \quad (\text{B.28})$$

で表されます。さて、これをたたみ込み積を用いて解きたいのです。左辺をたたみ込み積で表現することにしましょう。式 (B.18) を用いて

$$v(t) = \delta(t) * v(t) \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d\delta(t)}{dt} * v(t)$$

そこで、式 (B.28) は次式と書き換えられます：

$$\left[RC \frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t) \right] * v(t) = \delta(t) \quad (\text{B.30})$$

問題なのは、ここで左辺の逆元 (Green 関数) を求める手段がいまのところ無いことです。それでお手上げというわけ。2つの関数の掛け算は作ったけどわり算まで考えてなかった。

しょうがないのでここでは直接求めることはひとまず諦め、Fourier 変換で答えを出してしまうことにしましょう。式 (B.30) の両辺を Fourier 変換して

$$[j\omega RC + 1] V(\omega) = 1 \quad (\text{B.31})$$

割り算し (自由に割れるって、なんと幸せなんでしょう)

$$V(\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{1}{RC} \frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}} \quad (\text{B.32})$$

これを逆変換して

$$v(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} u(t) \quad (\text{B.33})$$

やれやれということ、とりあえずはインパルス応答が求められました。

A「式 (B.31) の $j\omega$ がわからないのですが…」

K「インパルスの微分の Fourier 変換でしょうか。」

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta}{dt} e^{-j\omega\tau} d\tau = \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = j\omega \quad (\text{B.34})$$

となり、微分は $j\omega$ を掛けることになります」

B「そういえば、式 (B.29) の第 2 式も分かりません」

K「ああ、あの式。あれは

$$\begin{aligned} f(t) * \frac{d\delta(t)}{dt} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{d\delta(t-\tau)}{dt} d\tau \\ &= -\delta(t-\tau) f(\tau) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau = \frac{df(t)}{dt} \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

でどうでしょうか」

C「結局のところ、たたみ込み積って何ナノかしら？ 周波数の世界の積が時間の世界でたたみ込み積だったことなの」

K「それが色々な応用に出会ったとき、自然をみる道具すなわち何かを測定することそのものだってことは、実例をみないと納得できないんじゃないかな」

C「あたってるかどうか分からないけどー、ここにある式が1つ書いてあるとします。それは誰にでもみえるんだけど、理解したり分かったと思えるのは私たち見る側の測定装置、言い換えると各人のインパルス応答によってっのよ。分かろうとするのはたたみ込み積をとってるってことなのよ、きっと。わたしのインパルス応答どうすれば良くなるのかしら」

A「だは！ それ飛躍だよ飛躍。しかし式 (B.31) の左辺、*Fourier* 変換の結果が交流理論とはなあ」

B「オレは先生の話全部聞いてみんとなんとも言えん。ただ、ツールとしてのたたみ込み積ということでシャープに問題をしばってもらったことはありがたかった。この話、周波数側から同じようにたたみ込み積でせめたらどうなるのかやってほしい。ですね…」

K「きついなー。やるのは君自身だよ。サンプリング定理の証明でも考えてみたら」

C「わたし。ミクシンスキーさんの話のほうがか聞きたいわ」

K「ちょうど会議の時間になった。今日はこれでおしまい」

B.2 たたみ込み積商って超関数なの

1. 前回は合たたみ込み積成積の素顔に迫ってみたのだが、微分方程式を解こうとして何だか行き詰まってしまった。その反省もこめて再度挑戦してみよう。実際、この前の行き詰まりはたたみ込み積の逆算が勉強不足だったのだ。この点に注意して出直そう。

微分方程式を解くという目的からすると、1つの方程式に初期値も繰り込まれているほうが何かと便利であろう。そこで今回は信号の集合を

$$\{f(t) : f(t) = 0 \text{ for } t < 0\} \quad (\text{B.36})$$

となっている関数に制限しよう。時刻の原点を $t = 0$ に選択する理由は、時不変性すなわち自律系 (autonomous system) を考えることを暗に意味している。このとき *Fourier* 変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{B.37})$$

