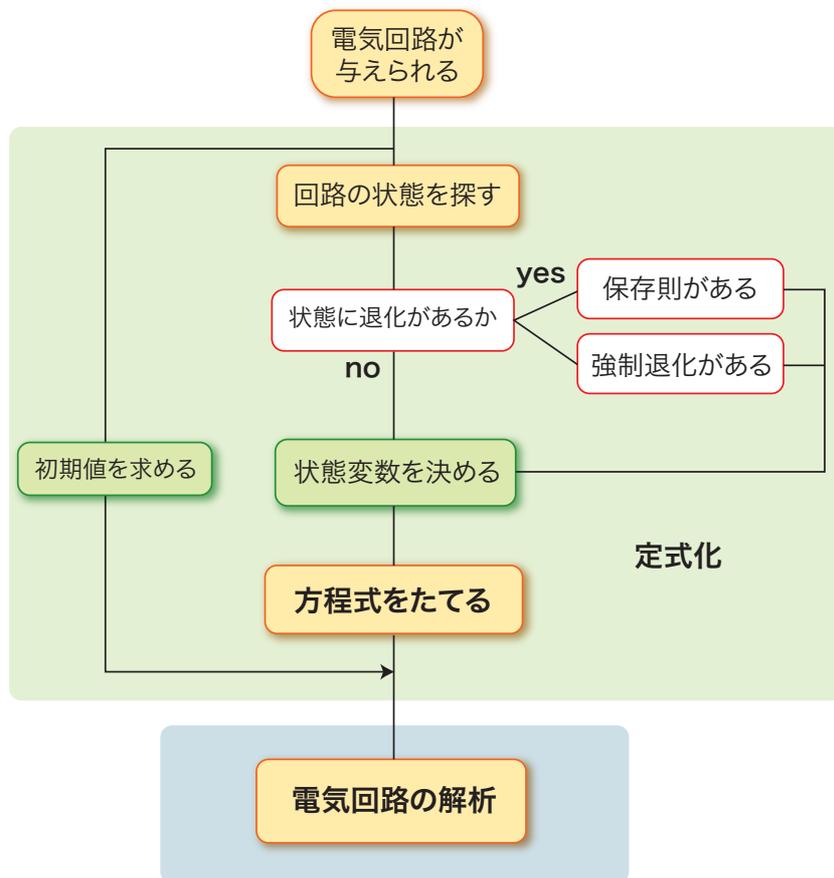


電気回路の状態方程式

一系統的に求めるには一



1998

川上 博

はじめに

一般に、電気現象は、「電荷」と呼ばれる「電気の素」がこの世界に存在することに起因して生じる。電荷が複数個あれば、「電荷間の力に関係した現象」が観測される。この現象を「電場」と「磁場」という2つの言葉で法則として定式化した理論が「電気磁気学」である。電気磁気学は、電荷とその流れである電流によっておこる電場と磁場の時間・空間的性質を探求する。

さて、電気磁気学は時間空間的に現象を説明するので結構複雑となり、テレビやコンピュータの設計に応用するにはやや不適切と考えられる。そこで、空間的に起こる電磁現象をカプセル化^{*1}し、時間的に変化する電磁現象のみに着目し、現象を素子化して、素子達のつなぎ合わせにより現象を設計する理論が考え出された。これが「電気回路理論」である。

カプセル化、すなわち要素化し、要素達を組み合わせることによって望ましい機能をもつ人工システムをつくることは、工学の設計手法のひとつである。このようなシステムは、動的システムとして解析が一般的に扱えることから「集中定数系」と呼ばれている。電気回路は、集中定数系の典型的な例となっている。

このことから、電気回路は、他の力学系と異なって、どちらかといえば我々が理想化し都合の良いように設計した物理系といえる。工学で扱うシステムであるから設計された系であることは当然といえばそうかも知れないが、回路は特にこの傾向が著しい。このことが他のシステムとのアナロジーの豊富さとなっているとも考えられる。

電気回路はまた、常微分方程式の初期値問題をモデリングするのに最も適した、簡単かつ身近な物理系である。実際、力学系で出くわす大抵の方程式は回路で実現することができる。すなわち、抵抗・キャパシタ・インダクタなどの回路素子をハンダ付けし、回路を構成することができる。このようにして回路で作った系は自然界に存在する「生の系」と違って

- パラメータや初期値を自在に変えて現象を観察することができる。
- 現象の起る「速さ」を自由に変えて現象をみることができる。

など、シミュレータとして都合の良い性質を持っている。

さて、電気回路は古典力学とどこが違うのであろうか。これは、端的に言ってしまうと「回路には抵抗素子が含まれている」という点であるといえる。すなわち、回路方程式には自然な形で散逸的性質が組み入れられている。しかも抵抗の値は正にも負にもなりえる。勿論、抵抗を含まないキャパシタとインダクタからなる回路は古典力学同様 Hamilton 系となる。このように、電気回路は素子特性に非線形特性を許すとかかなり広い範囲の力学系を模擬できることがわかる。

このノートは、以前に学生用の講義補足資料として作った資料を今回少し加筆したものである。回路方程式の導出法は 1950 - 1960 年代に完成した。ここでは簡単な回路例を使って回路方程式の系統的な導出法を振り返ることにする。

2011 年 5 月 川上 博

^{*1} 空間的に狭い領域に現象を閉じこめ、「理論的には空間的な考慮をしなくていいように素子化（あるいは要素化）すること」をここではカプセル化と呼んだ。これは力学における質点の考え方の同じ考え方と言える。

目次

第 1 章	グラフと電気回路	1
1.1	回路とそのグラフ	1
1.2	グラフの木と補木	2
1.3	基本カットセットと基本ループ	3
1.4	キルヒホッフの法則の記述	5
1.5	3種類の回路素子	7
1.6	線形抵抗回路の解析法	9
1.7	発振回路：状態方程式の例	10
1.8	強制振動回路	12
第 2 章	状態の拘束条件と接続の関係	14
2.1	接続による状態の拘束	14
2.2	カットセットの電荷保存則とループの磁束保存則	15
2.3	強制退化と速い過渡現象	17
2.4	状態の拘束条件を調べるためのグラフの木	21
第 3 章	標準木を持つ回路の状態方程式	26
3.1	標準木を持つ回路の例	26
3.2	標準木を持つ線形回路の状態方程式	29
3.3	完全回路とポテンシャル表現	32
3.4	寄生素子を考える必要のある回路例	39
参考文献		42

第 1 章

グラフと電気回路

この章では、回路の接続関係を調べるために必要なグラフの性質について、さし当たり知っておくと便利な事柄について述べる。状態方程式を導くためには、キルヒホフの法則をうまく記述し、回路の微分方程式が 1 階連立微分方程式をなるよう工夫することが大切な事柄となる。グラフの「木」と「補木」の概念はそのために本質的な役割を果たすことになる。

1.1 回路とそのグラフ

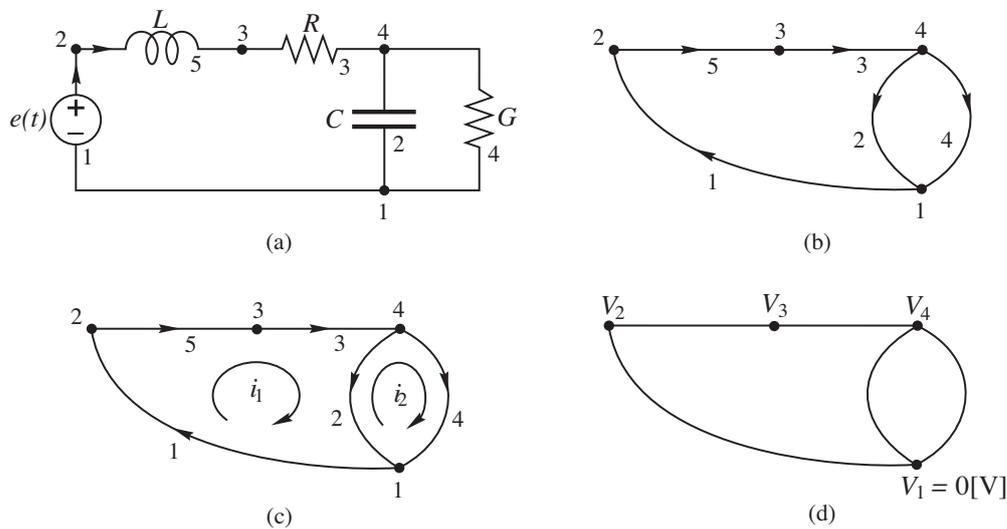


図 1.1 回路例 (a) とそのグラフ (b), 閉路電流 (c), 節点電圧 (d).

回路図は、実に多くの情報を表現している。このうち素子の接続から導かれる性質にのみ着目するとどうなるか考えてみよう。

有限個の回路素子を、端子どうし目的に応じてつなぎ合わせると、1 つの回路ができる。回路が構成されると、各素子の電流・電圧は、独立に変わることができなくなる。すなわち、つなぎ方に依存した拘束条件のもとで変化することとなる。この条件式が**キルヒホッフの法則**

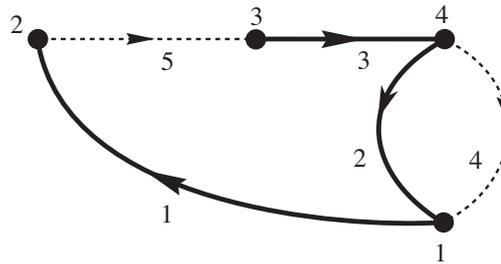


図 1.2 グラフの木枝集合（太い実線）と補木枝集合（点線）の例。

(Kirchhoff's Law) にほかならない。

さて回路の接続関係のみに着目する場合は，回路を線分と点からなる**グラフ** (graph) と考えると便利である．たとえば図 1.1(a) に描いた回路のグラフが同図 (b) である．回路が与えられると，それに対応したグラフは，自然求めることができる．すなわち，各素子を線分に，素子間の接続点を点にすればよい．得られたグラフの線分を**枝** (branch)，接続点に対応した点を**節点** (node) と呼ぶ．

こうすると元の回路に対応させて，グラフの上でも**枝電流**，**枝電圧**（枝の両端の節点間に加わる電圧）などを自然に定義できる．必要に応じて，たとえば枝電流の方向と同じ方向を枝に付けた，向きの付いたグラフ（**有向グラフ** (directed graph) という）を考えればよい．

回路には，枝電流や枝電圧を適当に組み合わせた**閉路電流** (loop current)（**網目電流** (mesh current) と呼ぶこともある），**節点電圧** (node voltage) なども定義できる．たとえば図 1.1(c), (d) などに描いた例がこれにあたる．閉路や節点間にも適宜向きを付けるとよい．なお回路は，対応するグラフが連結な場合，**連結している**という．以下主に有向連結グラフとなる回路を考える．

1.2 グラフの木と補木

さて，話を具体的にするために，1 つの連結した回路を考え，この回路には n_b 個の枝と n_n 個の節点があるとしよう．枝と節点に適当な番号を付けて，枝 1, ..., 枝 n_b , 節点 1, ..., 節点 n_n , のように呼ぶことにする．また各枝を流れる電流を $i_k(t)$ ($k = 1, \dots, n_b$), 各枝電圧を $v_k(t)$ ($k = 1, \dots, n_b$), と仮定する．

まず始めに，グラフの木と補木を定義しよう． n_n 個の節点を，最も少ない個数の枝を使って結ぶ．植木算から分かるように， $(n_n - 1)$ 本の枝で十分である．この枝集合のことをグラフの**木** (tree) という．残った枝のことを**補木** (cotree) と呼ぶ．補木枝の数は $(n_b - n_n + 1)$ 本となることに注意しよう．図 1.2 参照．

次に，グラフの枝にハサミを入れ，節点の集合を 2 つの部分集合に分割する．このときハサミを入れた枝集合を**カット・セット** (cut-set) と呼ぶ．図 1.3 参照．

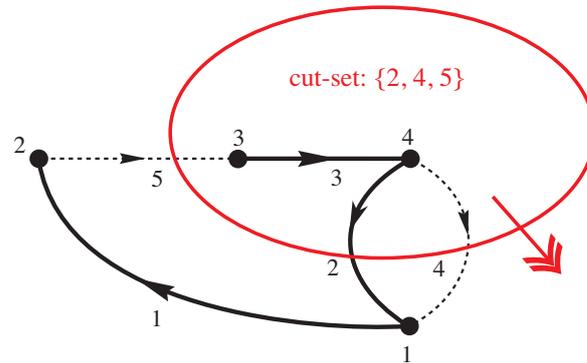


図 1.3 グラフのカットセットの例.

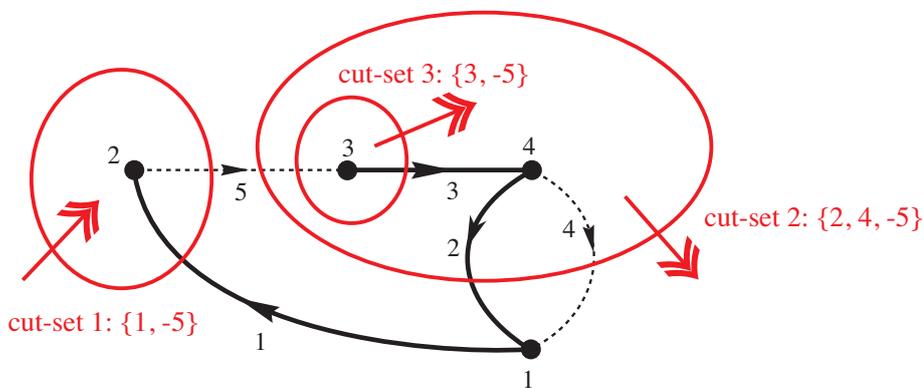


図 1.4 基本カットセットの番号付け. - 枝はカットセットと逆向き枝を表す.

