

# Hybrid 系としての LED ホタルの解析法について

川上 博

E-mail: h.kawakami@384.jp

2013.02.13/2013.09.18/2014.10.09 修正

## 目次

1	はじめに	2
1.1	動機づけ	2
1.2	ハイブリッド系の定義	2
1.3	$m$ 個の力学系の記述	3
1.4	各モードでの状態空間の構造：フローの定義領域とモードの遷移領域	5
1.5	到着集合と出発集合	6
1.6	ハイブリッド系の状態空間：貼り合わされた多様体	7
1.7	Poincaré 断面の選び方—自律系の場合—	7
1.8	周期的な外力の加えられた強制系の Poincaré 写像	8
1.9	まとめ：おおざっぱな解析手順	8
2	RC 方形波発振器	10
2.1	回路の構成と動作解析	10
2.2	ハイブリッド系としての回路の抽象化	11
2.3	周期振動とデュティーサイクル	15
3	LED ホタルの強制振動	17
3.1	回路の構成と動作の概要	18
3.2	LED ホタルの解析	24

# 1 はじめに

## 1.1 動機づけ

このノートは LED ホタル [1-10] の解析を目的とした簡単な C プログラムを作ろうとしたことから始まった。ホタルの数が増えるとイベントが込み入ってきて、下手をすると if 文のスパゲッティプログラムになりかねない。そこでハイブリッド系の定義から見直し、従来から知られている力学系の解析方法も少し拡張することにした。

実際、アナログとデジタルの結合系が身近に溢れているのに、LED ホタルの解析に有効なハイブリッド系の定義を見かけないのはどうしてなんだろう。理由はともかく「我々の必要なハイブリッド系」を定義し、その運動を観察して周期軌道の安定性や分岐現象の解析を試みることにしよう。

ここでは、アナログ物理系である電気回路や電子回路など連続な状態をもつ部分系と、スイッチ、コンパレータや論理回路などからなる離散時間・離散状態をもつデジタル部分系を結合させ、このアナログ・デジタル混合系をハイブリッド系 (hybrid system) と考え、その動作を解析する手法を検討したい。アナログ状態を記述する適切な多様体を定義し、その上に Poincaré 写像がうまく定義できると、周期振動、カオスやこれらの分岐が解析できる。

アナログとデジタル、2つの回路を並列して考えなければならないので、それぞれの分野で使われている専門用語を区別してうまく使い分ける必要がある。たとえば、状態 (state) という言葉は、アナログ部分系では連続な時間信号を意味するが、デジタル系では 0 と 1 の 2 値からなる離散信号を意味する。どちらも「状態」と言うのでは、使い勝手が悪いので、ここではアナログ系の状態はそのまま状態 (state) と呼ぶことにし、デジタル系の状態はモード (mode) と呼ぶことにした [11]。このように使用する用語が通常の両分野での使用方法と異なる場合もあるので注意してほしい。

## 1.2 ハイブリッド系の定義

なめらかな  $n$  次元多様体  $M \subset R^n$  を状態空間とし、 $M$  上に有限個 ( $m$  個とする) のベクトル場を定義してこれらを適切に切り換え、 $M$  上のフローを生成・制御する問題を考えよう。

ここで、ベクトル場の切り換え制御は、デジタル回路で構成した有限状態機械 (Finite State Machine, FSM) により行うものと仮定する。以下では、このように  $M$  上のフローと FSM によるベクトル場の切り換えルールから構成した混合系をハイブリッド系 (hybrid dynamical system) と呼ぶことにする\*<sup>1</sup>。

このクラスのハイブリッド系では、系全体の状態として、 $M$  上のフローを記述するアナログ状態  $x \in M$  と FSM の  $m$  個のデジタル離散状態を持っている。以下、混乱を避けるため、フローの状態はそのまま状態 (state) と呼ぶことにし、FSM の状態はモード (mode) と呼ぶことにする。

---

\*<sup>1</sup> 以前のノートでは、 $m$  個の力学系の部分をアナログ部分系、FSM の部分をデジタル部分系と呼び、ハイブリッド系とは、アナログ部分系とデジタル部分系を結合して作った混合系のことであるとした。このノートでも対象とする具体的な系は同じである。

さて、このハイブリッド系では、状態やモードにつきのような時間発展\*2が見られる。

1.  $M$  上の運動は、部分的にみると  $m$  個あるベクトル場のいずれかで定まるフローである。FSM のモード数もちょうど  $m$  個あり、各モードに対してベクトル場が一意的に定義されていると仮定する。したがって、あるモードに運動があれば、フローはこのモードで定義されているベクトル場によって生成される。
2.  $M$  上には複数の余次元 1 の境界集合が定義されており、フローが 1 つの境界集合に到着すると、この状態が属するモードのイベント (event) が発生し、FSM のモード遷移が起こり、ベクトル場が切り換えられる。それ以降のフローは、切り換えられた新しいモードのベクトル場によって生成される。
3. FSM のモード遷移は、次の 2 種類のイベントによって起こる：
  - (a) フェーズイベント (phase event)：状態が境界集合に到達したことによって起こるイベント。一般に、状態  $x(t)$  がある条件を満たした場合に発生するイベント
  - (b) タイマーイベント (timer event)：周期的なパルス入力信号の印加された瞬間に起こるイベント。一般に時刻にのみ依存して起こるイベント
  - (c) (a) と (b) の混合イベント：境界集合が時間的に動く場合のようなフェーズイベントとタイマーイベントが同時に起こるイベントフェーズイベントしか発生しない系は自律系、タイマーイベントを含む系は非自律系と考えることができる。

したがって、このクラスの系は、力学系のフローが FSM のモード遷移のためのイベントを発生し、モードが遷移するとベクトル場が切り替わってフローが制御される。複数の力学系で生成されるフローを 1 つの FSM が制御している混合力学系と考えてよい。

### 1.3 $m$ 個の力学系の記述

共通の状態空間  $M$  上に定義された  $m$  個のベクトル場を考える代わりに、状態空間も独立した  $m$  個の力学系を考え、それらの  $m$  個の状態空間がたまたま同じ場合を考えるとしても問題は同じである。そこで、 $m$  個の状態空間  $M_i$ , ( $i = 0, 1, \dots, m-1$ ) と、 $M_i$  上にベクトル場を定義し、この  $m$  個の力学系を FSM の各モードに含めて考えることにしよう。図 1 には、この状況の例が示されている。まず、図 (a) はこの例の FSM のモード遷移図 (mode transition diagram) である。角を丸めた四角形がモード (FSM の離散状態) を表し、矢印がモード間の遷移を表す。通常は矢印に合わせて、遷移の条件や遷移の前後で生じる事柄を記述する。ここでは、モード  $i$  からモード  $k$  への遷移条件を記号  $e_{ki}$  として表してある。さて、図 (b) は各モードに含まれる力学系の状態空間、ベクトル場やフロー等を示した図である。フローの 1 例としてモード 1 の状態  $x_0 \in M_1$  を初期値とする運動をみてみよう。