となって、片側 *Fourier* 変換となる。また、たたみ込み積は

$$f(t) * g(t) = \int_0^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (\text{B.38})$$

となる。それぞれ、積分する範囲が関数達 (B.36) の影響で狭められてしまう。

A「 $t < 0$ で $f(t) = 0$ となる関数ということですが、なぜ $t = 0$ に選ぶのですか。自律系を暗に意味しているという意味が分かりません。 $t < t_0$ (任意定数) で $f(t) = 0$ とした方が一般性があると思うのですが…」

K「自律系とは、時間軸のシフト $t = t - t_0$ に関して不変な系を意味しています。ですから時間軸のシフトが自由ということは、我々にとって最も快い $t = 0$ とするのが常識人です。0 は $-\infty$ と $+\infty$ の中間という意味で時間軸の反転に関する対称性を持つ点です」

B「関数のクラスを (B.36) に制限してしまうと、たたみ込み積を取った場合、積分の下限が 0 となるのはすぐ納得できましたが、上限が t になってしまうのは意外でした。積を取った際にどちらかの関数の時間反転をするのですから、これも当たり前なのですが…。大抵の教科書では式 (B.38) の最後の式を定義式にしているんで、このことを考えていませんでした」

K「いつもの事ながら、何でこんな定義なんだ、ってことは一応疑っておいた方がいいでしょう。実は、関数を式 (B.36) のクラスにしぼって、更に連続関数とか、 t の多項式とかのクラスとすると、

$$f(t) * g(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) \equiv 0 \text{ or } g(t) \equiv 0 \quad (\text{B.39})$$

の関係が導かれて（これは証明が大変）積から商への準備ができていているということです」

2. 前回に習って、基本関数を適用してみよう。

$$f(t) * \delta(t) = \int_0^t f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t) \quad (\text{B.40})$$

$$f(t) * u(t) = \int_0^t f(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (\text{B.41})$$

$$f(t) * e^{st} = \int_0^t f(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = \left[\int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] e^{st} \quad (\text{B.42})$$

C「この前の公式を積分の範囲だけ変更したんですね。ワープロだとカット & ペーストにちょっと手を加えるだけで手間がかからないわ。でも、最後の公式は回路 3 で習った Laplace 変換になってるでしょ。積分の上限を元に戻してあるところなんて許せないんじゃないかしら」

K「そうかなー。講義のときにたたみ込み積の Laplace 変換を証明する式で

$$\int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t u(\tau) v(t - \tau) d\tau \right] dt = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^\infty u(\tau) v(t - \tau) d\tau \right] dt = \dots \quad (\text{B.43})$$

とやったときは、関数を式 (B.36) にしぼってあるからこうしてもよいと説明したら、何も文句は出なかったじゃないか。まあ、それはともかく、ここではこの前あきらめたたたみ込み積の逆算を考えたいんだ。上の式 (B.40) - (B.42) だと

$$\delta(t) = \frac{f(t)}{f(t)}, \quad u(t) = \frac{\int_0^t f(\tau) d\tau}{f(t)}, \quad e^{st} = \frac{\int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau}{f(t)} \quad (\text{B.44})$$

ってとこかな」

B「何ですかそれ！ 関数で関数を割るってことですか？ 意味ないんじゃないですか」

K「そう怒るなよ。これに意味づけたいって願望なんだ。実は、1930年代に既にポーランドの Mikusinski^{*1} さんがちゃんと数学的に議論しているんだ。日本では、1980年頃吉田先生^{*2} とそのお弟子さんの岡本さんが、更に使いやすくしてくれている。これらを紹介したいんだが、にわか勉強なので「ウソ」を平気でつくかも知れない。注意しておいてほしい」