1.3 基本カットセットと基本ループ

回路とそのグラフが与えられたとき、このグラフの木を 1 つ選んで固定すると次の事実が言える.

1. 木の枝を 1 本だけ含み、他の枝はすべて補木枝からなるカットセットを考えると、このようなカットセットの数はちょうど $\rho = n_n - 1$ 個存在する*¹. 図 1.4 参照.
2. 補木枝を 1 本選んで木に加えると、加えた補木枝を含み他の枝はすべて木枝からなるループができる. このようなループの数はちょうど $\mu = n_b - n_n + 1$ 個である. 図 1.5 参照.

上の操作で作ったカットセットやループはすべて独立である. このことは直感的にも明らかであろう. これらをそれぞれ、**基本カットセット** (fundamental cut-set) および**基本ループ** (fundamental loop) という. 勿論、始めにどのような木を選んで考えるかによって基本カットセットおよび基本ループは違ったものとなる.

*¹ ρ をグラフの階数, μ をグラフの零度という.

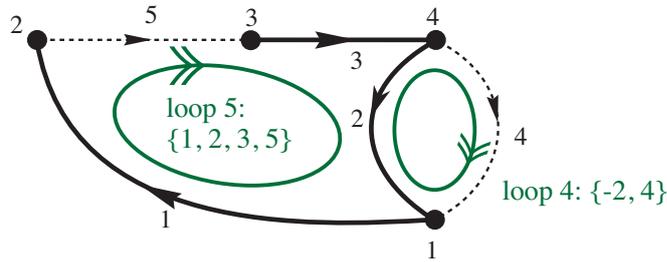


図 1.5 基本ループの番号付け. - 枝はループと逆向き枝を表す.

準備ができたので、基本カットセットや基本ループを行列表現することを考えよう。まず、**基本カットセット行列** (fundamental cut-set matrix) とは次式で定義する要素を持つ行列 $\mathbf{Q} = (q_{ij})$, $i = 1, \dots, \rho = n_n - 1$; $j = 1, \dots, n_b$ のことである。

$$q_{ij} = \begin{cases} 1: \text{枝 } j \text{ が基本カットセット } i \text{ に属し, 方向が同じ,} \\ -1: \text{枝 } j \text{ が基本カットセット } i \text{ に属し, 方向が逆,} \\ 0: \text{枝 } j \text{ が基本カットセット } i \text{ に属していない.} \end{cases} \quad (1.1)$$

ただし、基本カットセットの方向は、このカットセットに含まれる木枝の方向とする。たとえば、図 1.4 の基本カットセット行列は次式となる。

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

同様に、**基本ループ行列** (fundamental loop matrix) とは次式の要素を持つ行列 $\mathbf{B} = (b_{ij})$, $i = 1, \dots, \mu = n_b - n_n + 1$; $j = 1, \dots, n_b$ のことである。

$$b_{ij} = \begin{cases} 1: \text{枝 } j \text{ が基本ループ } i \text{ に属し, 方向が同じ,} \\ -1: \text{枝 } j \text{ が基本ループ } i \text{ に属し, 方向が逆,} \\ 0: \text{枝 } j \text{ が基本ループ } i \text{ に属していない.} \end{cases} \quad (1.3)$$

ただし、基本ループの方向は、このループに含まれる補木枝の方向とする。たとえば、図 1.5 の基本ループ行列は次式となる。

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

1.4 キルヒホッフの法則の記述

そこで、枝電流と枝電圧のベクトルを次式としよう。

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_{n_b} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n_b} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

すると、キルヒホッフの電流法則 (Kirchhoff's Current Law: *KCL*) は次式と表すことができる。

$$\mathbf{Q}\mathbf{i} = \mathbf{0} \quad (1.6)$$

また、キルヒホッフの電圧法則 (Kirchhoff's Voltage Law: *KVL*) は次式となる。

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (1.7)$$

たとえば、図 1.4 と図 1.5 の場合は *KCL* および *KVL* は次式となる。

$$\mathbf{Q}\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 - i_5 \\ i_2 + i_4 - i_5 \\ i_3 - i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2 + v_4 \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

次に、基本カットセット行列 \mathbf{Q} と基本ループ行列 \mathbf{B} の間に成り立っている重要な関係式をみておこう。これらの各行列の列を「木枝列」と「補木枝列」に分けて書くと次式となる。

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{I}_\rho}^{\text{tree}} & \overbrace{\mathbf{F}}^{\text{cotree}} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \overbrace{-\mathbf{F}^T}^{\text{tree}} & \overbrace{\mathbf{I}}^{\text{cotree}} \end{bmatrix}$$

ここで、行列 \mathbf{F}^T は行列 \mathbf{F} の転置行列を表す。また、それぞれの行列に現れた \mathbf{F} と \mathbf{F}^T は基本カットセット行列 \mathbf{Q} と基本ループ行列 \mathbf{B} の主要部という。このことから、関係式

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T \mathbf{B} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{Q} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.11)$$

が成り立つ。これを基本カットセット行列 \mathbf{Q} と基本ループ行列 \mathbf{B} は直交するという。この性質を積極的に利用すると次の事実を得る。

まず、電流ベクトル \mathbf{i} と電圧ベクトル \mathbf{v} を木枝成分と補木枝成分に分けて表す。

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_{n_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_t \\ \dots \\ \mathbf{i}_\ell \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_t \\ \dots \\ \mathbf{v}_\ell \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

すると、 KCL を表す式 (1.6) は次式と書ける。

$$\mathbf{i}_t = -\mathbf{F}\mathbf{i}_\ell \quad (1.13)$$

したがってまた、電流ベクトル \mathbf{i} は補木枝電流を用いて

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F} \\ \mathbf{I}_\mu \end{bmatrix} \mathbf{i}_\ell = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_\ell \quad (1.14)$$

と表すことができる。同様に KVL を表す式 (1.7) は次式と書ける。

$$\mathbf{v}_\ell = \mathbf{F}^T \mathbf{v}_t \quad (1.15)$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_\rho \\ \mathbf{F}^T \end{bmatrix} \mathbf{v}_t = \mathbf{Q}^T \mathbf{v}_t \quad (1.16)$$

これらの関係から次の**テレヘンの定理** (Tellegen's theorem) を得る。

【テレヘンの定理】

$$(\mathbf{v}, \mathbf{i}) = \mathbf{v}^T \mathbf{i} = \sum_{k=1}^{n_b} v_k i_k = 0 \quad (1.17)$$

【証明】

$$\mathbf{v}^T \mathbf{i} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{v}_t)^T \mathbf{B}^T \mathbf{i}_\ell = \mathbf{v}_t^T \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{i}_\ell = 0 \quad (1.18)$$

この定理の物理的な意味は、枝電圧と枝電流の積すなわち電力がいつも零となっている（つまり保存される）ということである。これを電力保存則（あるいはエネルギー保存則）という。また幾何学的には、電圧ベクトルと電流ベクトルが互いに直交することを表している。

【系】

つぎの関係が成り立つ

$$\mathbf{v}^T d\mathbf{i} = \sum_{k=1}^{n_b} v_k di_k = 0, \quad d\mathbf{v}^T \mathbf{i} = \sum_{k=1}^{n_b} i_k dv_k = 0 \quad (1.19)$$

1.5 3種類の回路素子

電気回路は、抵抗、キャパシタおよびインダクタと呼ばれる3つの基本素子を端子どうし接続して1つの回路が作られる*2。この回路に生じる電気現象は、4つの物理量—電流、電圧（電位差）、電荷および磁束—を用いて説明される。図1.6参照。

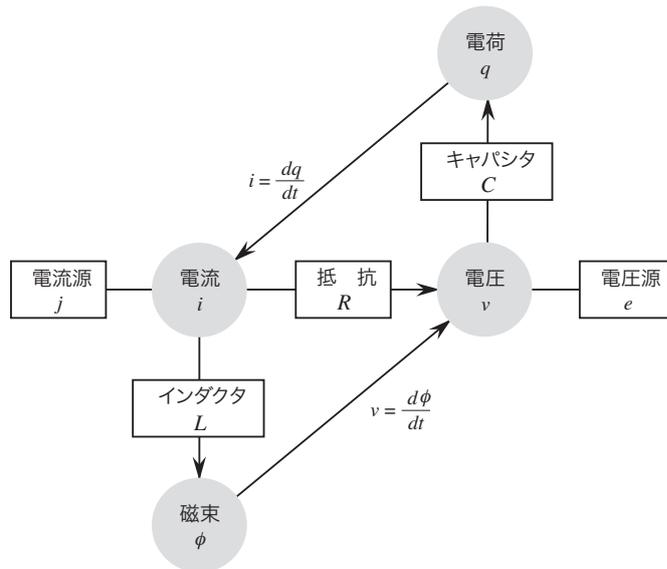


図1.6 3つの基本素子と4つの物理量

各構成要素（すなわち素子）の性質は、図1.7に示した変数と定数を用いて次のように定義する。

- 抵抗 (resistor)*3 :

$$\begin{aligned}
 v &= Ri \quad \text{または} \quad i = Gv; && \text{(線形素子の場合)} \\
 v &= f(i) \quad \text{または} \quad i = g(v); && \text{(非線形素子の場合)}
 \end{aligned}
 \tag{1.20}$$

- キャパシタ (capacitor) :

$$\begin{aligned}
 q &= Cv, \quad i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt} && \text{(線形素子の場合)} \\
 v &= f(q), \quad i = \frac{dq}{dt} && \text{(非線形素子の場合)}
 \end{aligned}
 \tag{1.21}$$

*2 電源は、抵抗の特殊なものと考えられる。

*3 枝電圧が枝電流の関数として表される特性の場合、独立変数である電流によって制御される抵抗と考え、電流制御型抵抗という。電圧制御型抵抗についても同様である。

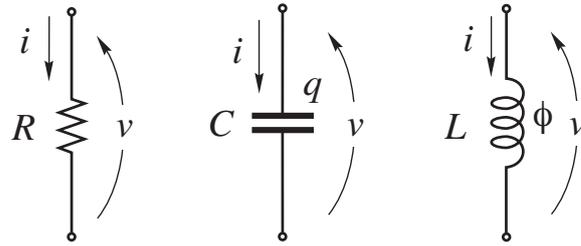


図 1.7 3つの基本回路素子

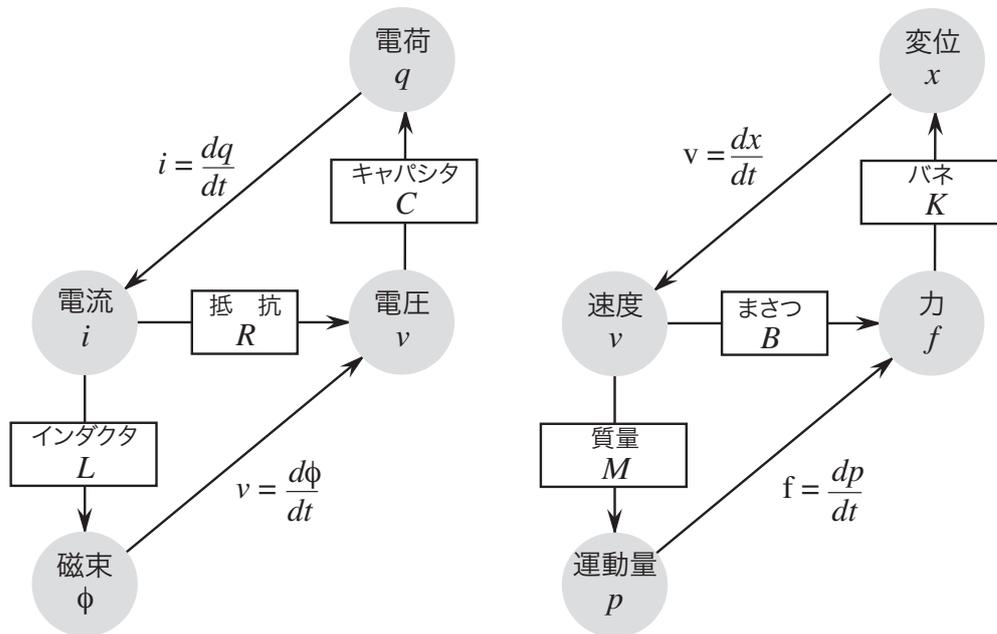


図 1.8 電気系と機械系のモデル間の類推例

- インダクタ (inductor) :

$$\begin{aligned} \phi &= Li, \quad v = \frac{d\phi}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (\text{線形素子の場合}) \\ i &= f(\phi), \quad v = \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{非線形素子の場合}) \end{aligned} \tag{1.22}$$

なお、式 (1.21) の $i = \frac{dq}{dt}$ は電流の定義式、式 (1.22) の $v = \frac{d\phi}{dt}$ の関係はファラデー (Faraday) の電磁誘導の法則である*4。

集中定数系では、多くの物理系の間で類推 (analogy) が成り立つ。図 1.8 に電気系と機械系のモデル間の類推例を示した。

*4 この関係は回路からインダクタをみた関係式である。インダクタから回路をみると、電流の向きが変わるので、 $u = -\frac{d\phi}{dt}$ の関係となる。

1.6 線形抵抗回路の解析法

電気回路の解析方法として、網目電流を変数に選んだ解析法（網目解析という）、節点電圧を変数に選んだ解析法（節点解析という）、および木枝電圧と補木枝電流を変数に選んだ解析法（混合解析という）が知られている。

このことを、線形抵抗回路を例にして考えておこう。以下、この節では回路は連結しているとし、枝の数は n_b 個、節点の数は n_n 個であるとする。

1. 各枝には枝電圧と枝電流の2つの未知数がある。 n_b 個の枝があることから未知数の総数は $2n_b$ 個である。
2. 枝特性から n_b 個の関係式が導かれる。
3. KCL から $n_n - 1 (= \rho)$ 個の枝電流に関する1次式が、 KVL より枝電圧に関する $n_b - n_n + 1 (= \mu)$ 個の式が導かれる。

このことから、式の数と未知数の数が一致するので解くことができる。解法の違いは、どれだけの未知数（言い換えると式の数）を対象とするかということである。

式(1.13) (1.15) より、以下では KVL, KVL は次式と表されているものとして説明する。

$$i_t = -F i_\ell, \quad v_\ell = F^T v_t \quad (1.23)$$

1.6.1 網目解析

抵抗特性を次式で仮定しよう。

$$v_t = R i_t, \quad i_\ell = G v_\ell + J_\ell \quad (1.24)$$

ここに、 J_ℓ は補木枝に並列に入れた独立電流源である。

式(1.23) (1.24) より、 i_ℓ 以外の変数を消去すると、次式を得る。

$$(I + G F^T R F) i_\ell = J_\ell \Rightarrow i_\ell = (I + G F^T R F)^{-1} J_\ell \quad (1.25)$$

補木枝電流を基本ループ電流を考え、 $n_b - n_n + 1 (= \mu)$ 個の方程式と未知数に関する解析法となっている。

1.6.2 節点解析

抵抗特性を次式で仮定しよう。

$$v_t = R i_t + E_t, \quad i_\ell = G v_\ell \quad (1.26)$$

ここに、 E_t は木枝に直列に入れた独立電圧源である。

式 (1.23) (1.26) より, v_t 以外の変数を消去すると, 次式を得る.

$$(I + RFGF^T)v_t = E_t \Rightarrow v_t = (I + RFGF^T)^{-1}E_t \quad (1.27)$$

木枝電圧を木で接続した節点電圧に対応させると, $n_n - 1 (= \rho)$ 個の方程式と未知数に関する解析法となっている.