1.  $x_0 \in M_1$  を初期値とするフローは、 $M_1$  上に定義されたベクトル場に従って運動し、余次元 1 の

---

\*2 力学系の状態の連続時間発展と、FSM のモードの離散時間発展の 2 つの時間発展がある。

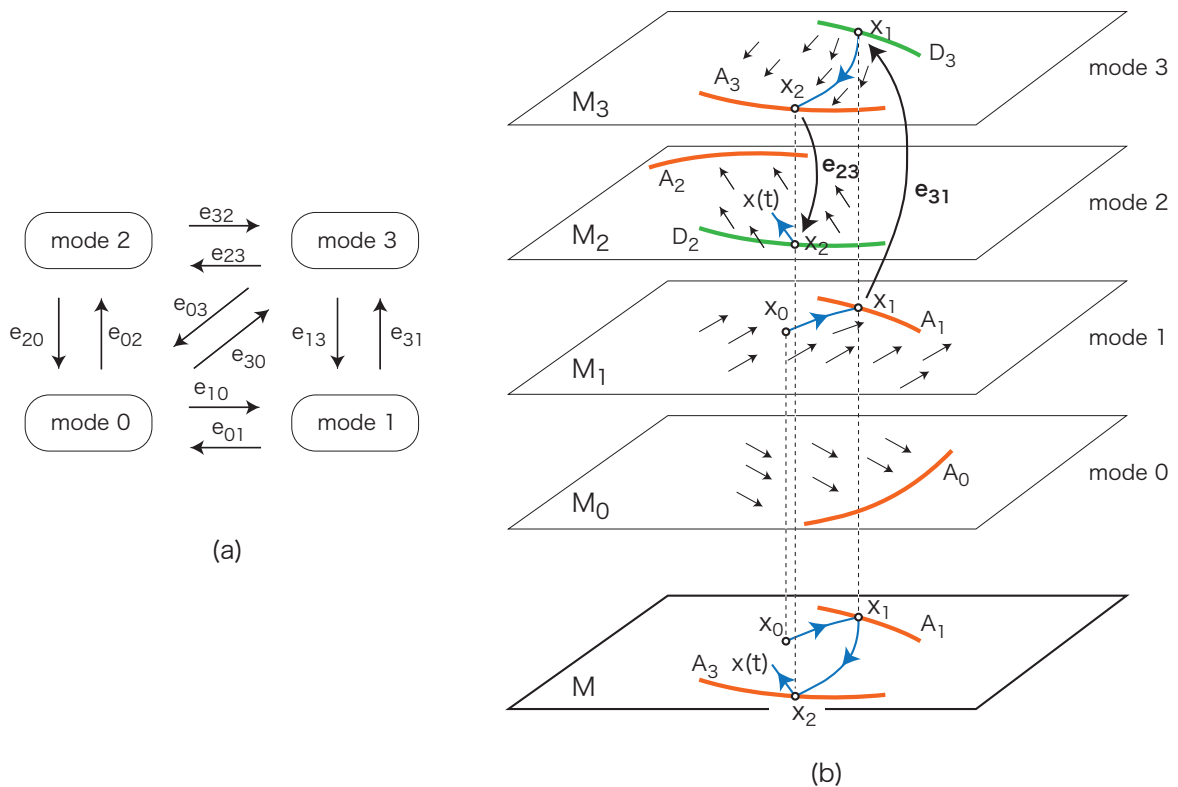


図1 ハイブリッド系の例. (a) モードとモード間の遷移 (矢印) を示したモード遷移図. (b) 各モードの状態空間, ベクトル場とフロー.

境界多様体  $A_1$  (フローの到着集合 (arrival set) と呼ぶことにする) と点  $x_1$  で横断的に交わる. この系では, フローが到着集合に到達することは1つのイベントであり, このイベントの発生により, モードの遷移  $e_{31}$  が起こる. その結果, FSMのモードはモード3に遷移する. これに伴って, 集合  $A_1$  は集合  $D_3$  に写る.  $D_3$  は後述するように出発集合 (departure set) と呼ばれる.

2. モード3でのフローは,  $x_1 \in D_3$  を初期値とする運動である. モード3には到着集合  $A_3$  が設定されており, フローは点  $x_2$  でこの集合と交わり, イベント  $e_{23}$  を発生し, モードはモード2に遷移する.
3. モード2でのフローは,  $x_2 \in D_2$  を初期値とする運動で, 上で述べた状況と同様に進展する.
4. これらの運動を, 最初に考えた共通の状態空間  $M$  上でみると, 図 (b) の最下段に描いた状態空間図が得られる. この図は, 共通となる状態空間の上に, 各モードの運動を重ねて描いた図である. 各モードの状態空間を被覆空間として描いた図とみると分かりやすい.

## 1.4 各モードでの状態空間の構造：フローの定義領域とモードの遷移領域

各モードでの状態空間  $M_i$  の構造をみておこう。まず、 $M_i$  は有限個の余次元 1 の境界多様体で仕切られている。以下、説明を簡単にするために、2つの境界多様体の場合について考える。これらを

$$\begin{aligned} B_{i1} &= \{x \in M_i \mid g_{i1}(x) = 0\} \\ B_{i2} &= \{x \in M_i \mid g_{i2}(x) = 0\} \end{aligned} \quad (1)$$

で与えられているとしよう。ここで

$$g_{ik} : R^n \rightarrow R; \quad k = 1, 2$$

はなめらかな関数とする。

更に、最も簡単な場合として状態空間  $M_i$  がこれらの境界集合で4つの領域：

$$\begin{aligned} M_{i0} &= \{x \in M_i \mid g_1(x) > 0, g_2(x) > 0\}, \quad M_{i1} = \{x \in M_i \mid g_1(x) > 0, g_2(x) < 0\}, \\ M_{i2} &= \{x \in M_i \mid g_1(x) < 0, g_2(x) > 0\}, \quad M_{i3} = \{x \in M_i \mid g_1(x) < 0, g_2(x) < 0\} \end{aligned}$$

に分けられる場合を仮定する。これらの領域は、ハイブリッド系であることから次の性質を持つ。

1.  $M_{ik}, k = 0, 1, 2, 3$  は、ベクトル場が定義された力学系のフローが存在する領域が1つと、その他の3つの領域に分けられる。その他の領域では、各点でモード遷移のためのイベントが発生する。ここでは、 $M_{i0}$  がフローが存在する領域、 $M_{ik}, k = 1, 2, 3$  がモード遷移の起こる領域と仮定して話を進める\*<sup>3</sup>。図2参照。
2. フローは大抵の場合、境界集合と横断的に交わる。フローが到達する境界集合の部分集合を到着多様体 (arrival manifold) と呼ぶことにしよう。図2では、赤い太線で表した集合  $A_{i1}$  と  $A_{i2}$  がこの集合である。
3. 領域  $M_{ik}, k = 1, 2, 3$  内に状態が置かれると、イベント発生条件が満たされ、直ちにモード遷移が起こる。モードの遷移先は、3領域  $M_{ik}, k = 1, 2, 3$  のそれぞれの集合によって異なるモードである。図3参照。

通常は、このイベント発生領域に初期状態が置かれることはないので、これらの領域は境界集合を除いて、ハイブリッド系の時間発展には関係しない。力学系の状態は、到着集合に達すると直ちに他のモードに遷移して、これらの領域に進入しないからである。ただし、フローでは到達しない状態であってもモード遷移では写ってくることに注意しよう。そのため、通常は定義せずに済ませている領域  $M_{ik}, k = 1, 2, 3$  について、このノートでは遷移領域であると明確に定義して運動を考えることとした。

\*<sup>3</sup> 以前のノートでは、状態空間にできる各領域をフェーズ (phase) と呼び、フェーズを安定な領域 (ここでいうベクトル場の定義される領域) と、不安定な領域 (ここでモード遷移領域) に分類した。ここでの分類：フローが定義される領域とモードが遷移する領域の方が、対応する物理的なハイブリッド系を忠実に表していると考えられる。

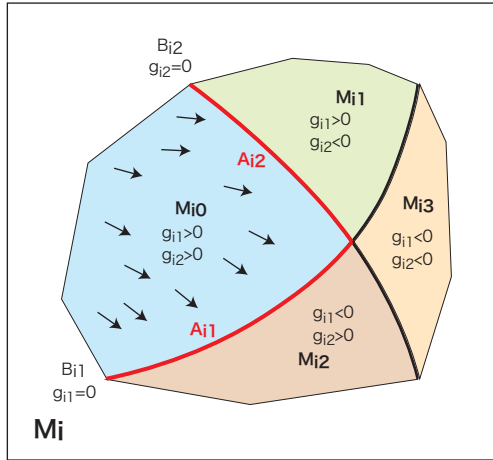


図2 モード  $i$  の状態空間  $M_i$  の構造：フローの定義された領域  $M_{i1}$  とモードの遷移が定義されたその他の領域.

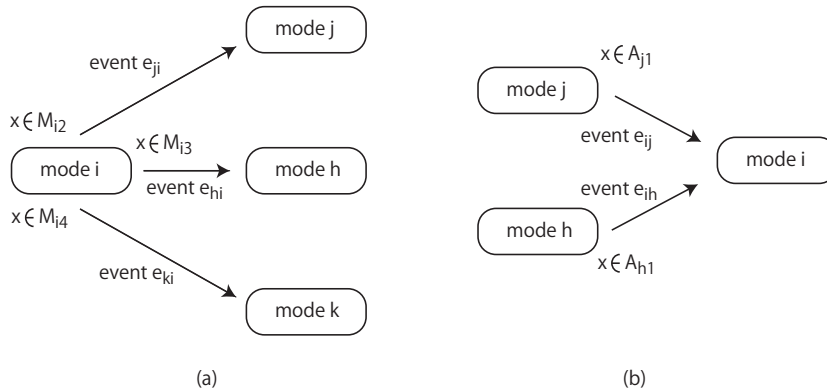


図3 (a) モード  $i$  からのモード遷移. (b) モード  $i$  へのモード遷移.