A「いつの間にかたたみ込み積の記号が消えて、只の分数の記号になってしまってるのはまぎらわしいですね。そのうちゴマかされそうです」

K「そうみんなナーバスになるなよ。もともと整数から分数を作ったときの小学生気分を思い出してくれよ。しかしまあ式 (B.44) ではやっぱり誤解を招きそうだ。すこし関数の表記法や記号の使い方を工夫することにしよう」

3. 今後はしばらく Mikusinski さんや吉田先生に習って関数を表す記号に中括弧を使うことにしよう。たとえば $f(t)$ を $\{f\}$ のように書く。定数 1 と定数関数 $\{1\}$ を間違えないようにしてほしい。我々はこれまで unit step function を $u(t)$ と書いてきたので

$$\{1\} = \{u\} \quad (\text{B.45})$$

ということになる。この式は、ステップ関数に $\{1\}$ を使うのは Mikusinski - 吉田 (今後略して MY) の記法、 $\{u\}$ を使うのは我々という意味でみてほしい。

たたみ込み積の記号 $*$ を使うのをやめにして、単に並べて書いてたたみ込み積を表すことにする。従って

$$\{f\}\{g\} = f(t) * g(t) \quad (\text{B.46})$$

ということになる。やはり、左辺が MY の記法、右辺がこれまで使ってきた記法を表す。この記法を使うと式 (B.40) - (B.42) は次のように書かれる。

$$\{f\}\{\delta\} = \{f\} \quad (\text{B.47})$$

$$\{f\}\{1\} = \{f\}\{u\} = \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} \quad (\text{B.48})$$

$$\{f\}\{e^{st}\} = \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \{e^{st}\} \quad (\text{B.49})$$

更に MY 記法では、よく出てくる関数に括弧を付けない関数名を付けている。式 (B.48) より定数関数 $\{1\}$ はたたみ込み積では $\{f\}$ の積分を表すので

$$\ell = h = u = \{1\} \quad (\text{B.50})$$

と書く。エルを使ったのは Mikusinski, エッチは吉田先生でその意味は Heaviside 関数のこと、そして最後のユーは、ここだけの我々の記号。式 (B.45), (B.48) でユーを括弧の

^{*1} ミクシンスキー著、松村英之、松浦重武訳：演算子法 上, 下, 裳華房, 1963.

^{*2} 吉田耕作著：演算子法—一つの超関数論—, 東京大学出版会, 1982.

中に使っていたが $\{1\}$ にその座をゆずって、そのかわり括弧の外で記号として使うことにする。試しに u を積ってみると

$$uu = u^2 = \{1\} \{1\} = \int_0^t d\tau = \{t\} \quad (\text{B.51})$$

$$u^3 = \int_0^t \tau d\tau = \left\{ \frac{t^2}{2!} \right\} \quad (\text{B.52})$$

$$u^n = \left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right\} \quad (\text{B.53})$$

などの関係式が得られる。

C「それで先生は式 (B.44) を

$$\{\delta\} = \frac{\{f\}}{\{f\}}, \quad u = \frac{\int_0^t f(\tau) d\tau}{\{f\}}, \quad \{e^{st}\} = \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \frac{1}{\{f\}} \quad (\text{B.54})$$

と書くんでしょう。でもこれだと

$$\{\delta\} = \frac{\{f\}}{\{f\}} = 1 \quad (\text{B.55})$$

とか書きたくなるわ。同じものが分母分子にあると割ってしまいたいもの。いやーだ。デルタ関数が定数 1 になってしまったわ」

K「いいじゃないか。合成商の世界ではデルタ関数と定数 1 は同値ということを表しているってことで、ある関係から見ると、違っているものでも同じに見える。この「みかた」が本質なんだ。たとえば、人間を $\{\sigma, \rho\}$ の関係で見ると A 君 = B 君となる。」