1.6.3 混合解析

抵抗特性を次式で仮定しよう.

$$v_t = Ri_t + E_t, \quad i_\ell = Gv_\ell + J_\ell \quad (1.28)$$

式 (1.23) (1.28) より, v_t と i_ℓ 以外の変数を消去すると, 次式を得る.

$$\begin{bmatrix} I & RF \\ -GF^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_t \\ i_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_t \\ J_\ell \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

これは木枝電圧補木枝電流に関する n_b 個の方程式である. これを解いて

$$\begin{aligned} v_t &= (I + RFGF^T)^{-1} E_t - (I + RFGF^T)^{-1} RFJ_\ell \\ i_\ell &= (I + GF^T RF)^{-1} GFE_t + (I + GF^T RF)^{-1} J_\ell \end{aligned} \quad (1.30)$$

を得る. KCL と KVL を混ぜて方程式を立てて解く方法といえよう. 以下, このノートでは, この混合解析の方法に従って回路の状態方程式を導く.

1.7 発振回路：状態方程式の例

直感的に状態方程式を導くことができる, 簡単な回路の例をあげておこう. 抵抗, キャパシタおよびインダクタを図 1.9 のように並列につないだ回路を考える.

キャパシタとインダクタは線形特性を持つものとする. コンダクタの特性を次式と仮定する.

$$i_G = g(v_G) = -g_1 v_G + g_3 v_G^3 \quad (1.31)$$

ここに, i_G, v_G はそれぞれ抵抗 (コンダクタ) を流れる電流, 枝電圧である. また, 係数は $g_1, g_3 > 0$ と仮定する.

非線形抵抗の場合は, 抵抗値 (あるいはコンダクタンス値) は電圧の値によって異なる. ある電圧でのコンダクタンスは, 特性 (1.31) を微分して

$$\frac{di_G}{dv_G} = -g_1 + 3g_3 v_G^2 \quad (1.32)$$

で与えられる. これを微分コンダクタンス (微分抵抗) という. 式 (1.32) の場合, 微分コンダクタンスは

$$1. \quad v_G^2 < \frac{g_1}{3g_3} \quad \text{ならば} \quad \frac{di_G}{dv_G} < 0,$$

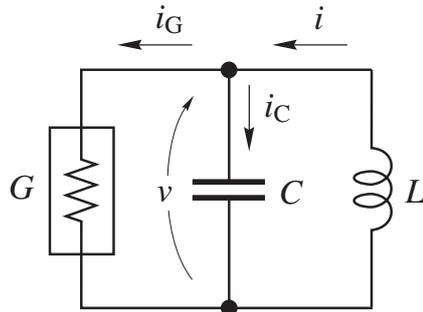


図 1.9 発振回路

2. $v_G^2 = \frac{g_1}{3g_3}$ ならば $\frac{di_G}{dv_G} = 0$,
3. $v_G^2 > \frac{g_1}{3g_3}$ ならば $\frac{di_G}{dv_G} > 0$,

となる。すなわち、原点近くでは負性抵抗、 $v_G^2 > \frac{g_1}{3g_3}$ では通常の抵抗とみることができる。

回路方程式は、接続点での 3 つの電流の和が零となる *KCL* と、*L* と *C* の閉路の *KVL* から、次式となる。

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= i - g(v) \\ L \frac{di}{dt} &= -v \end{aligned} \tag{1.33}$$

式 (1.33) から *i* を消去し、*v* についての 2 階スカラー方程式を導くと次式を得る。

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{d\tau} + x = 0 \tag{1.34}$$

ここに、

$$x = \sqrt{\frac{3g_3}{g_1}} v, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{LC}} t$$

とおいた。この方程式は、真空管を用いた発振器の動作を説明するために、オランダの電気技術者 van der Pol によって導かれた式である。彼の研究にちなんでファンデアポールの方程式と呼ばれている。

同様に、式 (1.33) から *v* を消去し、*i* についての 2 階スカラー方程式を導くと次式を得る。

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} - \varepsilon \left\{ 1 - \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 \right\} \frac{dy}{d\tau} + y = 0 \tag{1.35}$$

ここに、

$$y = \sqrt{\frac{g_3 L}{g_1 C}} i, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{LC}} t$$

とおいた。こちらの方程式は、19 世紀末、英国の物理学者レーリィー (Rayleigh) によって楽器の自励振動の方程式として導かれていた。したがってレーリィーの方程式として知られている。

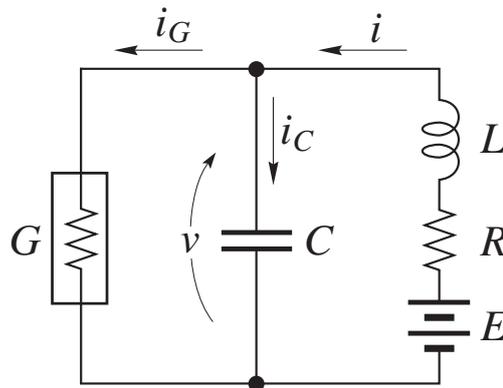


図 1.10 BVP 発振回路

もちろん 3 つの式 (1.33), (1.34), および (1.35) は状態変数の選択が異なるだけにすぎないので, 等価な方程式である.

ここで, 図 1.9 の回路のインダクタに抵抗と電池を直列につないだ図 1.10 の回路を考えておこう. 式 (1.33) の第 1 式は同じであるが, 第 2 式に抵抗と電池の項がつけ加えられる. その結果, 回路方程式は次式となる.

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= i - g(v) \\ L \frac{di}{dt} &= -v - Ri + E \end{aligned} \tag{1.36}$$

いま, 時間軸のスケーリングを $\tau = \frac{1}{\sqrt{LC}}t$ と行って, 変数とパラメータを

$$x = v, \quad i = y, \quad R = b, \quad E = a, \quad c = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{1.37}$$

と書き換えると, 次式となる.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= c(y - g(x)) \\ \frac{dy}{d\tau} &= -\frac{1}{c}(x + by - a) \end{aligned} \tag{1.38}$$

この方程式は, Bonhöffer-van der Pol (BVP) 方程式と呼ばれ, FitzHugh により提案された神経振動子モデルである. 日本では南雲らによって, 図 1.10 の回路で同様な考察がなされた. このことから, FitzHugh-Nagumo 方程式とも呼ばれている.

1.8 強制振動回路

抵抗, キャパシタおよびインダクタを図 1.11 のように並列につないだ回路を独立電流源で強制振動させる場合を考えよう. キャパシタと抵抗は線形特性を持つものとする. インダクタの特

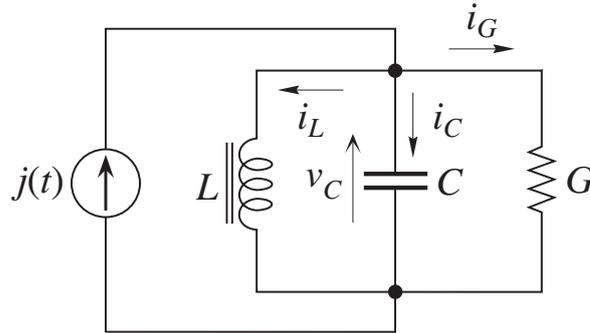


図 1.11 発振回路

性を次式のように磁束 ϕ の非線形関数と仮定する.

$$i_L = f(\phi) = a_1\phi + a_3\phi^3 \quad (1.39)$$

ここに, 係数は $a_1, a_3 > 0$ と仮定する. また, 各素子の特性は

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}, \quad i_G = Gv_C, \quad v_L = \frac{d\phi}{dt}, \quad j(t) = E_0 + E \cos(\omega t) \quad (1.40)$$

としよう.

接続点での 3 つの電流の和が零となる *KCL* と, *L* と *C* の閉路の *KVL* から, 次式となる.

$$\begin{aligned} i_C + i_G + i_L &= j(t) \\ v_C &= v_G = v_L \end{aligned} \quad (1.41)$$

式 (1.39), (1.40) を式 (1.41) に代入して次の状態方程式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= v_C \\ \frac{dv_C}{dt} &= -\frac{G}{C}v_C - \frac{1}{C}f(\phi) + \frac{1}{C}j(t) \end{aligned} \quad (1.42)$$

両式から v_C を消去すると, 次の Duffing の方程式を得る.

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + k \frac{d\phi}{dt} + c_1\phi + c_3\phi^3 = B \cos \omega t + B_0 \quad (1.43)$$

ここに,

$$k = \frac{G}{C}, \quad c_1 = \frac{a_1}{C}, \quad c_3 = \frac{a_3}{C}, \quad B = \frac{E}{C}, \quad B_0 = \frac{E_0}{C}$$

とおいた. この方程式は非線形共振現象がおこる典型的な方程式として知られている.

第 2 章

状態の拘束条件と接続の関係

この章では、回路の状態が素子のつなぎ方によっていかに拘束されるかという問題を取りあげる。状態に拘束が生じると、回路の状態方程式はそれだけ低い次元の方程式となり、扱いやすくなる。すなわち、回路の状態は状態空間内の拘束条件によって決まる部分空間に押し込められることとなる。そのため、スイッチの開閉などにより急に回路の接続関係が変えられると、状態の速い動きである「状態の跳び」が生じることがある。拘束条件はグラフの特別な木を定義することによって系統的に調べることができる。この結果を用いて、状態の拘束条件からみた回路の分類を行う。

2.1 接続による状態の拘束

回路の状態はインダクタ電流とキャパシタ電圧で定まる。このことから、これらリアクタンス素子を不用意に接続するとキルヒホッフの法則によって状態が拘束^{*1}されることになる。すなわち、次の 4 種類のいずれかの接続があると、回路の状態は拘束される。

1. 保存則

- (a) キャパシタのみからなるカットセットがある。このカットセットに関する電荷が保存される。
- (b) インダクタのみからなるループがある。このループに関する磁束が保存される。

2. 強制退化

- (a) キャパシタのみ（あるいはキャパシタと電圧源のみ）からなるループがある。キャパシタ電圧の線形拘束が生じる。
- (b) インダクタのみ（あるいはインダクタと電流源のみ）からなるカットセットがある。インダクタ電流の線形拘束が生じる。

そこで、これらの接続のある回路で状態がどのように拘束されるのか、その関係式を具体例でみることにしよう。

^{*1} 拘束とは、キャパシタ電圧やインダクタ電流の間に関係式が生じることをいう。関係式の個数が多くなる程、拘束条件が多くなる。

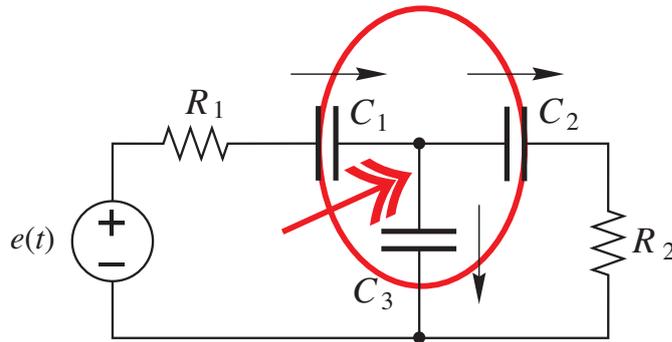


図 2.1 キャパシタのみからなるカットセットがある回路の例.