## 1.5 到着集合と出発集合

$M_i$ , ( $i = 0, 1, \dots, m-1$ ) 上のフロー領域で、フローが到着する余次元1の到着多様体  $A_{ik}$  の定義は上述した。それでは、モード  $i$  でのフローはどこから始まるのであろうか。これをみるにはモード  $i$  に遷移してくる一つ前のモードの到着集合を調べるとよい。

いま、モード  $i$  に遷移してくるモードが、モード  $j$  と  $h$  の2つの場合を例にとって考えよう。図3 (b) 参照。まず、モード  $j$  からモード  $i$  への遷移が起こったとしよう。このとき、モード  $j$  の状態  $x \in M_j$  は、モード  $i$  の状態  $y \in M_i$  に遷移する。この変換  $f: M_j \rightarrow M_i; x \mapsto y = f(x) = x$  は、恒等変換である。 $A_{j1}$  は、この変換で  $M_i$  の同じ集合に写される。この集合を  $D_{i1}$  と書き、 $M_i$  上のフローの出発集合 (departure set) と呼ぶことにする。たとえば、図4のモード遷移  $e_{ij}$  で、この変換が起こり、 $A_{j1}$  は、 $D_{i1}$  に移される。

モード  $h$  からモード  $i$  への遷移についても、同様に考えることができる。図4では  $D_{i2}$  がこの場合

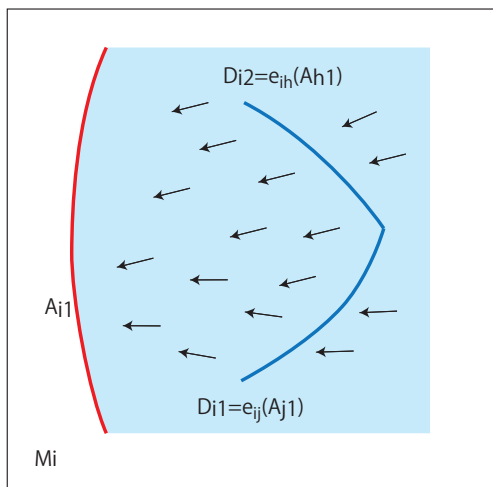


図4 モード  $i$  のフロー領域での出発集合.

の出発集合である. このように, モードの遷移の際,  $M_j$  や  $M_h$  の到着多様体を  $M_i$  の出発集合に貼付けた多様体を考えると, アナログ状態はこの貼り合わせた多様体上を連続して発展しているようにみえることになる.

## 1.6 ハイブリッド系の状態空間：貼り合わされた多様体

各モードに定義される到着集合を, その上で定義されるモード遷移によってモードを遷移させ, 写った先の出発集合に貼り合わせてゆくと一つの貼り合わせ多様体ができる. これがハイブリッド系の状態空間である.

## 1.7 Poincaré 断面の選び方—自律系の場合—

自律系の解析には, Poincaré 断面を適切に選んでこの断面からそれ自身へのフローによる写像を利用するとよい. そこで Poincaré 断面となる余次元 1 の多様体の選び方であるが, これもそれぞれの具体的な系をみて決めることになる. 一般的には, 適当なモード  $i$  における出発集合  $D_i$  を Poincaré 断面と選べば便利ことが多い.

なお, フローや Poincaré 写像に不連続点が生じるのは, 次の場合である. 図5 参照.

1. 到着集合が連結していない.
2. フローが到着集合に接する.

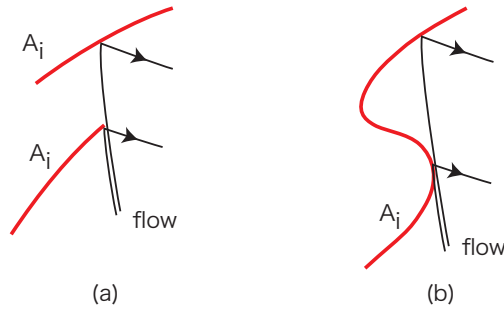


図5 フローや Poincaré 写像に不連続点が生じる場合.

## 1.8 周期的な外力の加えられた強制系の Poincaré 写像

$t = 0_+$  (タイマーイベントの出発集合) から始まるモードを  $m_1, m_2, \dots, m_k$  とする.  $t = 0_+$  でこの  $k$  個のモードの状態空間に初期値を置き, 1 周期後  $t = T$  での状態を求め,  $t = T$  での  $t = 0_+$  へのモードの遷移を行って,  $k$  個のモードの状態空間の間での写像を得る. これらの合成写像として Poincaré 写像を求めるとよい.

なお, タイマーイベントをフェーズイベントの特別な場合として考えることもできる. すなわち, 時間軸を状態空間の中に入れて考える. いま, 非自律系を

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (2)$$

としよう. ここで,  $t = \theta$  と置くと

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x) \\ \frac{dt}{d\theta} &= 1 \end{aligned} \quad (3)$$

と書き換えることができる. これは状態変数  $(t, x)$  の自律系とみることができる. 時間に関して周期  $T$  の周期的入力があった系では,  $t = 0$  の状態を出発集合とするフローを考え,  $t = T$  での値を到着集合とみると上述の強制系の Poincaré 写像が得られる.

## 1.9 まとめ：おおざっぱな解析手順

### 1. モードの決定. 各モードでのベクトル場の決定

モード変数, 状態変数, 各モードでのベクトル場を定義する微分方程式, 入力変数, 出力変数などを一覧表にしてハイブリッド系を概観することから始めよう.

### 2. 各モードの状態空間 $M_i$ 上での検討事項

フローの定義域, モードの遷移域の決定. 境界集合: 到着集合, モードの遷移先, 遷移先の出発集合などの決定. 最終的には, フロー定義領域をモード遷移で張り合わせた結果できる状態空間(集合)のトポロジーを調べておく. フロー定義域とモード遷移の関係を示した図の作成.



3. モード遷移図の作成

4. Poincaré 断面と Poincaré 写像の決定

Poincaré 断面には，出発集合を選ぶと便利な場合が多い．断面には複数のベクトル場が定義される場合があるので，それぞれの場合の Poincaré 写像を作ること．

5. 具体的な各種解析

固定点・周期点解析，安定性解析，分岐解析など．

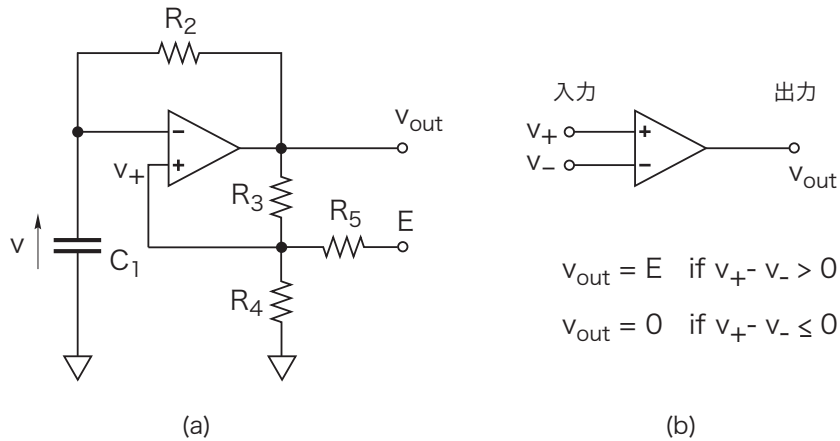


図6 RC 方形波発振回路 (a) とコンパレータ (b).

## 2 RC 方形波発振器

### 2.1 回路の構成と動作解析

図6 (a) に示した RC 方形波発振回路を考える. 図中の記号を用いて回路方程式は次式となる\*4.

$$\begin{aligned}
 R_2 C_1 \frac{dv}{dt} + v &= v_{out} \\
 v_+ &= \frac{\frac{v_{out}}{R_3} + \frac{E}{R_5}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} \\
 v_{out} &= \begin{cases} E & v_+ > v \text{ のとき} \\ 0 & v_+ < v \text{ のとき} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4}$$

この回路では, 演算増幅器は単電源 (その電圧を  $E$  とする) で動作しているとし, 図 (b) に示したコンパレータの特性をもつと仮定する. すなわち, 入力電圧の差の符号により, 出力電圧  $v_{out}$  は,  $E$  または  $0$  のいずれかの値を取るものとする. そうすると,  $v_+$  は, これら2つの値の場合それぞれについて, 次の値となる.