A, B「やめてください。ぼくらをホモにするんですか」

4. Unit step 関数 u の逆数として

$$s = \frac{1}{u} = \frac{1}{\{1\}} \quad (\text{B.56})$$

を考えよう。これはもはや関数ではない。ミクシンスキーさんは「演算子」と名付けている。

$$us = u \frac{1}{u} = su = \frac{\{1\}}{\{1\}} = 1 \quad (\text{B.57})$$

$$\begin{aligned} u \left\{ \frac{df}{dt} \right\} &= \{1\} \left\{ \frac{df}{dt} \right\} = \left\{ \int_0^t \frac{df}{d\tau} d\tau \right\} = \{f(t) - f(0)\} \\ &= \{f\} - \{f(0)\} = \{f\} - f(0) \{1\} = \{f\} - f(0) u \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

だから、式 (B.58) の両辺に s をかけて

$$su \left\{ \frac{df}{dt} \right\} = \left\{ \frac{df}{dt} \right\} = s \{f\} - sf(0) u = s \{f\} - f(0) su = s \{f\} - f(0)$$

すなわち

$$\left\{ \frac{df}{dt} \right\} = s \{f\} - f(0) \quad (\text{B.59})$$

を得る. このことから直ちに

$$\left\{ \frac{d^2f}{dt^2} \right\} = s^2 \{f\} - sf(0) - \frac{df}{dt}(0) \quad (\text{B.60})$$

が計算できる.

A「なんだか育ちは違うが, 結果は *Laplace* 変換の公式と同じですね」

K「そうなんだ. 結果はいまのところまったく同じといってよい. 出し方が違っている. もちろん s の意味もまったく違っている. でも, こちらの方がよっぽど簡単だ. たとえば定義式 (B.56) から

$$u = \{1\} = \frac{1}{s} \quad (\text{B.61})$$

式 (B.59) に具体的な関数を入れて計算すると,

$$s \{e^{\alpha t}\} = 1 + \alpha \{e^{\alpha t}\}$$

から

$$\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s - \alpha} \quad (\text{B.62})$$

同様に

$$\left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha t} \right\} = \frac{1}{(s - \alpha)^n} \quad (\text{B.63})$$

$$\{e^{\alpha t} \sin \beta t\} = \frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \quad (\text{B.64})$$

$$\{e^{\alpha t} \cos \beta t\} = \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \quad (\text{B.65})$$

などが得られる」

B「逆に考えれば *Laplace* 変換の公式も複素積分なんかせずに, 微分の公式 (B.59) を積極的に使えということですね. $\{ \}$ を $\mathcal{L}[\]$ と読み変えるいいんですね」

K「いやに *Laplace* 変換にこだわってるね. どうでもいいじゃないか. もっとも, 式 (B.42) との関係で議論してくれるのだとおもしろいのだがね. さて, 話はこれまでさ. あとは君らで好きなように展開してごらん」

C「先生. 一応は前回の宿題, 解答しておいた方が印象いいと思うわ. では, やってみまず. まず

$$RC \frac{dv}{dt} + v = \delta(t) \quad (\text{B.66})$$

を解きたいのでした. 両辺を変換します. これって何変換と言ったらいいのかしら. M 変換, それとも MY 変換かしら. とにかく次式となります.

$$RC [s \{v\} - v(0)] + \{v\} = 1 \quad (\text{B.67})$$

初期値は 0 ということで整理すると

$$\{v\} = \frac{1}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \quad (\text{B.68})$$

あ！ そうだったわ。これって変換なんかじゃなくて左辺の関数を右辺の演算子で表現したってことじゃない。失礼しました。右辺の演算子を、式 (B.62) で関数表現すれば

$$\{v\} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (\text{B.69})$$

うーん。なんだかゆったりした気分だわ」

K「今回はこれまでということで解散。せいぜい夏休みは遊びましょう。創造力は遊び心なくして養うことはできませんから。ええ。遊ぶことがこんなに苦しいってことが分かったとき、つまらない真面目人間が誕生するでしょうよ。では 9 月までごきげんよう」