2.2 カットセットの電荷保存則とループの磁束保存則

2.2.1 キャパシタのみからなるカットセットがある場合

図 2.1 の回路を考えよう. 赤色の楕円と交わる 3 個のキャパシタはカットセットを作っている. 2 重の矢印方向をこのカットセットの方向と定め, キルヒホッフの電流法則を求めると次式となる.

$$i_{C1} - i_{C2} - i_{C3} = 0 \quad (2.1)$$

すなわち

$$C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} - C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} - C_3 \frac{dv_{C3}}{dt} = 0 \quad (2.2)$$

式 (2.2) はキャパシタ電圧の微分のみからなる関係式なので, ただちに積分できて, 次の関係式を得る.

$$C_1 v_{C1}(t) - C_2 v_{C2}(t) - C_3 v_{C3}(t) = Q \quad (2.3)$$

ここに, Q は任意積分定数を表す. キャパシタに蓄えられる電荷をそれぞれ, $q_{C1}(t) = C_1 v_{C1}(t)$, $q_{C2}(t) = C_2 v_{C2}(t)$, $q_{C3}(t) = C_3 v_{C3}(t)$ とすれば式 (2.3) はまた次式とも書ける.

$$q_{C1}(t) - q_{C2}(t) - q_{C3}(t) = Q \quad (2.4)$$

これは, 3 個のキャパシタの電荷から式 (2.4) の左辺の一次式を作ると一定 Q となることを示している. これを今考えているカットセットの電荷と考えると, このカットセットに蓄えられる電荷が保存されることを表している.

一方, この回路の状態は 3 つのキャパシタ電圧であり, これらは 3 次元の状態空間を作る. 式 (2.3) はこの空間内の 2 次元平面の族を与える. すなわち, 右辺の一定値を変化させると状態空間内に重なった平面の層状集合ができる. 図 2.2 参照.

では, 実際の回路ではどの平面が具体的に回路の状態の乗っている平面となるのであろうか. それを定めるのは, 回路に最初与える初期値である. なぜなら

$$C_1 v_{C1}(t) - C_2 v_{C2}(t) - C_3 v_{C3}(t) = C_1 v_{C1}(t_0) - C_2 v_{C2}(t_0) - C_3 v_{C3}(t_0) \quad (2.5)$$

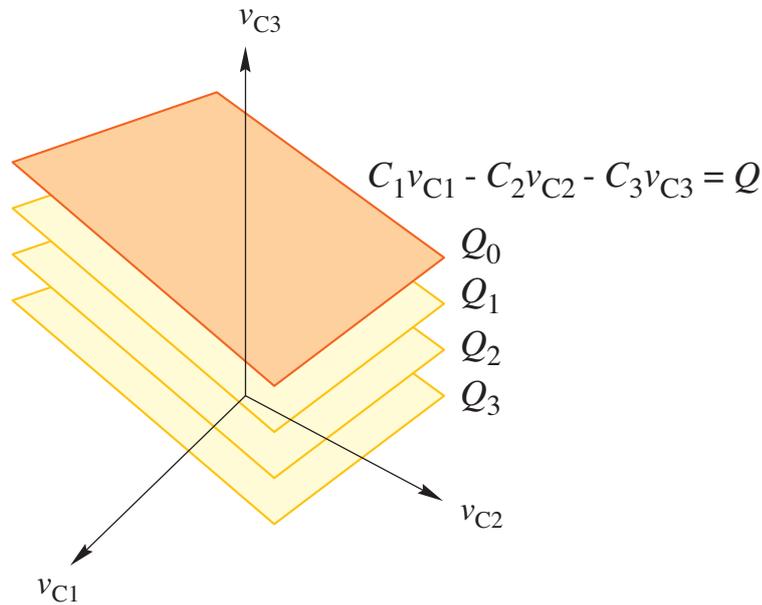


図 2.2 状態空間内に重なった平面の層状集合.

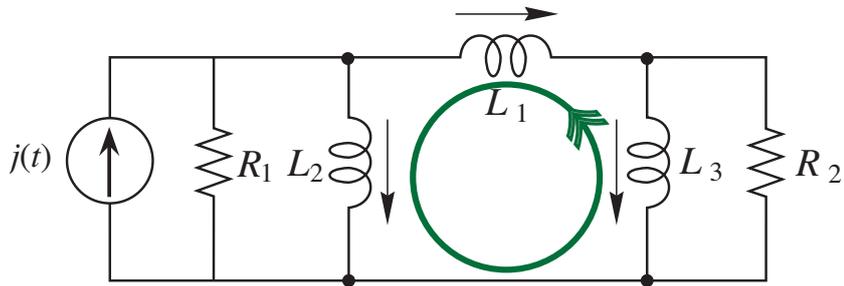


図 2.3 インダクタのみからなるループがある回路の例.

となり、右辺の一定値が初期値によって定まるからである。

2.2.2 インダクタのみからなるループがある場合

図 2.3 の回路を考えよう。この回路では、インダクタのみからなるループが存在する。このループに沿ったキルヒホッフの電圧法則は次式となる。

$$v_{L1}(t) - v_{L2}(t) + v_{L3}(t) = 0 \tag{2.6}$$

したがって、インダクタ電流で表すと次式となる。

$$L_1 \frac{di_{L1}}{dt} - L_2 \frac{di_{L2}}{dt} + L_3 \frac{di_{L3}}{dt} = 0 \tag{2.7}$$

この式を積分して、このループに関する次の磁束保存則を得る。

$$L_1 i_{L1} - L_2 i_{L2} + L_3 i_{L3} = \Phi \tag{2.8}$$

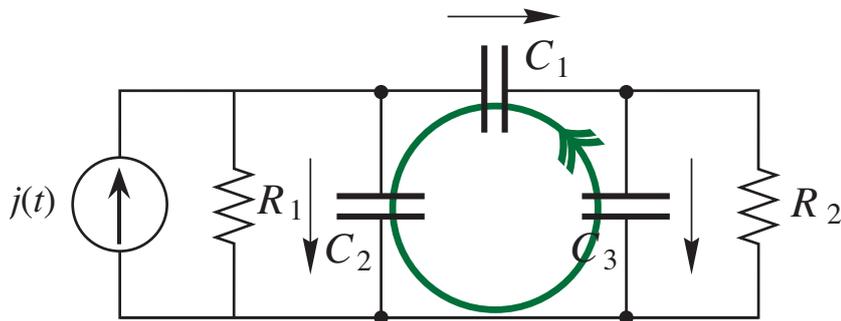


図 2.4 キャパシタのみからなるループがある回路の例.

ここに、 Φ は任意積分定数である。この拘束条件は、インダクタを流れる電流の作る 3 次元空間内の平面の族を表している。状況は図 2.2 と同様である。

2.3 強制退化と速い過渡現象

2.3.1 キャパシタのみからなるループがある場合

図 2.4 の回路を考えよう。この回路では、キャパシタのみからなるループがある。したがってキルヒホッフの電圧法則から直ちに次式の関係を得る。

$$v_{C1} - v_{C2} + v_{C3} = 0 \quad (2.9)$$

これは、キャパシタ電圧空間の原点を通る平面である。保存則と違って、この場合は一意的に状態が式 (2.9) の平面に拘束されることとなる。このような拘束を強制退化^{*2}と呼ぶことにしよう。

この場合、初期値がキャパシタ電圧空間の任意の値にあったとき、どのような経路で状態は平面 (2.9) の上の点に移動するのだろうか。次の例でこの様子を見ることにしよう。

♡ 例 2.1 ♡

図 2.5 の回路を考えよう。ここでの問題はキャパシタの強制退化にあるのでスイッチ SW_1 は開いたままとし、各キャパシタに初期電圧 $v_1(0) = v_{10}$, $v_2(0) = v_{20}$, $v_3(0) = v_{30}$ を与え、 $t = 0$ でスイッチ SW_2 を閉じた。その後の各キャパシタ電圧を求めよ。

♡ 解 ♡ スイッチ SW_2 を閉じた後の現象は次のように考えるとよい。

1. 3 つのキャパシタによるループができるのでキャパシタ電圧の強制退化が起こる。
2. 同時にキャパシタのみからなるカットセットが 2 つあるので、このカットセットの電荷は保存される。

^{*2} この呼び名は一般的に使われているわけではない。過渡現象の教科書ではあまり詳しく述べた本はないようだ。強制退化 (forced degeneracy) は力学系の理論で使われている言葉を流用した。

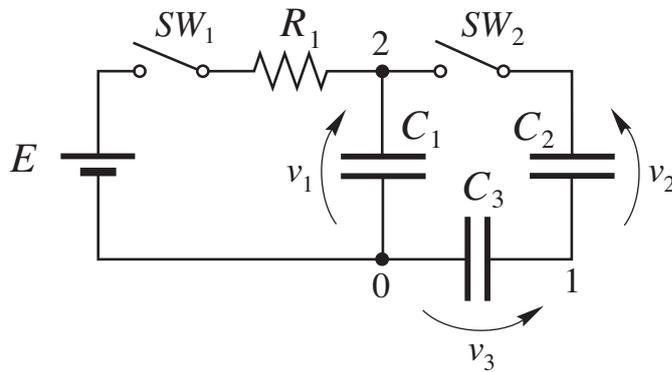


図 2.5 キャパシタのみからなるループがある回路の初期値問題.

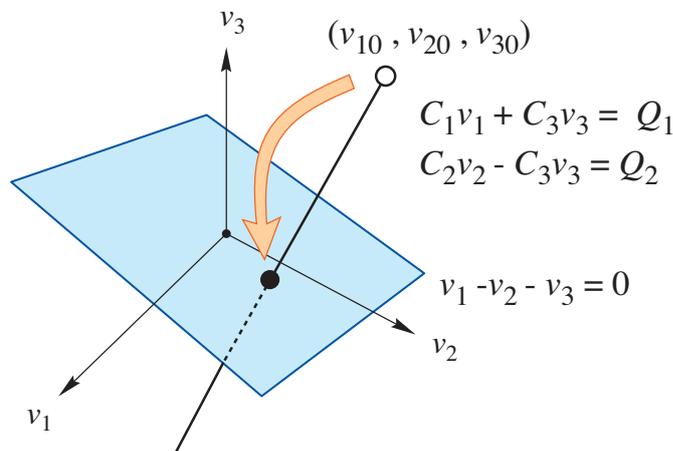


図 2.6 初期値の拘束面への一瞬の跳びの様子.

まず強制退化の平面を計算しよう．式 (2.9) と同様にして，次式となる．

$$v_1 - v_2 - v_3 = 0 \tag{2.10}$$

次に，2 つのカットセットを節点 0, 1 に選んで，電荷保存則を求めると，次式を得る．

$$\begin{aligned} C_1 v_1 + C_3 v_3 &= C_1 v_{10} + C_3 v_{30} = Q_1 \\ C_2 v_2 - C_3 v_3 &= C_2 v_{20} - C_3 v_{30} = Q_2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

そこで，式 (2.10) と式 (2.11) を連立させて解き，次の解を得る．

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{(C_1 + C_3) Q_1 + C_3 Q_2}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} \\ v_2 &= \frac{C_3 Q_1 + (C_1 + C_3) Q_2}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} \\ v_3 &= \frac{C_2 Q_1 - C_1 Q_2}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} \end{aligned} \tag{2.12}$$

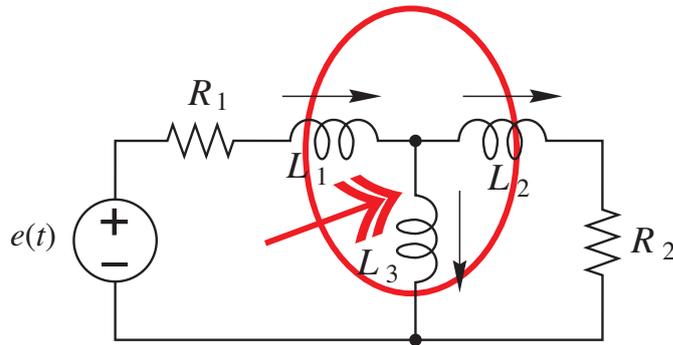


図 2.7 インダクタのみからなるカットセットがある回路の例.

これが、拘束面上の点である．図 2.6 参照．

強制退化が起こると、初期値はカットセットに関する電荷保存則の直線に沿って、式 (2.10) の拘束面上の点まで急に变化する．この変化は一瞬にして起こる．これを「速い過渡現象」という．「初期値の跳び」が起こると言ったりする．また、跳ぶ前の初期値を「第一種初期値」、後の初期値を「第二種初期値」と言って区別することもある．

もともとスイッチ SW_2 を閉じる前に与えた初期値 (v_{10}, v_{20}, v_{30}) は、回路が閉じていないので自由に与えることができる．すなわち、キルヒホッフの電圧法則に縛られない電圧である (図 2.6 の白丸点)．スイッチ SW_2 を閉じると、キャパシタのみからなるループができるので必然的にキルヒホッフの電圧法則に縛られることとなる．そこで、各キャパシタの電圧は式 (2.12) の点 (図 2.6 の黒丸点) に移動する．この電圧の変化は、ステップ関数で表される．したがってキャパシタを流れる電流は、インパルス関数となる．これが「一瞬の出来事」の数学的表現である．

以上のことは一般的に言えることで、キャパシタのみからなるループに並列にどのような素子が接続されていても、それら並列枝には関係なくこの跳びの現象がみられる．したがって、スイッチの開閉等によってキャパシタのみからなるループができる場合には、このループ以外の素子を開放除去した回路の速い過渡現象、すなわち跳びの計算をし、これによって定まる新しい初期値、すなわち第二種初期値を計算する必要がある．

通常の状態方程式に従う過渡現象は、この新しい初期値より状態が進展する． ♡

2.3.2 インダクタのみからなるカットセットがある場合

図 2.7 の回路を考えよう．この回路では、インダクタのみからなるカットセットがある．したがってキルヒホッフの電流法則から直ちに次式の関係を得る．

$$i_{L1} - i_{L2} - i_{L3} = 0 \quad (2.13)$$

このカットセットによる強制退化の状況は、上述例 2.1 のキャパシタのみからなるループがある場合の強制退化と同様である．

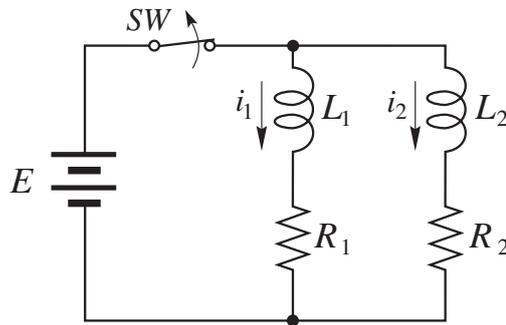


図 2.8 インダクタのみからなるカットセットができる回路の初期値問題.