1.  $v_{out} = E$  の時

$$v_{+M} = \frac{\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) E}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} = \alpha E \tag{5}$$

\*4 関数  $u(x) = 1$   $x > 0$  のとき,  $u(x) = 0$   $x \leq 0$  のとき, を使うと,  $v_{out} = Eu(v_+ - v)$  と書ける.

ここに,

$$\alpha = \frac{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} \quad (6)$$

と置いた.

2.  $v_{out} = 0$  の時

$$v_{+m} = \frac{\frac{E}{R_5}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} = \beta E \quad (7)$$

ここに,

$$\beta = \frac{\frac{1}{R_5}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} \quad (8)$$

と置いた.

また, この回路の状態を表すキャパシタ電圧  $v$  は, 式 (4) 第 1 式をそれぞれの場合に解いて,

1.  $v_{out} = E$  の時

$$v(t) = (v(0) - E)e^{-\frac{t}{R_2 C_1}} + E \quad (9)$$

2.  $v_{out} = 0$  の時

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{t}{R_2 C_1}} \quad (10)$$

となる. ここに, キャパシタ電圧  $v$  の初期値を  $v(0)$  とおいた. この運動  $v$  と  $v_+$  の値が演算増幅器の入力で比較され, コンパレータの出力電圧が切り替えられる. その結果, キャパシタ電圧  $v$  とコンパレータの出力電圧は図 7 に示した波形となる.  $v$  に対する  $v_+$  の特性は, Z 型ヒステリシス特性となる.

## 2.2 ハイブリッド系としての回路の抽象化

### 2.2.1 使用する変数の正規化

以後, 議論を簡単にするため時間と電圧を正規化して考えよう. すなわち,

$$\tau = \frac{1}{R_2 C_1} t, \quad x = \frac{v}{E}, \quad x_+ = \frac{v_+}{E}, \quad q = \frac{v_{out}}{E} \quad (11)$$

と変換すると, 式 (4) は次式となる.

$$\frac{dx}{dt} + x = \begin{cases} 1 & q = 1 \text{ のとき} \\ 0 & q = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (12)$$

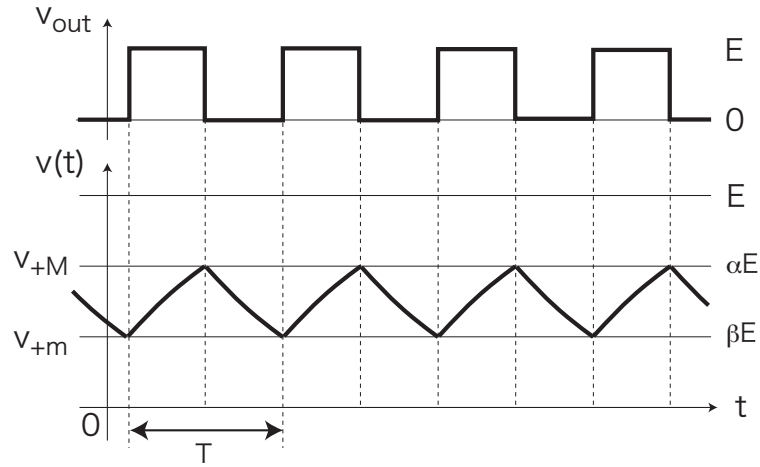


図7 キャパシタ電圧  $v$  とコンパレータの出力電圧として得られる方形波  $v_0$ .

これらの方程式の解は、初期値を  $x(0)$  として次式となる.

$$x(t) = \begin{cases} (x(0) - 1)e^{-t} + 1 & q = 1 \text{ のとき} \\ x(0)e^{-t} & q = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (13)$$

そこで、これらの解を用いて系全体の運動をみておこう. コンパレータの出力  $q$  の値が1または0により、それぞれの値に対応した線分  $[0, 1] \subset R$  上で運動が起る. 図8参照.

1.  $q = 1$  (コンパレータが on) の場合の運動:

- 初期値  $x(0) \in [0, \alpha]$  のときは、平衡点  $x = 1$  に向かう運動をし、 $x = \alpha$  になった時点でコンパレータの出力に「飛び」が起り、 $q = 0$  の場合の運動に遷移する.
- 初期値  $x(0) \in [\alpha, 1)$  のときは、直ちにコンパレータの出力に「飛び」が起り、 $q = 0$  の場合の運動に切り替わる.

図8では、これらのコンパレータ出力の遷移 (モード1からモード0への遷移) を  $e_{01}$  と記した.

2.  $q = 0$  (コンパレータが off) の場合の運動:

- 初期値  $x(0) \in [\beta, 1]$  のときは、平衡点  $x = 0$  に向かう運動をし、 $x = \beta$  になった時点でコンパレータの出力に「飛び」が起り、 $q = 1$  の場合の運動に移って行く.
- 初期値  $x(0) \in (0, \beta]$  のときは、直ちにコンパレータの出力に「飛び」が起り、 $q = 1$  の場合の運動に切り替わる.

図8では、これらのコンパレータ出力の遷移 (モード0からモード1への遷移) を  $e_{10}$  と記した.

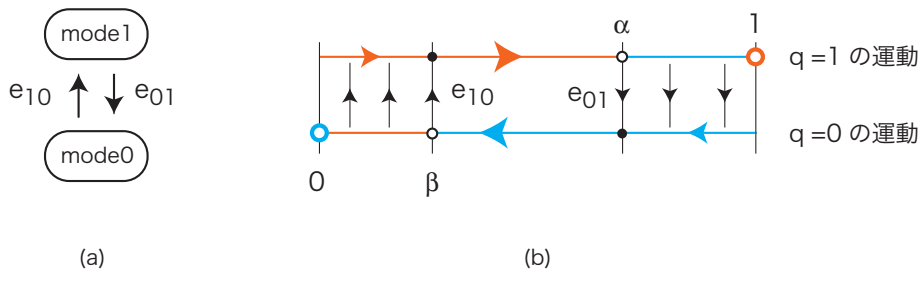


図 8 方形波発振器のモード遷移図 (a) と状態  $x$  の相図 (b).

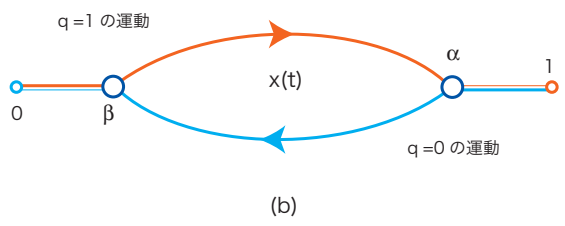
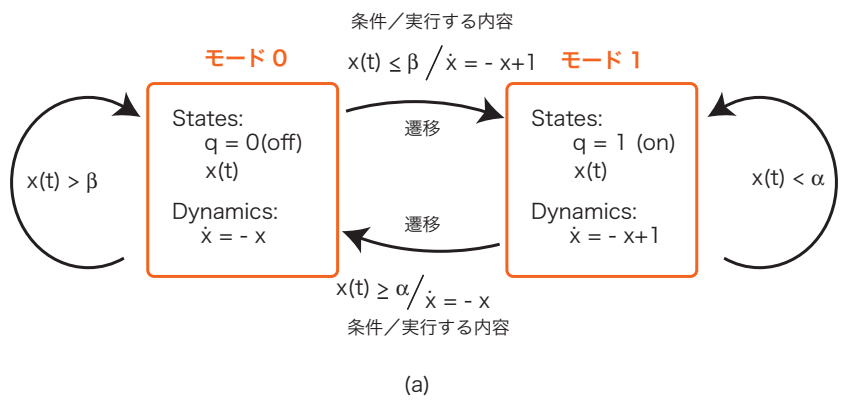


図 9 モード遷移図 (a) と貼り合わせ多様体 (b).