吉田・岡本の演算子法まとめ

ミクシンスキーは、本文注 1 の本の中で、連続関数の集合を

$$C = \{f(t) : f(t) = 0 \text{ for } t < 0, \text{ and } f \text{ is continuous}\} \quad (\text{B.70})$$

としたとき、この集合の中の関数による合成積が

$$\{f\}\{g\} = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \equiv 0 \Leftrightarrow f(t) \equiv 0 \text{ or } g(t) \equiv 0 \quad (\text{B.71})$$

の性質を持つことに着目した。この性質があると、 f/g の形の分数を定義し、これから生成される要素を (B.70) の集合につけ加えると、和と積が自由に行える環をつくることができる。商 (合成積商) f/g は、もはや一般には関数とはならず、これを演算子と呼んだ。彼はこの演算子を使って微分方程式の簡潔な解法を展開した。なお、式 (B.71) の性質は、Tichmarsh の定理と呼ばれ、その証明が大変であることは注 1 の本の中で 9 ページを費やす証明から、その一端を知ることが出来る。しかし、これを認めると、この演算子法は単にスカラーの四則を行うと同様の感覚で使うことが出来る便利な算法となる。

他方、吉田・岡村は本文注 2 の本の中で、単位ステップ関数のべきからなる集合：

$$\{u^n : u(t) = 1 \text{ for } t > 0, n = 1, 2, 3, \dots\} \quad (\text{B.72})$$

に着目し、その商

$$\frac{1}{u} = s, \frac{1}{u^n}, \frac{\{f\}}{u^n}, \dots \quad (\text{B.73})$$

について環を構成し、定係数線形常微分方程式を解く程度の問題では、この演算子で十分であることを示している。この場合、性質：

$$\{u^n\}\{f\} \equiv 0 \Leftrightarrow f(t) \equiv 0 \quad (\text{B.74})$$

を示すことは、わずか 9 行程度の証明となる。これらの演算子法で定義された合成積商は関数や関数の微分の概念の拡張と考えられ、それをミクシンスキーは「演算子」、吉田・岡本は「超関数」と呼んでいる。吉田先生の本は 170 ページのコンパクトさと、回路 3 の講義内容程度の応用では最初の 30 ページを読めば十分といえる簡潔さを持つ良書である。

演算子法の便利さは、もしかしたら我々があまりにも「数学的に複雑な構造の対象」を知りすぎているために、理解できないのかも知れない。ここに簡単な例をあげて、その構造をみておこう。いま、次の問題を考える。「おばあさんから 10 個のりんごが送られてきた。お父さんとお母さんに 2 つずつ残して、2 人の姉妹で残りを平等に分けた。1 人何個になるでしょう」

$$2x + 4 = 10 \Rightarrow x = \frac{10 - 4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad (\text{B.75})$$

ここで注目してほしいことは、3 個という解を得る過程で $6/2$ という分数を使ったことである。この方程式は、分数を使うことなく整数だけを用いて解くことも勿論できるであろう。しかし、「整数」→「分数」→「整数」の過程を通して、機械的に解くことができる点が何とも魅力的である。

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \Rightarrow Lsi + Ri = \frac{E}{s} \Rightarrow i = \frac{E}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right) \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} \left\{ 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right\} \quad (\text{B.76})$$

そして、上式にもまた「関数」→「演算子」→「関数」の構造がそっくり同じ形で現れてくることに気づいたであろうか。演算子が分からないと思ったのは、実は分数が良く分かっていたいなかったのである。

えっ！ おばあさんが送ってくれたりんごは実は 15 個だったって？ ラッキー！ おばあさんはすばらしい演算子解をプレゼントしてくれました。ありがとう、おばあさん。

Comme on l'a souvent dit, il n'est pas de "Mathématiques sans larmes" à l'usage des physiciens et des ingénieurs. Le physicien et l'ingénieur moderne ont besoin d'un énorme volume de connaissances mathématiques, dans les domaines les plus divers.

extrait de la préface des Cours d'analyse par L. Schwartz.