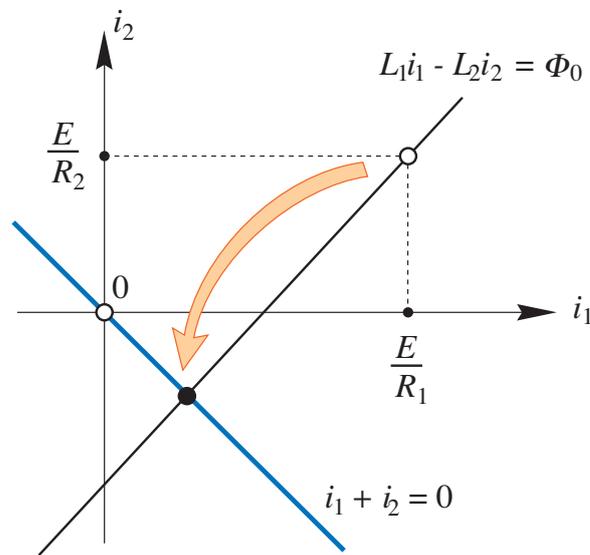


図 2.9 相平面での初期値の動き.

♣ 例 2.2 ♣

スイッチ SW を閉じたまま定常状態になっている図 2.8 の回路がある. $t = 0$ でスイッチ SW を開いた. 速い過渡現象を解析せよ.

♣ 解 ♣ 定常状態になっているので, それぞれのインダクタを流れる電流は次式となっている.

$$i_1 = \frac{E}{R_1}, i_2 = \frac{E}{R_2} \tag{2.14}$$

スイッチを開くとインダクタのみのカットセットができ, KCL から状態は

$$i_1 + i_2 = 0 \tag{2.15}$$

に移動することになる. この速い移動は, 抵抗 R_1, R_2 を無視 (短絡除去) した 2 つのインダクタからなるループの KVL より

$$L_1 \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \tag{2.16}$$

であるから、これを積分して式 (2.14) を初期値として代入すると次式を得る.

$$L_1 i_1 - L_2 i_2 = \Phi_0 = L_1 \frac{E}{R_1} - L_2 \frac{E}{R_2} \quad (2.17)$$

そこで、式 (2.15) と式 (2.17) を連立して解くと、跳び先の座標が求められる.

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{(L_1 R_2 - L_2 R_1)}{(L_1 + L_2) R_1 R_2} E \\ i_2 &= \frac{(L_2 R_1 - L_1 R_2)}{(L_1 + L_2) R_1 R_2} E \end{aligned} \quad (2.18)$$

これらの様子を図 2.9 に示した. ♣

2.4 状態の拘束条件を調べるためのグラフの木

回路が与えられると、この回路のグラフに対して色々な木が考えられる. したがって、回路の状態方程式を導くために都合の良い木を選ぶ必要がある. 更に、回路に拘束が生じる場合には、どのような拘束が何個あるか知る必要がある. そこでこの節ではこれらの要求をうまく処理できるグラフの木について考える.

まず、我々の考える回路は、条件

1. 電圧源のみからなるループはない.
2. 電流源のみからなるカットセットもない.

を満たしているものと仮定する*³.

そこでこれから考える回路では、次のような木を常に選ぶことができる.

1. 電圧源はすべて木枝に含ませる.
2. 電流源はすべて補木枝に含ませる.

電源に関して上の条件は常に満たされているものとして、次の段階に進もう. すこし考えると

1. キャパシタをできるだけ多く木枝に含む木,
2. インダクタをできるだけ多く木枝に含む木.

をうまく利用すると、状態の拘束条件を調べることができることが分かる. **基準木** (normal tree) *⁴と呼ばれている木はこの観点から考えられた木のことである. 木を定めると、その木に関する基本カットセットおよび基本ループを求めこれを用いてキルヒホッフの法則を表すことができる. したがって、そのあとは機械的に拘束条件を検出できることとなる.

*³ 3 相デルタ型に接続された電圧源のモデルがあるが、これは例外中の例外といえる電源である. 電圧源のループは一般に KVL と両立しない. 同様に、電流源のみからなるカットセットがあれば、 KCL と両立しない.

*⁴ 小澤 [4] に従った. [3] には正規木と訳されている.

【 C 基準木】

キャパシタを基準とした C 基準木とは、次のように選んだ木のことである。

1. 電圧源は木枝に，電流源は補木枝に含ませる。
2. キャパシタをできるだけ多く木枝に，インダクタをできるだけ多く補木枝に入れる。

【 L 基準木】

インダクタを基準とした L 基準木とは，次のように選んだ木のことである。

1. 電圧源は木枝に，電流源は補木枝に含ませる。
2. インダクタをできるだけ多く木枝に，キャパシタをできるだけ多く補木枝に入れる。

これらの木は次の性質を持っている。

1. C 基準木の補木に属するキャパシタの個数だけ，キャパシタのみ（あるいはキャパシタと電圧源のみ）からなるループがある。すなわち，キャパシタ電圧の強制退化が起こる。
2. C 基準木の木に属するインダクタの個数だけ，インダクタのみ（あるいはインダクタと電流源のみ）からなるカットセットがある。すなわち，インダクタ電流の強制退化が起こる。
3. L 基準木の補木に属するインダクタの個数だけ，インダクタのみ（あるいはインダクタと電流源のみ）からなるループがある。すなわち，これらのループの磁束は保存される。
4. L 基準木の木に属するキャパシタの個数だけ，キャパシタのみ（あるいはキャパシタと電圧源のみ）からなるカットセットがある。すなわち，これらのカットセットの電荷が保存される。

したがって， C 基準木と L 基準木をうまく組み合わせることによって，状態に拘束を持つ回路のすべての拘束条件を数え上げることが可能となる。このためには次の性質を持つ一対の木を構成すればよい。

1. C 基準木を一つ作る。
2. 次に， L 基準木を以下の性質を持つように選ぶ。
 - (a) C 基準木の木枝インダクタは，そっくり L 基準木の木枝に含ませる，
 - (b) C 基準木の補木枝キャパシタは，そっくり L 基準木の補木枝に含ませる。

この様に選んだ一対の C 基準木と L 基準木を用いて，キルヒホッフの法則を書き下すとすべての拘束条件を陽に表現することができる。以下簡単のために，このようにして選んだ木のことを CL 基準木対 (CL normal tree pair) と呼ぶことにする。

以上の準備から，拘束のある回路とそうでない通常の回路を区別し分類することが可能となる。そこで，改めて回路を状態に拘束があるか無いかによって分類しよう。また，この分類を CL 基準木対の言葉で行おう。

いま，与えられた回路は表 2.1 に示した素子から構成されているとしよう。この回路の CL 基準木対を一つ選ぶ。このとき，各基準木（木枝および補木枝）に属するそれぞれの種類の素子数

表 2.1 回路素子とその個数

素子名	個数
独立電圧源	n_V
キャパシタ	n_C
抵抗	n_R
インダクタ	n_L
独立電流源	n_I

表 2.2 CL 基準木の木枝・補木枝に属する各素子の数

素子	C 基準木				素子の総数
	木枝		補木枝		
独立電圧源		n_V			n_V
キャパシタ	n_{C1}	n_{C2}		n_S	$n_C = n_{C1} + n_{C2} + n_S$
抵抗	n_{G1}	n_{G2}	n_{R1}	n_{R2}	$n_R = n_{G1} + n_{G2} + n_{R1} + n_{R2}$
インダクタ		n_Γ	n_{L1}	n_{L2}	$n_L = n_\Gamma + n_{L1} + n_{L2}$
独立電流源				n_I	n_I
	補木枝	木枝		補木枝	
	L 基準木				

は、 CL 基準木対の選び方によらず一定となる。この個数を表 2.2 のように定めよう。こうすると、各基準木について先に述べた性質から次のことが分かる。

1. この回路の拘束を受けていない独立な状態の個数は $n_{C1} + n_{L1}$ 個である、
2. この回路の保存則の個数は $n_{C2} + n_{L2}$ 個である、
3. この回路の強制退化のおこる個数は $n_S + n_\Gamma$ 個である。

この性質を用いて、回路を次のように分類しよう。

1. 通常の回路。保存則も強制退化もない回路をこう呼ぶことにする。すなわち、 $n_{C2} =$

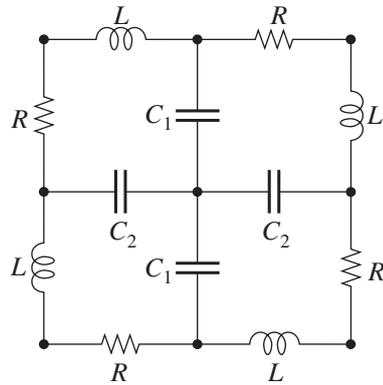


図 2.10 回路の例.

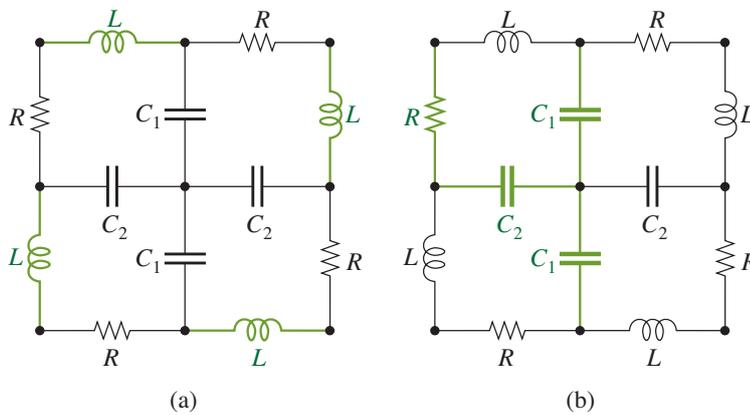


図 2.11 図 2.10 の回路の C 基準木 (黒い実線の枝集合) (a) と L 基準木 (黒い実線の枝集合) (b).

$n_{L2} = n_S = n_\Gamma = 0$ の回路である. なお, この場合の C 基準木を特に C 標準木 (C proper tree) *⁵と呼ぶことがある.

2. 保存則を持つ回路. $n_S = n_\Gamma = 0$ であるが $n_{C2} \neq 0$ and/or $n_{L2} \neq 0$ の回路.
3. 強制退化を持つ回路. $n_{C2} = n_{L2} = 0$ であるが $n_S \neq 0$ and/or $n_\Gamma \neq 0$ の回路.
4. 保存則も強制退化も持つ回路. $n_{C2} \neq 0$ and/or $n_{L2} \neq 0$ かつ $n_S \neq 0$ and/or $n_\Gamma \neq 0$ の回路.

♣ 例 2.3 ♣

図 2.10 の回路の CL 基準木対を求めよ.

♣ 解 ♣ 図 2.11 参照. この回路では, C 基準木は一意的に定まるが, これに対応する L 基準木は一意的ではなく何個かの木が存在する. たとえば, どのキャパシタを木枝に選んでもよい. 図 2.11(b) はその一例である.

*⁵ 文献 [3] には正常木と訳されている.

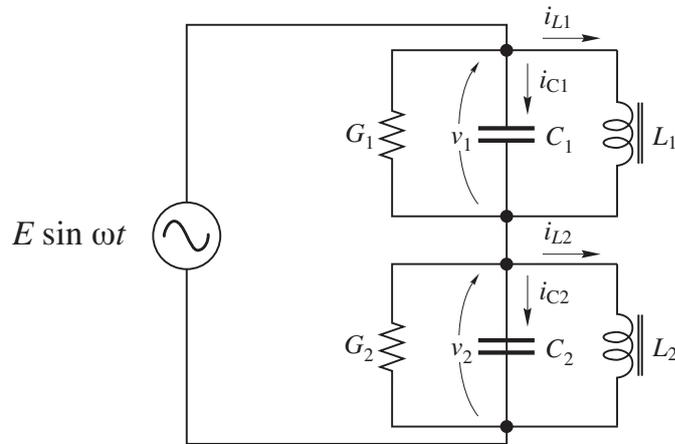


図 2.12 回路の例.