### 2.2.2 ハイブリッド系としての RC 方形波発振器

さて、上の結果をコンパレータ出力  $q$  を 1 ビットのデジタル系状態変数<sup>\*5</sup>、キャパシタ電圧  $x(t)$  を 1 次元連続力学系の状態とみなして定式化し直してみよう。

1. **モードと状態の定義**：コンパレータ出力  $q$  をデジタル部分系のモード変数と考え、その値を 2 つのモード：モード 0 とモード 1 と定義する。各モードにはそれぞれ、平衡点の異なる 1 次元連続力学系を貼付ける<sup>\*6</sup>。また、各モードのアナログ部分系の状態はキャパシタ電圧  $x(t)$  である。具体的には 2 つのモードは次のように書くことができる：図 9 参照。

<sup>\*5</sup> 1 ビットの状態変数には 2 つの状態 0 と 1 があるので、状態遷移図では 2 つの状態を考えることになる。もっとも、我々は状態と言わずにモードと呼ぶことにしたのだが...

<sup>\*6</sup> モード毎に微分方程式を定義するというを単に力学系を貼付けると言った。

表1 モードの遷移表

	モード0	モード1
イベント $\alpha$	モード0	モード0へ
イベント $\beta$	モード1へ	モード1

モード1 States:  $q = 1, x(t)$ ; Dynamics:  $\dot{x} + x = 1$ ; Output: LED:on

モード0 States:  $q = 0, x(t)$ ; Dynamics:  $\dot{x} + x = 0$ ; Output: LED:off

## 2. モードの遷移:

**モード1からモード0への遷移** モード1での状態  $x(t)$  は、解(13)第1式に従って運動するので、初期値  $x(0) < \alpha$  の解は有限時刻で必ず点  $x = \alpha$  に到達する。このとき、コンパレータの入力の符号が変化し、従って出力が切り替わる。すなわち、モード0への遷移が生じる。

なお、初期値  $\alpha < x(0)$  の解は、コンパレータの入力特性から分かるように、モード1に留まることなく直ちにモード0へ遷移する。

したがって、アナログ状態の条件  $x(t) \geq \alpha$  (これをフェーズイベント  $\alpha$  と呼ぶことにする) が、モード1からモード0への遷移の条件と言える。

状態が条件  $x(t) < \alpha$  を満たす場合はモード1に留まる。

**モード0からモード1への遷移** 同様に、モード0での状態  $x(t)$  は、解(13)第2式に従って運動するので、初期値  $x(0) > \beta$  の解は有限時刻で必ず点  $x = \beta$  に到達する。このとき、コンパレータの入力の符号が変化し、従って出力が切り替わる。すなわち、モード1への遷移が生じる。初期値  $x(0) < \beta$  の解は、モード0に留まることなく直ちにモード1へ遷移する。

したがって、イベント  $\beta: x(t) \leq \beta$  が起こると、モード0からモード1への遷移が起こる。

なお、状態が条件  $x(t) > \beta$  の場合はモード0に留まる。

これらをモード遷移図に描くと図9(a)となる。2つのモードが、角を丸めた長方形で示され、モード間の遷移は矢印で示されている。遷移の起こる条件と遷移の結果出力される結果が矢印に添え書きされている。この図から直ちに、この系の周期解は2つのモードを交互に繰り返す運動となることが分かる。

このモード遷移図を、行にイベントを、列にモードをとり、対応する項に遷移する次のモードを書き入れた行列を作ると、モード遷移表ができる。表1参照。モード遷移図やモード遷移表は、デジタル部分系の運動をみるものであるから、ハイブリッド系の定性的性質をみたり、プログラムコードを書く際に参考にできる。また、図9(b)の貼り合わせ1次元多様体からRC方形波発振器の周期解は2つのモードを交互に繰り返す運動となることが分かる。

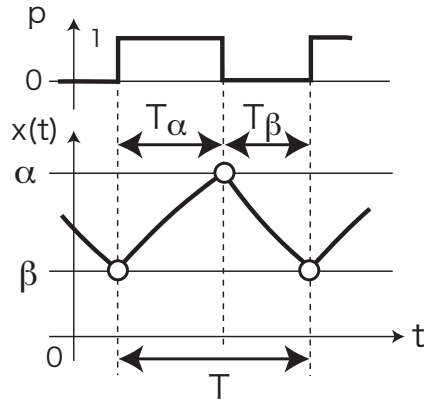


図 10 周期振動の波形.

### 2.3 周期振動とデューティーサイクル

コンパレータの入力電圧  $v_+$  が抵抗  $R_3, R_4, R_5$  の比で決まるので，周期波形の周期やデューティーサイクル<sup>\*7</sup>もこれらの抵抗比を与えることによって定まる．このことをみておこう．図 10 参照．

初期値  $x(0) = \beta$  を出発する解 (13) 第 1 式が時刻  $T_\alpha$  で  $x(T_\alpha) = \alpha$  に達したとし，初期値  $x(0) = \alpha$  を出発する解 (13) 第 2 式が  $x(T_\beta) = \beta$  とすれば，次の 2 式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\alpha &= (\beta - 1)e^{-T_\alpha} + 1 \\ \beta &= \alpha e^{-T_\beta}\end{aligned}\tag{14}$$

これらの式を整理すると次式を得る．第 2 番目の抵抗の比は， $\alpha, \beta$  の定義式 (6)，(8) から導かれる．

$$\begin{aligned}e^{T_\alpha} &= \frac{1 - \beta}{1 - \alpha} = 1 + \frac{R_4}{R_3} \\ e^{T_\beta} &= \frac{\alpha}{\beta} = 1 + \frac{R_5}{R_3}\end{aligned}\tag{15}$$

これより

$$\begin{aligned}T_\alpha &= \ln \frac{1 - \beta}{1 - \alpha} = \ln\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \\ T_\beta &= \ln \frac{\alpha}{\beta} = \ln\left(1 + \frac{R_5}{R_3}\right)\end{aligned}\tag{16}$$

$$T = T_\alpha + T_\beta = \ln \frac{\alpha(1 - \beta)}{\beta(1 - \alpha)} = \ln\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)\left(1 + \frac{R_5}{R_3}\right)\tag{17}$$

<sup>\*7</sup> 周期的方形波の周期を  $T$  とし，時間  $T$  のうち波形が 1 の値をもつ時間を  $T_\alpha$ ，0 の値を持つ時間を  $T_\beta$  とした時，比  $d = T_\alpha/T$  を，この波形のデューティーサイクル (duty cycle) という．

$$\begin{aligned} \frac{dT_\alpha}{d\alpha} &= \frac{1}{1-\alpha} > 0, \quad \frac{dT_\alpha}{d\beta} = \frac{-1}{1-\beta} < 0, \quad \frac{dT_\beta}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha} > 0, \quad \frac{dT_\beta}{d\beta} = -\frac{1}{\beta} < 0 \\ \frac{dT}{d\alpha} &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} > 0, \quad \frac{dT}{d\beta} = -\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{1-\beta}\right) < 0 \end{aligned} \quad (18)$$

したがって、 $T_\alpha, T_\beta, T$  ともに、 $\alpha$  に関しては単調増加関数、 $\beta$  に関しては単調減少関数である。

なお、 $\alpha, \beta$  の抵抗  $R_3$  に関する微分は、式 (6), (8) を使って同様な計算をすれば

$$\frac{d\alpha}{dR_3} < 0, \quad \frac{d\beta}{dR_3} > 0 \quad (19)$$

となり、 $\alpha$  は単調減少関数、 $\beta$  は単調増加関数となることが分かる。

また、デューティーサイクルを  $d$  とすれば、次式となる。

$$d = \frac{T_\alpha}{T} = \frac{\ln\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)}{\ln\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)\left(1 + \frac{R_5}{R_3}\right)} \quad (20)$$

この式を抵抗の項で解くと次式となる。

$$1 + \frac{R_5}{R_3} = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{1-d}{d} \quad (21)$$

### 2.3.1 デューティーサイクル 50% となる条件

$d = 1/2$  より  $T_\alpha = T_\beta = T/2$  であり、これより  $R_4 = R_5$  を得る。 $R_3$  は自由に選べるので周期  $T$  を定めるためのパラメータとすることができる。

たとえば、 $R_3 = R_4 = R_5$  の場合は、 $\alpha = 2/3, \beta = 1/3, T = 2 \ln 2$  となる。

### 2.3.2 デューティーサイクル 25% となる条件

$d = 1/4$  より、

$$1 + \frac{R_5}{R_3} = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)^3$$

を得る。

一例として、たとえば  $R_3 = 2R_4$  と選べば、 $R_5/R_3 = 19/8$  となる。そこで  $R_3 = 100K, R_4 = 50k, R_5 = 238K, T = \ln 81/16 = 1.62$  を得る。この場合、 $\alpha = 27/65 = 0.415, \beta = 8/65 = 0.123$  となる。図 11 に実際の回路例を示す。