♣ 例 2.4 ♣

図 2.12 の回路の状態方程式を求めよ。ただし、素子特性は、キャパシタと抵抗は線形、インダクタは第 1 章の最後の例で示した非線形特性：式 (1.39) を仮定する。また、2つの LCG 並列回路の素子特性は互いに等しいものとする。

♣ 解 ♣ まず、2つの拘束条件が成り立つ。1つはキャパシタと独立電圧源からなるループで

$$v_1 + v_2 = E \sin \omega t \quad (2.19)$$

である。もう一つはインダクタと独立電圧源からなるループである。つまり、この場合上式を磁束で表すと別の拘束条件を得る：

$$\frac{d\phi_1}{dt} + \frac{d\phi_2}{dt} = E \sin \omega t \Rightarrow \phi_1 + \phi_2 = -\frac{E}{\omega} \cos(\omega t) \quad (2.20)$$

KCL より

$$i_{C1} + i_{G1} + i_{L1} = i_{C2} + i_{G2} + i_{L2} \quad (2.21)$$

この式に、素子特性と上の関係式を代入し、状態変数として $x = \phi_1 - \phi_2$ と置いて整理すると、次式を得る。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + (\alpha + \beta \cos 2\omega t)x + \gamma x^3 = 0 \quad (2.22)$$

ここに、

$$k = \frac{G}{C}, \quad \alpha = \frac{1}{C} \left(a_1 + \frac{3a_3 E^2}{8\omega^2} \right), \quad \beta = \frac{3a_3 E^2}{8C\omega^2}, \quad \gamma = \frac{a_3}{4C} \quad (2.23)$$

と置いた。

第 3 章

標準木を持つ回路の状態方程式

この章では、回路方程式を 1 階連立微分方程式として系統的に求める方法について述べる。これまで直感的に導出していた回路方程式が、簡潔な手順に従って導き出されることをはっきりと理解できるようになるであろう。

3.1 標準木を持つ回路の例

通常の回路，すなわち状態に拘束のない回路では， C 標準木が存在する。この木を使って回路の状態方程式を系統的に求めることができる。この手順を述べよう。回路のグラフには n_b 個の枝と n_n 個の節点があるものと仮定する。

1. C 標準木を選ぶ。すべての枝に方向をつける。次の優先順位に従って枝に番号を振る。
 - (a) 木枝独立電圧源
 - (b) 木枝キャパシタ
 - (c) 木枝抵抗
 - (d) 補木枝抵抗
 - (e) 補木枝インダクタ
 - (f) 補木枝独立電流源
2. 木枝を 1 本だけ含むカットセット（向きは木枝の方向を正に選ぶ）を $\rho = n_n - 1$ 個考え、これを基本カットセットとする。このカットセットについてキルヒホッフの電流則 KCL を書き下す。
3. 補木枝を 1 本含み、他はすべて木枝からなる閉路を $\mu = n_b - n_n + 1$ 個考え、これを基本ループとする。閉路の向きは補木枝に合わせておく。この閉路についてキルヒホッフの電圧則 KVL を書く。
4. 各素子特性をこれら KCL, KVL の式に代入する。
5. 抵抗枝に関係した電流・電圧は、素子特性と KCL, KVL の抵抗枝の式を用いて、すべて消去する。
6. キャパシタ枝の KCL 、インダクタ枝の KVL の式から回路の状態方程式を得る。

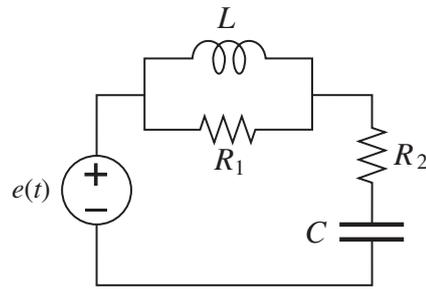


図 3.1 回路の例.

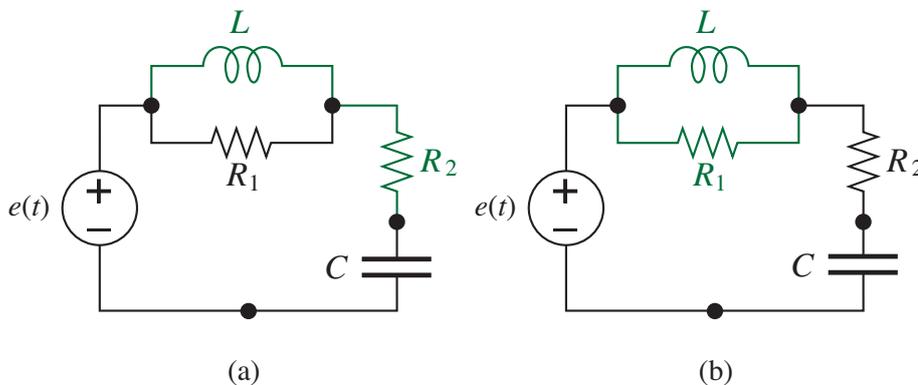


図 3.2 図 3.1 の回路の C 標準木. 黒い実線の枝集合. この回路では 2 つの C 標準木 (a), (b) が考えられる.

7. 電圧源の木枝を含むカットセットに関する KCL , 電流源の補木枝を含む閉路の KVL は, いずれも回路の状態方程式の導出には関係しないので, 使用しない.

この手順にしたがうと, 回路方程式は, キャパシタ電圧とインダクタ電流を未知変数とする 1 階連立常微分方程式となる. KCL と KVL が混在して使われていることに注意しよう. このことから, 状態方程式を一階連立微分方程式として求めるこの定式化を**混合解析** (hybrid analysis), 方程式を混合方程式という.

♣ 例 2.1 ♣

図 3.1 の回路の C 標準木を定め, 状態方程式を求めよ.

♣ 解 ♣ C 標準木については図 3.2 参照. 図 3.2(a) の標準木を用いて, この回路の状態方程式を求めよう. いま, 図 3.3 に示したように枝の方向 (電流の方向とする) を定めると, 基本カットセットと基本ループは, 図中に示した $CS1, CS2, CS3, LP4, LP5$ となる. これらの集合に関する KCL, KVL を求めると次式を得る.

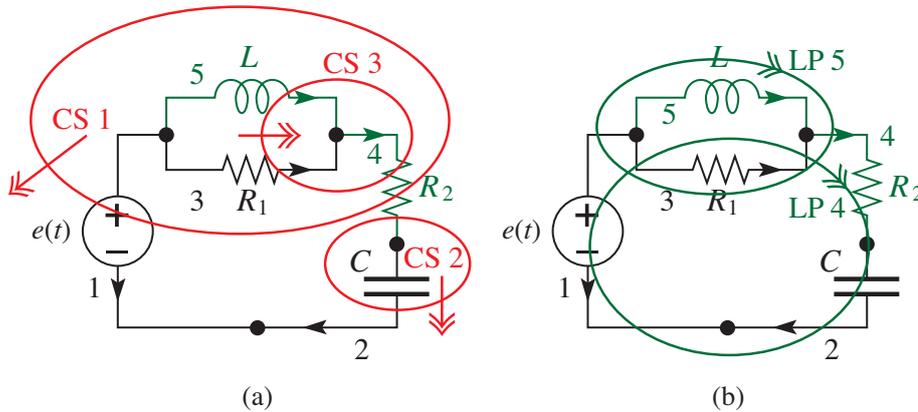


図 3.3 図 3.2(b) の C 標準木に関する基本カットセット (a) と基本ループ (b).

$$\begin{aligned}
 CS\ 1: & \quad i_V + i_{R2} = 0 \\
 CS\ 2: & \quad i_C - i_{R2} = 0 \\
 CS\ 3: & \quad i_{R1} - i_{R2} + i_L = 0 \\
 LP\ 4: & \quad v_{R2} + v_{R1} + v_C - e(t) = 0 \\
 LP\ 5: & \quad v_L - v_{R1} = 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

そこでまず、抵抗枝の電圧と電流を状態 v_C, i_L で表してしまふ。抵抗特性

$$\begin{aligned}
 v_{R1} &= R_1 i_{R1} \\
 v_{R2} &= R_2 i_{R2}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

を式 (3.1) $LP\ 4$: に代入し、 $CS\ 3$: と連立させて

$$\begin{aligned}
 i_{R1} - i_{R2} &= -i_L \\
 R_1 i_{R1} + R_2 i_{R2} &= e(t) - v_C
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

を解くと次式を得る。

$$\begin{aligned}
 i_{R1} &= -\frac{1}{R_1 + R_2} v_C - \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{1}{R_1 + R_2} e(t) \\
 i_{R2} &= -\frac{1}{R_1 + R_2} v_C + \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_L + \frac{1}{R_1 + R_2} e(t)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

したがって、抵抗枝の電圧は次式となる。

$$\begin{aligned}
 v_{R1} &= -\frac{R_1}{R_1 + R_2} v_C - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{R_1}{R_1 + R_2} e(t) \\
 v_{R2} &= -\frac{R_2}{R_1 + R_2} v_C + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{R_2}{R_1 + R_2} e(t)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

一方、この回路の主要な方程式といえるキャパシタに関するカットセット方程式 (3.1) $CS\ 2$: とインダクタに関するループ方程式 (3.1) $LP\ 5$: にそれぞれの特性を代入し、式 (3.4), (3.5) を使

うと、次の状態方程式を得る.

$$\begin{aligned} C \frac{dv_C}{dt} &= -\frac{1}{R_1 + R_2} v_C + \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_L + \frac{1}{R_1 + R_2} e(t) \\ L \frac{di_L}{dt} &= -\frac{R_1}{R_1 + R_2} v_C - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{R_1}{R_1 + R_2} e(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

以上の手順に従えば、確実に状態方程式を求めることができる. カットセット方程式 (3.1) CS1: はこの手順では使わなかったことに注意しよう. 電圧源を流れる電流は状態方程式の導出には関係のない方程式である. これは、電流源を含む場合の電流源に関するループ方程式についても同じことが言える. ♣

A「この演習問題を教室でしていたとき、先生が v_C , i_L で式を立てるようにとおっしゃったので、カットセット CS3 で

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_L + \frac{L}{R_1} \frac{di_L}{dt} \quad (3.7)$$

とし、外側のループで

$$L \frac{di_L}{dt} + R_2 C \frac{dv_C}{dt} + v = e(t) \quad (3.8)$$

とやったら、1階連立方程式の整理をどうすればよいのか困ってしまいました」

K「それでいいじゃないか. $C \frac{dv_C}{dt}$ と $L \frac{di_L}{dt}$ の連立方程式として解けばいいんだ. 式 (3.7) を (3.8) に代入して

$$L \frac{di_L}{dt} + R_2 \left(i + \frac{L}{R_1} \frac{di_L}{dt} \right) + v = e(t)$$

となるから、整理すると式 (3.6) の第2式となる. また、式 (3.8) を (3.7) に代入すると

$$C \frac{dv_C}{dt} = i + \frac{1}{R_1} \left(e(t) - v_C - R_2 C \frac{dv_C}{dt} \right)$$

これを整理すると式 (3.6) の第1式となる」

A「問題となる回路が与えられたとき、どうしたらいいのか迷ってしまいます」

K「キャパシタとインダクタの個数が数個の場合は、大体「目の子」で君がやったようにしたほうが早いだろう. この問題で少し手間取った人はかなりいると思うけど、それは抵抗が嫌な具合つながっていたからだろう. 一般に抵抗素子が沢山含まれる回路では、抵抗枝の電圧・電流を状態で表現するところで計算が必要になる. すなわち、式 (3.3) の部分がふくれあがってくるので一見複雑に見える. こんな場合は、標準木を考えて解けばよいだろう」

3.2 標準木を持つ線形回路の状態方程式

標準木のある線形回路の回路方程式を導出しよう. 導出過程は、素子特性が線形の場合も非線形の変わらないので線形回路を例に取った. 素子特性が非線形になった場合にどこが問題となるか考えながら進めるとよい.

表 3.1 回路素子とその枝電圧, 枝電流および個数

素子名	電圧	電流	個数
木枝独立電圧源 (V)	v_V	i_V	n_V
木枝キャパシタ (C)	v_C	i_C	n_C
木枝抵抗 (G)	v_G	i_G	n_G
補木枝抵抗 (R)	v_R	i_R	n_R
補木枝インダクタ (L)	v_L	i_L	n_L
補木枝独立電流源 (I)	v_I	i_I	n_I

3.2.1 標準木に関する Kirchhoff の法則

標準木を1つ選び, 枝電圧, 枝電流を表 3.1 のように分割する.

この標準木の基本カットセット行列 Q を用いて, キルヒホッフの電流則 $Qi = 0$ を書き下す:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & F_{VR} & F_{VL} & F_{VI} \\ 0 & I & 0 & F_{CR} & F_{CL} & F_{CI} \\ 0 & 0 & I & F_{GR} & F_{GL} & F_{GI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_V \\ i_C \\ i_G \\ i_R \\ i_L \\ i_I \end{bmatrix} = 0 \quad (3.9)$$

同様に, 基本ループ行列 B を用いて, キルヒホッフの電圧則 $Bv = 0$ を求める:

$$\begin{bmatrix} -F_{VR}^T & -F_{CR}^T & -F_{GR}^T & I & 0 & 0 \\ -F_{VL}^T & -F_{CL}^T & -F_{GL}^T & 0 & I & 0 \\ -F_{VI}^T & -F_{CI}^T & -F_{GI}^T & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_V \\ v_C \\ v_G \\ v_R \\ v_L \\ v_I \end{bmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

3.2.2 線形枝特性

電源の特性

電圧源の電圧 v_V と電流源の電流 i_I は時間の既知関数として与えられているものとする。

抵抗特性 (Ohm の法則)

$$\begin{aligned} i_G &= G_G v_G, \quad G_G = \text{diag}(G_1, G_2, \dots, G_{n_G}) \\ v_R &= R_G i_R, \quad R_R = \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_{n_R}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

キャパシタとインダクタの特性

$$\begin{aligned} C \frac{dv_C}{dt} &= i_C, \quad C = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_{n_C}) \\ L \frac{di_L}{dt} &= v_L, \quad L = \text{diag}(L_1, L_2, \dots, L_{n_L}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.2.3 状態方程式

キャパシタ電圧とインダクタ電流 $x = (v_C, i_L)$ を状態変数, 独立電圧源と独立電流源 $u = (v_V, i_I)$ を入力と考えて, 状態方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

を導く。

式 (3.9) と式 (3.10) それぞれの第2式, および式 (3.12) から

$$\begin{aligned} C \frac{dv_C}{dt} &= -F_{CR} i_R - F_{CL} i_L - F_{CI} i_I \\ L \frac{di_L}{dt} &= F_{GL}^T v_G + F_{CL}^T v_C + F_{VL}^T v_V \end{aligned} \quad (3.13)$$

抵抗特性 (3.11) を抵抗枝に関するキルヒホッフの法則に代入してまとめると次式となる。

$$\begin{bmatrix} G_G & F_{GR} \\ -F_{GR}^T & R_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_G \\ i_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{GL} i_L - F_{GI} i_I \\ F_{CR}^T v_C + F_{VR}^T v_V \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

これを解いて次式を得る。

$$\begin{aligned} v_G &= -G^{-1} F_{GR} R_R^{-1} F_{CR}^T v_C - G^{-1} F_{GL} i_L - G^{-1} F_{GR} R_R^{-1} F_{VR}^T v_V - G^{-1} F_{GI} i_I \\ i_R &= R^{-1} F_{CR}^T v_C - R^{-1} F_{GR}^T G_G^{-1} F_{GL} i_L + R^{-1} F_{VR}^T v_V - R^{-1} F_{GR}^T G_G^{-1} F_{GI} i_I \end{aligned} \quad (3.15)$$

ここに

$$\begin{aligned} R &= R_R + F_{GR}^T G_G^{-1} F_{GR} \\ G &= G_G + F_{GR} G_G^{-1} F_{GR}^T \end{aligned} \quad (3.16)$$

とおいた.