別の選択として、 $R_3 = R_4 = 100K$  の場合は、 $R_5 = 7R_3 = 700K, T = \ln 16 = 2.77$  となる。また、 $\alpha = 8/15 = 0.533, \beta = 1/15 = 0.067$  となる。



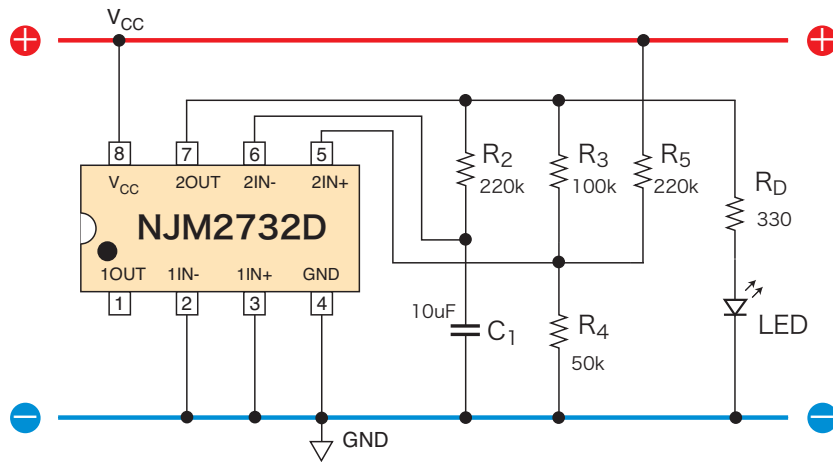


図 11 デューティサイクルが約 25% となる回路例.

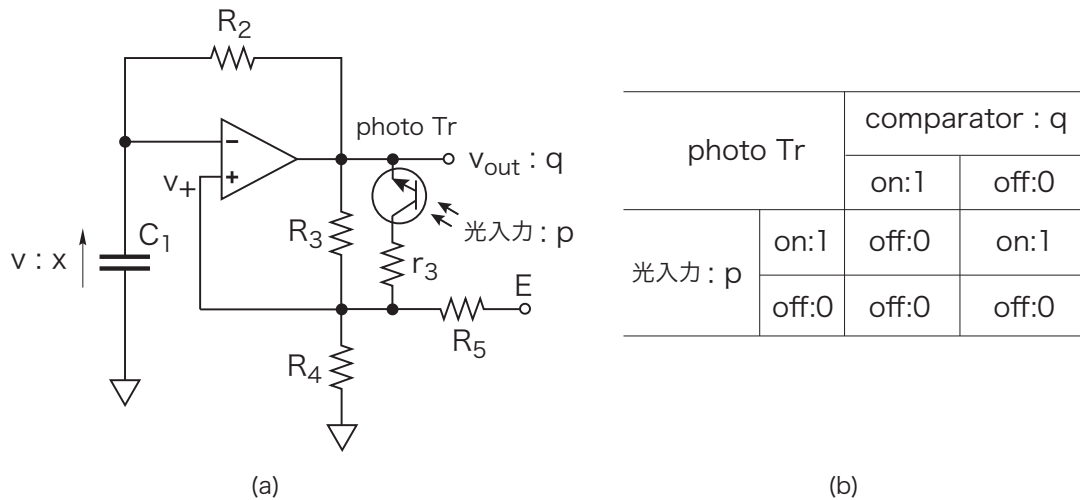


図 12 光センサーをもつ RC 方形波発振回路 (a) とフォトトランジスタの導通条件 (b).

### 3 LED ホタルの強制振動

さて、この節ではデジタル部分系が2ビットとなり、4つのモードをもつハイブリッド系の例を扱ってみよう。簡単のため、前節で取り上げたコンパレータを用いた RC 方形波発振器に光センサー回路を取り付け、これに周期的な方形波光入力信号を加えた回路を考える。光信号はタイマーイベントとしてモードを遷移させる。

### 3.1 回路の構成と動作の概要

#### 3.1.1 回路の概要と回路の状態

具体的には、図 12 (a) に示した RC 方形波発振回路を考える\*<sup>8</sup>。この回路は前節で考えた RC 方形波発振回路の抵抗  $R_3$  にフォトトランジスタと抵抗  $r_3$  の枝を並列に付加した回路となっている。フォトトランジスタは光入力  $p$  で制御されるスイッチ素子として加えられている。

すなわち、このフォトトランジスタは、① 光信号が照射され、かつ② 条件  $v_+ > v_{out}$  が成り立つときに導通し、コンパレータの入力端子  $v_+$  と出力の間の抵抗が、 $R_3$  と  $r_3$  の並列抵抗となる。このことから、フォトトランジスタが導通すれば、等価的に抵抗  $R_3$  の値が小さくなり、コンパレータ入力電圧  $v_+$  が低くなる。前節に検討した結果から、これは光信号によりキャパシタ電圧の下端での切り替え値  $\beta$  が小さくなることに対応する。したがって、光信号の印加はアナログ部分系のパラメータを変化させる効果を引き起こす。

フォトトランジスタの導通条件を整理すると図 12 (b) となる。コンパレータの出力電圧が off (0) で光信号が on (1) のときのみフォトトランジスタは導通：on (1) する。

以上のことより、このハイブリッド系の状態は次のようになる。

- デジタル部分系：コンパレータの出力電圧  $q$ 、フォトトランジスタに照射する光信号  $p$  \*<sup>9</sup>
- アナログ部分系：キャパシタ電圧  $x(t)$

念のため、フォトトランジスタの導通により変化するのは抵抗  $R_3, r_3$  並列枝の値であるから、これを計算しておこう。フォトトランジスタの導通時の値には on、非導通時の値には off の添字を付けることにする。

$$\frac{1}{R_{on}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{r_3} \Rightarrow R_{on} = \frac{R_3 r_3}{R_3 + r_3} \quad (22)$$
$$R_{off} = R_3$$

記述を簡単にするため、これらをまとめて

$$R_{on||off} = \frac{R_3 r_3}{R_3 + r_3} \parallel R_3 \quad (23)$$

と書くことにする。すると  $\beta$  の値は、式 (8) を参考にして次式となる。

$$\beta_{on||off} = \frac{\frac{1}{R_5}}{\frac{1}{R_{on||off}} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} \quad (24)$$

\*<sup>8</sup> この回路は LED ホタルの回路としてタイプ A1 と名付けた回路である。

\*<sup>9</sup> 光信号は入力と考え、デジタル部分系の状態に入れるのはおかしいと考えるかもしれない。確かにそうなのだが、周期的な on/off を繰り返すこの信号は光を明滅するデジタル発振器がこの系の内部に組み込まれていると考え、デジタル部分系の状態に入れてもおかしくないであろう。ここでは後者の立場をとる。

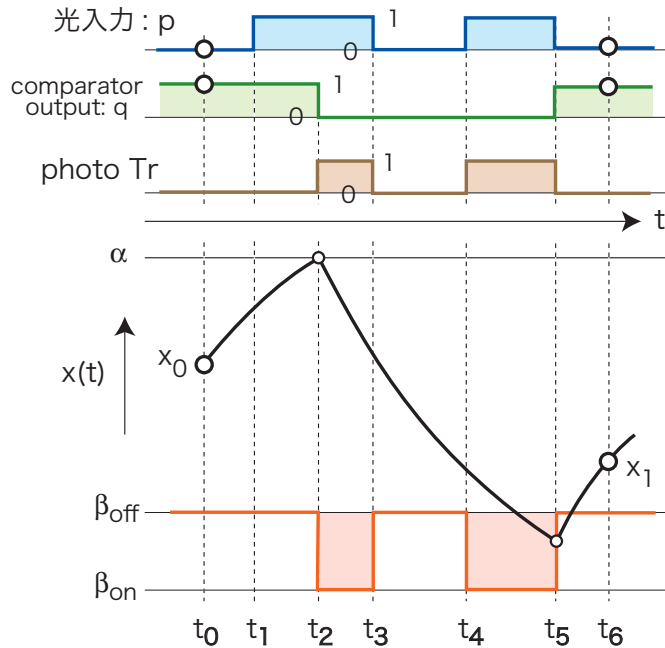


図 13 各状態の時間発展.

ここで

$$\beta_{on} < \beta_{off} \quad (25)$$

となることに注意しておこう.

なお、 $\alpha$  の値は、コンパレータの出力電圧が on :  $q = 1$  の時の  $x_+$  値であるからこの条件ではフォトトランジスタは導通せず、従って変化せず次式となる (これを以下  $\alpha$  と書く):

$$\alpha = \alpha_{on} = \alpha_{off} = \frac{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} \quad (26)$$

### 3.1.2 状態の時間発展：フェーズイベントとタイマーイベント

さて、状態の時間発展の様子をつかむため、図 13 の上段に示した光入力  $p(t)$  を仮定して状態  $x(t)$  の時間発展を具体的にみてみよう。ここで、初期状態としては図中  $t = t_0$  に丸印で示した値： $p = 0, q = 1, x(0) = x_0$  の例を考えることにする。

ここで、デジタル状態とその遷移の記述について注意点をみておこう。

- 1つは、デジタル状態が on あるいは off にある場合、これらの状態にある時間区間が意味をもつ場合である。たとえば、「 $q = 1$  の状態にある時にのみ LED が点灯する」といった記述をする。
- 一方、状態の変化する瞬間、すなわち信号のエッジ (edge)、をとらえて、他の状態あるいは素子の出力が変化することを表す場合がある。この状態の急変には、状態 1 から 0 への変化 (立ち下がり (falling-edge or negative-edge)) と、0 から 1 への変化 (立ち上がり (rising-edge or

positive-edge)) が考えられる。以下、前者を表す記号として  $q(t) \downarrow$  を使い、後者を表す記号として  $q(t) \uparrow$  を使うことにする。

そこで一般に、モードの個数は、使用するデジタル状態の個数で決まり、モード間の遷移の個数は、使用するエッジの個数で決まると考えてよいであろう。

それでは図 13 に示した時刻にしたがって  $x(t)$  の変化をみてみよう。

1.  $t \in [t_0, t_1) : p = 0, q = 1$  なので状態  $x(t)$  は解 (13) 第 1 式にしたがって増加する。
2.  $t = t_1$  で  $p \uparrow$  すなわち光入力  $p = 1$  となるが、 $q = 1$  なのでフォトトランジスタは導通せず、状態  $x(t)$  の変化に変わりはない。
3.  $t = t_2$  において、 $x(t_2) = \alpha$  となり、このフェーズイベントでコンパレータ出力が  $q = 0$  と変化し、状態  $x(t)$  は解 (13) 第 2 式にしたがって減少し始める。 $p = 1, q = 0$  なのでフォトトランジスタは on となり、 $\beta = \beta_{on}$  と切り替わる。ただし、ここでのパラメータ  $\beta$  の変化は、 $x(t) > \beta_{off}$  なので、状態  $x(t)$  に何の影響も及ぼさない。
4.  $t \in [t_3, t_5)$  この時間区間では  $p$  の変化 (タイマーイベント) に伴い  $\beta$  も変化するが、状態  $x(t)$  の変化には影響を与えない。
5.  $t = t_5$  は最も注意が必要である。ここで光入力が off、すなわち  $p(t_5) \downarrow$  となり、フォトトランジスタが off となる。従って、 $\beta$  の値が  $\beta_{on}$  から  $\beta_{off}$  に変化する:  $\beta(t_5) \uparrow$ 。このとき状態  $x(t_5)$  は次の不等式を満足している。

$$x(t_5) < \beta_{off} \quad (27)$$

この条件は、モードが遷移する条件であり、コンパレータ出力は  $q = 1$  に変化し、状態方程式は直ちに切り替えられ、状態  $x(t)$  は増加に転ずる。タイマーイベントとフェーズイベントが同時に起こっている。タイマーイベントのみが起こる  $q(t_3) \downarrow$  の場合との違いに注意してほしい。

その後、 $t = t_6$  で状態  $x(t_6) = x_1$  に達する。

### 3.1.3 モード遷移図

このハイブリッド系のデジタル部分の状態は、フォトトランジスタに照射する周期的な光外部信号  $p$  とコンパレータの出力電圧  $q$  と考えたので、次の 4 つのモードとなる。

モード 0  $p = 0, q = 0$  となる場合:

- フェーズイベント  $x(t) \leq \beta_{off}$  でモード 2 に遷移する。
- タイマーイベント  $p \uparrow$  かつ  $\beta_{off} < x < \alpha$  でモード 1 に遷移する。

モード 1  $p = 1, q = 0$  となる場合:

- フェーズイベント  $x(t) \leq \beta_{on}$  でモード 3 に遷移する。
- タイマーイベント  $p \downarrow$  かつ  $x \geq \beta_{off}$  でモード 0 に遷移する。
- フェーズイベントとタイマーイベントが重複した条件:  $p \downarrow$  かつ  $\beta_{on} < x < \beta_{off}$  でモード 2 に遷移する。

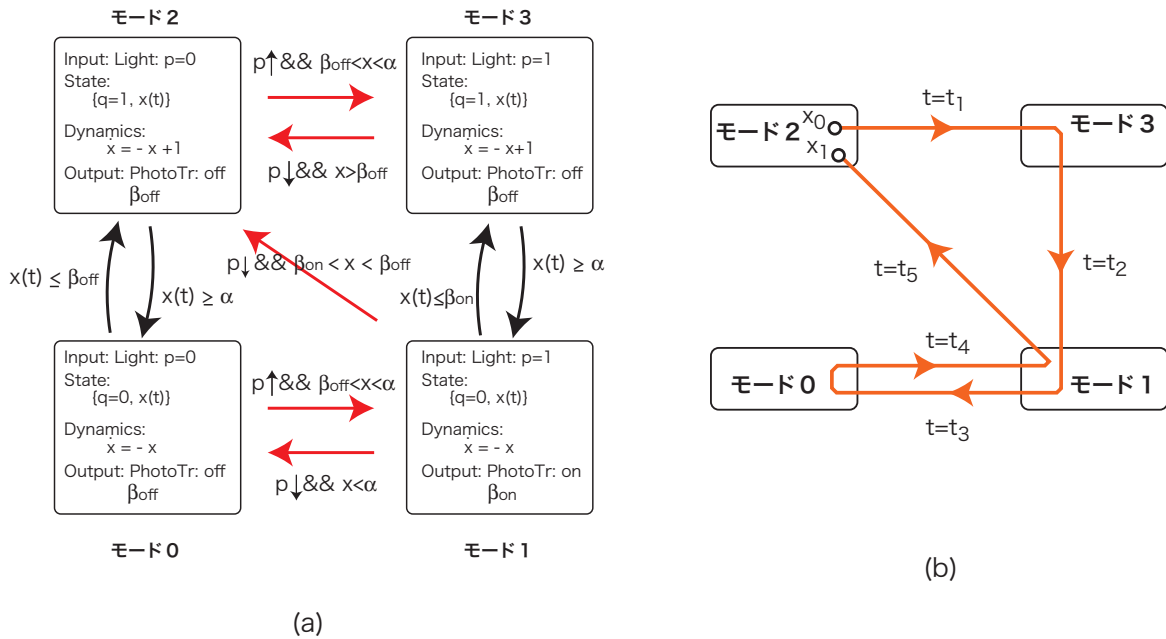


図 14 モード遷移図 (a) と図 13 の状態の遷移をトレースしたグラフ (b).