式 (3.15) を式 (3.13) に代入して, 次の状態方程式を得る.

$$\begin{aligned}
 C \frac{dv_C}{dt} &= -F_{CR}R^{-1}F_{CR}^T v_C + [F_{CR}R^{-1}F_{GR}^T G^{-1}F_{GL} - F_{CL}] i_L \\
 &\quad - F_{CR}R^{-1}F_{VR}^T v_V + [F_{CR}R^{-1}F_{GR}^T G^{-1}F_{GI} - F_{CI}] i_I \\
 L \frac{di_L}{dt} &= [F_{CL}^T - F_{GL}^T G^{-1}F_{GR}R^{-1}F_{CR}^T] v_C - F_{GL}^T G^{-1}F_{GL} i_L \\
 &\quad [F_{VL}^T - F_{GL}^T G^{-1}F_{GR}R^{-1}F_{VR}^T] v_V - F_{GL}^T G^{-1}F_{GI} i_I
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

これらの導出過程から幾つかの問題点を挙げておこう.

1. 標準木のある回路では, 状態変数の個数は $n_C + n_L$ 個である.
2. 標準木の存在する回路は, 状態変数に拘束の無い素直な回路と言える. 第2章でみた拘束条件を持つ回路は, 抵抗素子を回路に適切に付加することによって容易に標準木をもつ回路に変形できる. その意味では, 標準木をもつ回路は一般的といえる.
3. $F_{GR} \neq 0$ なので, KCL , KVL と抵抗特性を使って抵抗の枝電圧, 枝電流を求める必要があった. この絡みを無くした回路が次節で取り上げる R. Brayton and J. Moser [7] の完全回路である.
4. 抵抗特性に非線形特性を仮定すると, 一般には KCL , KVL とこの特性の両者を満足する枝電圧, 枝電流を求めるのに陰関数定理を使わなければならなくなる. こうなると素子の物理的性質を使うことは難しくなる.

3.3 完全回路とポテンシャル表現

3.3.1 完全回路と枝特性の仮定

R. Brayton and J. Moser [7] は, 抵抗の枝電圧または枝電流が, 回路の状態変数でパラメータ付けできる回路を**完全回路** (complete circuit) と定義している. この節では, 完全回路でかつ標準木のある回路の回路方程式を考えよう. この場合, 抵抗特性を適切に仮定すれば, 状態変数を引数とするスカラー関数を定義することができて, この関数の勾配を用いて状態方程式を記述できる. この節では, このことをみておこう.

まず, KCL と KVL を次式としよう.

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & F_{VL} & 0 \\ 0 & I & 0 & F_{CR} & F_{CL} & F_{CI} \\ 0 & 0 & I & 0 & F_{GL} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_V \\ i_C \\ i_G \\ i_R \\ i_L \\ i_I \end{bmatrix} = 0 \tag{3.18}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -F_{CR}^T & 0 & I & 0 & 0 \\ -F_{VL}^T & -F_{CL}^T & -F_{GL}^T & 0 & I & 0 \\ 0 & -F_{CI}^T & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_V \\ v_C \\ v_G \\ v_R \\ v_L \\ v_I \end{bmatrix} = 0 \quad (3.19)$$

式(3.9), (3.10) と比べると,

1. まず, $F_{GR} = 0$, $F_{GI} = 0$, $F_{VR} = 0$ を仮定した. これは, 完全回路の条件に従った条件である.
2. ここでは, 便宜上更に $F_{VI} = 0$ を仮定する. こちらは, 状態方程式に関係しない出力方程式に関する仮定である. この項は状態変数に関するスカラー関数で定数項と見なされる項であり, 以下の議論で扱えないので最初から除いておいた.

そこで, 抵抗の特性を次のような非線形特性と仮定しよう.

1. 木枝抵抗特性は電流制御型^{*1}:

$$v_G = f(i_G) \quad (3.20)$$

とし,

2. 補木枝抵抗特性は電圧制御型:

$$i_R = g(v_R) \quad (3.21)$$

とする.

以上の仮定から, 抵抗特性は次式のようにパラメータ付けできる.

$$i_G = -F_{GL}i_L \quad (3.22)$$

$$v_G = f(i_G) = f(-F_{GL}i_L)$$

$$v_R = F_{CR}^T v_C \quad (3.23)$$

$$i_R = g(v_R) = g(F_{CR}^T v_C)$$

したがって, 回路の状態方程式は式(3.22)(3.23)を式(3.18)(3.19)に代入して, 次式のように求められる.

$$\begin{aligned} C \frac{dv_C}{dt} &= -F_{CR}g(F_{CR}^T v_C) - F_{CL}i_L - F_{CI}i_I \\ L \frac{di_L}{dt} &= F_{GL}^T f(-F_{GL}i_L) + F_{CL}^T v_C + F_{VL}^T v_V \end{aligned} \quad (3.24)$$

^{*1} 抵抗特性が枝電流の関数で表される場合, この特性を電流制御型抵抗という. また, 電圧の関数で表される特性を電圧制御型抵抗と呼ぶ.

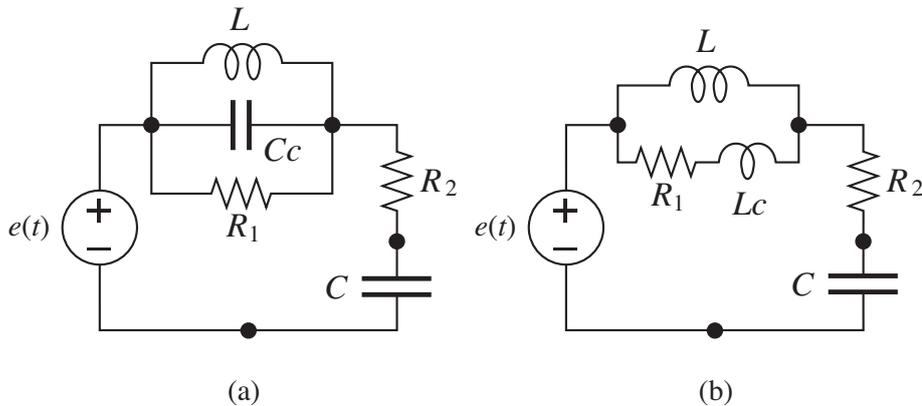


図 3.4 完全回路に変形した回路例.

3.3.2 標準木はあるが完全回路でない回路を完全回路にする方法

先に回路例としてあげた図 3.1 の回路は完全回路ではない. このような回路は, F_{GR} が零となるように適切にインダクタまたはキャパシタを抵抗に付加するとよい. 付加した回路の一例を図 3.4 に示した. ここでは抵抗 R_1 に並列にキャパシタ Cp を付加するか, あるいは直列にインダクタ Lc を付加すると容易に回路を完全化できる.

3.3.3 スカラ関数の導出

第 1 章の最後の部分でみたように, KCL と KVL を満たす枝電圧, 枝電流は閉じた 1 形式:

$$\omega = v^T di = \sum_{k=1}^{n_b} v_k di_k = 0 \tag{3.25}$$

となるのであった. KCL と KVL を満たす空間は単連結な R^{n_b} を考えているので, この関係式はスカラ関数の存在を示唆している. これを導こう.

$$\begin{aligned} \omega &= v^T di = v_V^T di_V + v_C^T di_C + v_G^T di_G + v_R^T di_R + v_L^T di_L + v_I^T di_I \\ &= (v_L^T di_L - i_C^T dv_C) + (v_G^T di_G - i_R^T dv_R) + d(v_C^T i_C + v_R^T i_R + v_V^T i_V) \end{aligned} \tag{3.26}$$

ここに, $di_I = 0, dv_V = 0$ とおき, $d(v_V^T i_V) = v_V^T di_V + dv_V^T i_V = v_V^T di_V$ となることを使った. 式 (3.26) の右辺第 2, 3 項から次のスカラ関数を定義する.

$$\begin{aligned} P(i_L, v_C) &= \int_0^{i_G} v_G^T di_G - \int_0^{v_R} i_R^T dv_R + v_C^T i_C + v_R^T i_R + v_V^T i_V \\ &= - \int_0^{i_L} f(-F_{GL} i_L)^T F_{GL} di_L - \int_0^{v_C} g(F_{CR} v_C)^T F_{CR} dv_C - v_C^T F_{CL} i_L - v_C^T F_{CI} i_I - v_V^T F_{VL} i_L \end{aligned} \tag{3.27}$$

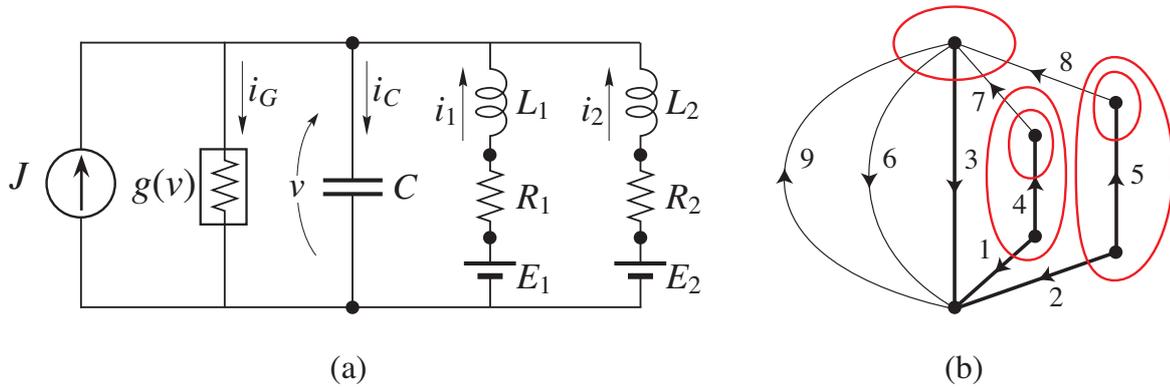


図 3.5 回路の例.

文献 [7] では、関数 P を **混合ポテンシャル関数** (mixed potential function) と呼んでいる. この関数を使って, 式 (3.26) は次式となる.

$$\omega = v_L^T di_L - i_C^T dv_C + dP(i_L, v_C) = 0 \quad (3.28)$$

したがって,

$$\omega = v_L^T di_L - i_C^T dv_C + \frac{\partial P}{\partial i_L} di_L + \frac{\partial P}{\partial v_C} dv_C = \left(v_L^T + \frac{\partial P}{\partial i_L} \right) di_L + \left(-i_C^T + \frac{\partial P}{\partial v_C} \right) dv_C = 0 \quad (3.29)$$

より次の状態方程式を得る*2.

$$\begin{aligned} v_L &= L \frac{di_L}{dt} = - \left(\frac{\partial P}{\partial i_L} \right)^T \\ i_C &= C \frac{dv_C}{dt} = \left(\frac{\partial P}{\partial v_C} \right)^T \end{aligned} \quad (3.30)$$

実際, 式 (3.27) を i_L, v_C で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial i_L} &= f(-F_{GL}i_L)^T (-F_{GL}) - v_C^T F_{CL} - v_V^T F_{VL} \\ \frac{\partial P}{\partial v_C} &= -g(F_{CR}v_C)^T F_{CR} - i_L^T F_{CL} - i_I^T F_{CI} \end{aligned} \quad (3.31)$$

となる. これを転置し, 式 (3.30) に代入すると, 状態方程式 (3.24) を得る.

3.3.4 回路例：拡張 BVP 方程式

図 3.5 (a) の回路を考える. この回路は, 第 1 章図 1.10 で考えた BVP 発振回路にインダクタ回路部をもう一つ並列に付加した回路となっている. 今, 図 (b) に示した標準木 (太い実線の

*2 文献 [7] では, インダクタとキャパシタの特性の定義が, それぞれ $v_L = -L \frac{di_L}{dt}$, $i_C = -C \frac{dv_C}{dt}$ と定義されているので, 状態方程式 (3.30) の符号が逆になっている.

3. 電圧 v_C の関数の項 (文献 [7] ではこの項を電圧ポテンシャルと呼んでいる) :

$$G(v_C) = \int_0^{v_C} g(F_{CR}^T v_C) dv_C + v_C^T F_{CI} i_I \quad (3.38)$$

したがって、これらのポテンシャルを用いると、

$$P(i_L, v_C) = -v_C^T F_{CL} i_L + F(i_L) - G(v_C) \quad (3.39)$$

と書くことができる。この記法にしたがって状態方程式を表すと次式となる。

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} &= F_{CL}^T v_C - \left(\frac{\partial F}{\partial i_L} \right)^T \\ C \frac{dv_C}{dt} &= -F_{CL} i_L - \left(\frac{\partial G}{\partial v_C} \right)^T \end{aligned} \quad (3.40)$$

更に、関数*³

$$R(i_L, v_C) = F(i_L) - G(v_C) \quad (3.41)$$

を定義すると式 (3.38) の右辺第2項は R の勾配で表現できる。

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} &= F_{CL}^T v_C - \left(\frac{\partial R}{\partial i_L} \right)^T \\ C \frac{dv_C}{dt} &= -F_{CL} i_L - \left(\frac{\partial R}{\partial v_C} \right)^T \end{aligned} \quad (3.42)$$

インダクタと抵抗からなる回路

以上の議論で仮定した回路でキャパシタを含まない回路を考えると、状態方程式は次式となる。

$$L \frac{di_L}{dt} = - \left(\frac{\partial F}{\partial i_L} \right)^T \quad (3.43)$$

キャパシタと抵抗からなる回路

以上の議論で仮定した回路でインダクタを含まない回路を考えると、状態方程式は次式となる。

$$C \frac{dv_C}{dt} = - \left(\frac{\partial G}{\partial v_C} \right)^T \quad (3.44)$$

抵抗を含まない回路：LC 回路

抵抗が無いので式 (3.40) は次式となる。

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} &= F_{CL}^T v_C \\ C \frac{dv_C}{dt} &= -F_{CL} i_L \end{aligned} \quad (3.45)$$

*³ この関数は Rayleigh の散逸関数に対応している。

いま、キャパシタ特性とインダクタ特性に非線形特性を許した場合の状態方程式を導くために、これらの素子に蓄えられる電気的エネルギーや磁氣的エネルギーを定義しよう。

1. インダクタ特性を磁束制御型と考え、磁氣的エネルギー $W_L(\phi)$ を次式で定義する。

$$i_L = f_L(\phi), v_L = \frac{d\phi}{dt}, W_L(\phi) = \int_0^\phi i_L^T d\phi = \int_0^\phi f_L(\phi)^T d\phi \quad (3.46)$$

2. キャパシタ特性を電荷制御型と考え、電気的エネルギー $W_C(q)$ を次式で定義する。

$$v_C = f_C(q), i_C = \frac{dq}{dt}, W_C(q) = \int_0^q v_C^T dq = \int_0^q f_C(q)^T dq \quad (3.47)$$

3. 回路に蓄えられる全エネルギーを次式で定義する。

$$H(\phi, q) = W_L(\phi) + W_C(q) \quad (3.48)$$

これらの関係を用いて、式 (3.45) を書き直すと次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= F_{CL}^T \left(\frac{\partial H}{\partial q} \right)^T \\ \frac{dq}{dt} &= -F_{CL} \left(\frac{\partial H}{\partial \phi} \right)^T \end{aligned} \quad (3.49)$$

特に、線形素子の場合

$$\phi = Li_L, q = Cv_C, i_L = L^{-1}\phi, v_C = C^{-1}q, H(\phi, q) = \frac{1}{2}\phi^T L^{-1}\phi + \frac{1}{2}q^T C^{-1}q \quad (3.50)$$

の関係を式 (3.49) に代入すると式 (3.45) を得る。この場合、回路に標準木が存在することを仮定しているのでキャパシタのみからなるループやインダクタのみからなるカットセットは無い。すなわち、強制退化は無いと仮定している。しかし、キャパシタのみからなるカットセットやインダクタのみからなるループの存在は許しているため、行列 F_{CL} は必ずしも正方行列とは限らない。

勿論、エネルギー (3.48) は運動を通じて保存される：

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \phi} F_{CL}^T \left(\frac{\partial H}{\partial q} \right)^T - \frac{\partial H}{\partial q} F_{CL} \left(\frac{\partial H}{\partial \phi} \right)^T = 0 \quad (3.51)$$

3.3.6 幾つかの注意

抵抗特性に関する相反性の条件

これまで特に断らなかつたが、抵抗特性 (3.20) (3.21) のそれぞれに相互結合のある特性を仮定すると、ポテンシャル関数が存在するためには次の相反性の条件 (reciprocity condition) が必要である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_h}{\partial i_{Gk}} &= \frac{\partial f_k}{\partial i_{Gh}}, \quad h, k = 1, \dots, n_G \\ \frac{\partial g_h}{\partial v_{Rk}} &= \frac{\partial g_k}{\partial v_{Rh}}, \quad h, k = 1, \dots, n_R \end{aligned} \quad (3.52)$$

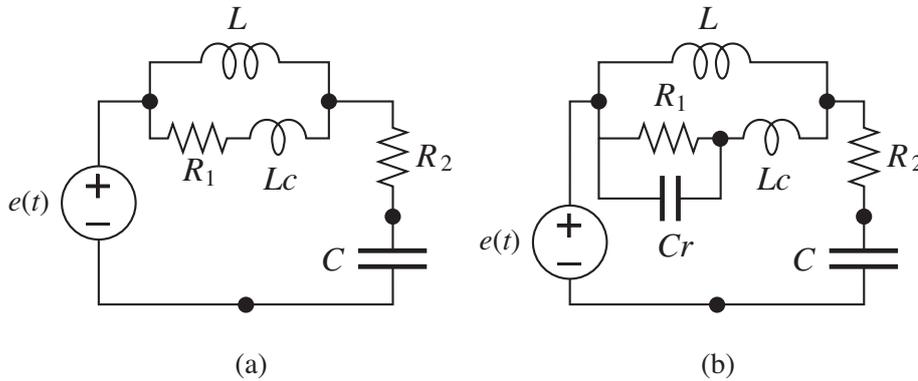


図 3.6 回路の正則化の例.

抵抗特性と回路の正規化

ここでの議論では木枝抵抗特性は電流制御型を、補木枝抵抗特性は電圧制御型を仮定した。このようになっていない回路ではどうなるのであろうか。すなわち、木枝抵抗に電圧制御型を含めざるを得ない接続がなされているとか、補木枝抵抗に電流制御特性が混じっているといた場合である*4。このような回路を扱う一つの方法として

1. 電圧制御型木枝抵抗に並列に小さなキャパシタを、
2. 電流制御型補木枝抵抗に直列に小さなインダクタを

付加する方法*5が考えられる。新しくできた回路は上で考えた完全回路となるので、容易に状態方程式を求めることができる。このような方法を回路の正則化 (regularization) と言う。

図 3.6 (a) の回路は、図 3.4 (b) に示した完全回路である。抵抗 R_1 が電圧制御型特性を持つと仮定しよう。この回路の正則化した一例を図 (b) に示した。

3.4 寄生素子を考える必要のある回路例

図 3.7(a) の回路を考える。この回路は、第 1 章であげた状態方程式が BVP 方程式となる回路である。ただし、ここでは回路のキャパシタンス C は非常に小さい： $0 < C \ll 1$ と仮定する。このような通常のモデリングでは無視できる程度に小さい値をもつ素子は寄生素子と呼ばれている。また、非線形抵抗 (コンダクタ) G の特性 $i_G = g(v)$ と、直線 $v + Ri = E$ の関係は図 (b) に示した条件を満たしていると仮定しよう。

この回路では、非線形抵抗は電圧制御型であり、同時に回路の接続からインダクタ電流でパラメータ付けされている。したがってインダクタ電流を状態変数に選んで状態方程式を求めようと

*4 一般に、弛張振動 (relaxation oscillation) を起こす発振回路にはこのような回路が使われている。

*5 最初のモデル化で無視した、寄生素子である小さなキャパシタと小さなインダクタを再び考慮してモデルに追加する方法と考えると自然である。

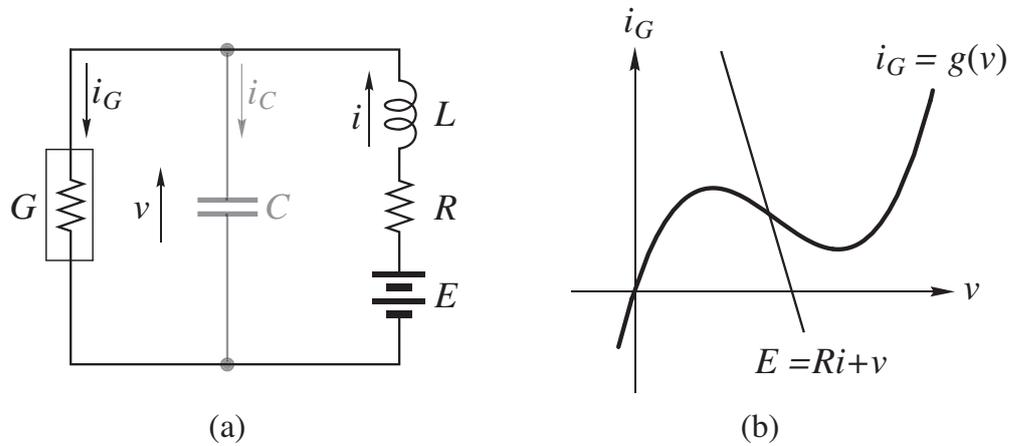


図 3.7 キャパシタを寄生素子と考えた発振回路の例.

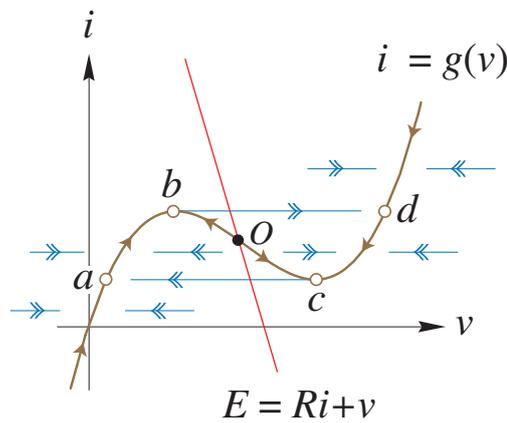


図 3.8 寄生素子と考えた発振回路の相平面図.

すると抵抗特性が関数として記述できなくなる.

寄生素子の値が零： $C = 0$ と仮定した場合の回路方程式を求めると

$$0 = i - g(v) \tag{3.53}$$

$$L \frac{di}{dt} = -v - Ri + E$$

となる. これは曲線 $i = g(v)$ 上の運動を与えている. 枝電圧 v を使って書き直すと

$$Lg'(v) \frac{dv}{dt} = -v - Rg(v) + E \tag{3.54}$$

となる. $g'(v) = 0$ の点 b, c で式 (3.54) は定義できないが, それ以外の曲線上の点では, 状態は図 3.8 の矢印の方向に動く.

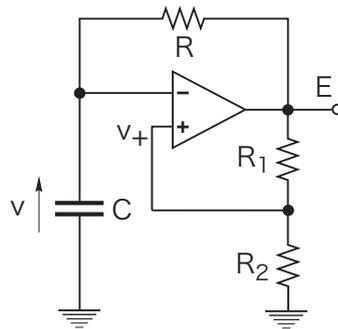


図 3.9 オペアンプを用いた方形波発振回路.

寄生素子考えた状態方程式は

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= i - g(v) \\ L \frac{di}{dt} &= -v - Ri + E \end{aligned} \tag{3.55}$$

なので、 $0 < C \ll 1$ を考慮してこの方程式の振る舞いをみてみよう。第1式は

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C}[i - g(v)] \tag{3.56}$$

と書ける。 C が小さいことから、この運動は速い運動となる。図中青い2重の矢印を参照。これに比べて、上で考えた $i = g(v)$ 上の運動はゆっくりとした運動と見なせる。ゆっくりした運動を無視して、式 (3.56) の平衡点は、 i がほとんど動かないと考えて、 $i = g(v)$ である。この点の安定性は $g'(v) > 0$ の曲線部分では安定、 $g'(v) < 0$ の曲線部分では不安定となる。ちょうど $g'(v) = 0$ となる点で、寄生素子の影響を考えると状態は曲線から離れる外乱の影響を受けて速い運動に移行して安定な曲線の別の部分に急接近する。図中点 $b \rightarrow d$ あるいは点 $a \leftarrow c$ を参照。したがって、この系では任意の初期値から出発する運動は、速い運動とゆっくりした運動を交互に繰り返しながら、周期軌道 $abdca$ 上の運動に引き込まれてゆく。このような発振は弛張振動と呼ばれ、周期振動の波形は正弦波からかけ離れ高調波を多く含んだものとなる。

弛張振動を極端に単純化して方形波を発生させる回路を図 3.9 示した。オペアンプという能動素子を使っているので、 RC 回路でしかも1次元の系であるにもかかわらず振動が発生している。回路方程式は図中の記号を用いて次式となる。

$$RC \frac{dv}{dt} + v = E \text{sign}(\beta E - v) \tag{3.57}$$

ここに、 $\beta = R_2 / (R_1 + R_2)$ とおいた。また、関数 $\text{sign}(x)$ は次式で定義した。

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \tag{3.58}$$

参考文献

- [1] 渡部和著；線形回路理論第 1 章，昭晃堂，昭和 42 年.
- [2] R. A. Rohrer: Circuit Theory—An Introduction to the State Variable Approach—, Chapters 14 and 16, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. 1970.
- [3] A. Rohrer, 齋藤正雄, 篠崎寿夫共訳：回路理論—状態変数解析入門—, 学献社, 1973.
- [4] 小澤孝夫著：電気回路 II—過渡現象, 伝送回路編—, 第 9, 10 章, 昭晃堂, 昭和 55 年.
- [5] 林重憲著：演算子法解説, 電気書院, 昭和 38 年.
- [6] S. Lefschetz: Applications of Algebraic Topology—Part I: Application of Classical Topology to Graphs and Networks—, Applied Mathematical Sciences 16, Springer-Verlag, 1975.
- [7] R. Brayton and J. Moser: A theory of nonlinear networks I and II, Quart. Appl. Math. 22, pp. 1-33, 81-104, 1964.
- [8] 川上博編著：生体リズムの動的モデルとその解析—ME と非線形力学系—, コロナ社, 2001.
- [9] A. A. Andronov, A.A.Vitt and S. E. Khaikin: Theory of Oscillators, Chapter X, Pergamon Press, 1966.