モード 2  $p = 0, q = 1$  となる場合：

- フェーズイベント  $x(t) \geq \alpha$  でモード 0 に遷移する。
- タイマーイベント  $p \uparrow$  かつ  $\beta_{off} < x < \alpha$  でモード 3 に遷移する。

モード 3  $p = 1, q = 1$  となる場合：

- フェーズイベント  $x(t) \geq \alpha$  でモード 1 に遷移する。
- タイマーイベント  $p \downarrow$  かつ  $x < \alpha$  でモード 2 に遷移する。

これらをモード遷移図にすれば、図 14(a) を得る。また、前小節の説明に使った図 13 の波形をモード間の遷移で表すと図 14(b) となる。

4つのモードを定義したので、各モードでのアナログ部分系を一意的に定義できるようになった。すなわち、各モードでの運動方程式が定まるので、初期状態  $x(0)$  を与えると解 (trajectory) を一意的に求めることができる。また、 $p(t)$  の変化は、境界  $\beta$  の値を変化させる。これを図 15 に示した。横軸は時刻  $t$ 、縦軸は状態  $x(t)$  であり、解は指数関数から得られる曲線群である。次の性質に注意しよう。

- モード 0 において、初期値  $x_0 \in [\beta_{off}, \alpha]$  を出発する解は、 $x(t) = \beta_{off}$  でモード 2 へ遷移すると、初期値  $x_0 = \beta_{off}$  から出発する解に合体してしまう。この場合、例えば、モード 0 でのフェーズイベント  $x = \beta_{off}$  を経て、モード 2 に入り、途中でタイマー信号  $p \uparrow$  が入り、このタイマーイベントでモード 3 に遷移し、ここでのフェーズイベント  $x = \alpha$  を経てモード 1 で  $t = T$  に達する。図に示した幾つかの解曲線でこの動きをトレースしてみるとよい。
- 同様に、モード 2 において、初期値  $x_0 \in [\beta_{on}, \alpha]$  を出発する解は、 $x(t) = \alpha$  でモード 1 へ遷移すると、初期値  $x_0 = \alpha$  から出発する解に合体してしまう。したがって、この初期値からの状態

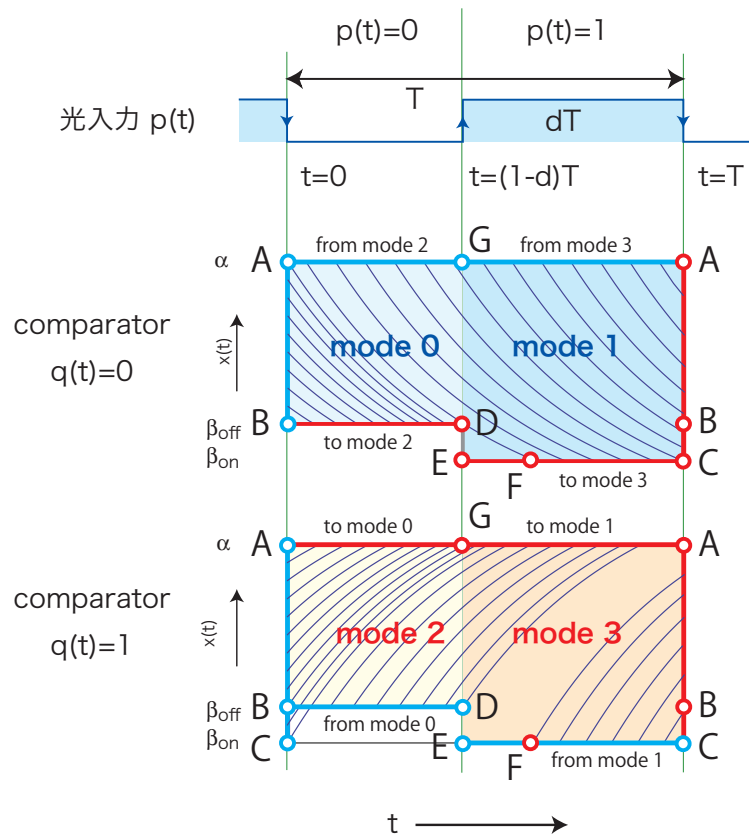


図 15 各モードでの状態  $x(t)$  の解曲線群.

はフェーズイベント  $x = \alpha$  を経た後、モード 1 に遷移した後  $t = T$  に達する.

- モード 0 とモード 2 のみで状態を観察すると、入力  $p = 0$  なので、 $[\beta_{off}, \alpha]$  間で振動する方形波が得られる。この場合のイベントは  $x = \alpha$ ,  $x = \beta_{off}$  で起こる。
- モード 1 とモード 3 のみで状態を観察すると、入力は  $p = 1$  なので、 $[\beta_{on}, \alpha]$  間で振動する方形波が得られる。これらのモードの遷移は、状態がフェーズの境界点  $x = \alpha$  あるいは  $x = \beta_{on}$  に達するというフェーズイベントで起こる。
- $t = T$  で  $x$  がモード 1 の区間  $[\beta_{on}, \beta_{off}]$  に達するとタイマーイベントが起こり  $p = 0$  となる、このことでフォトトランジスタが off となり、 $\beta = \beta_{off}$  に変化する。  $x(T) < \beta_{off}$  なので、コンパレータの出力  $q$  は on となり、モード 2 への遷移が起こる。すなわち、タイマーイベントがフェーズイベントを誘発し、これら 2 つのイベントが同時に起こる。この一連の変化は、この回路のもっとも注目すべき動作であるので、次の小節で再び取り上げよう。

### 3.1.4 LED ホタルの同期現象—逆相同期—

LED ホタルの回路は、フォトトランジスタをどの抵抗と並列接続するかによって種々の同期現象がみられる。前小節の最後に述べたように、ここで考察している図 12(a) の回路では、外力の光信号に対

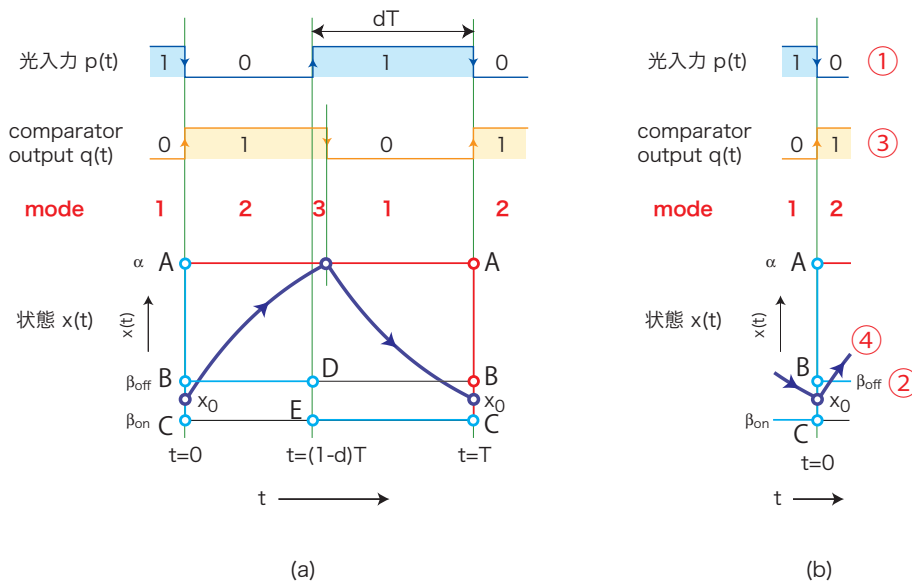


図 16 逆相同期の周期解 (a) と同期の掛かるメカニズム (b).

して逆相に同期する<sup>\*10</sup>.

さて、外力の信号  $p(t)$  に同期する様子を見るために、図 16 に示した周期解が存在すると仮定して、逆相同期することを見ることにしよう。また、すべての周期解は、 $t = 0$  でタイマーイベントとフェーズイベントが同時におこるイベントを 1 回だけ持ち、その時点での初期値  $x_0$  は  $x_0 \in [\beta_{on}, \beta_{off}]$  にあることに注意しよう。このことは、次節から理論的にみてゆきたい。

- 逆相同期：図 16(a) をみると、時間の経過とともにモードの 1, 2 がリピートされ、その間に短時間モード 3 の時間がある。すなわち、モード 1, 2 が繰り返されている間は、 $p(t)$  と  $q(t)$  は逆相となっている。これが逆相同期と言われる理由である。モード 3 の時間があるので、厳密には「ほぼ逆相」で同期するというべきであろう<sup>\*11</sup>。
- 同期のメカニズム：図 16(b) を用いて  $t = 0$  で起こる同期を説明する。
  1. まず最初に、外力の信号  $p(t)$  が 1 から 0 に変化する。すなわち、 $p \downarrow$  のタイマーイベントがおこり、光信号が消える。
  2. 光信号が消えると、フォトトランジスタが off となり、 $\beta_{on}$  から  $\beta_{off}$  に変化する。
  3. すると、 $x_0 \leq \beta_{off}$  となるので、コンパレータが on となる。
  4. このことから、キャパシタ電圧  $x(t)$  はモード 2 となり充電され始める。
- このことから、「図 12(a) の回路は、信号  $p(t) \downarrow$  の立ち下がり同期する」と言える。

<sup>\*10</sup> 外力による強制振動では、通常「同期 (synchronization)」というより「引き込み (entrainment)」というべきであろう。ここではあまり気にせずに両者を適当に使用する。

<sup>\*11</sup> モード 3 の時間が無い完全逆相同期をする回路も簡単に作る事ができる [12].

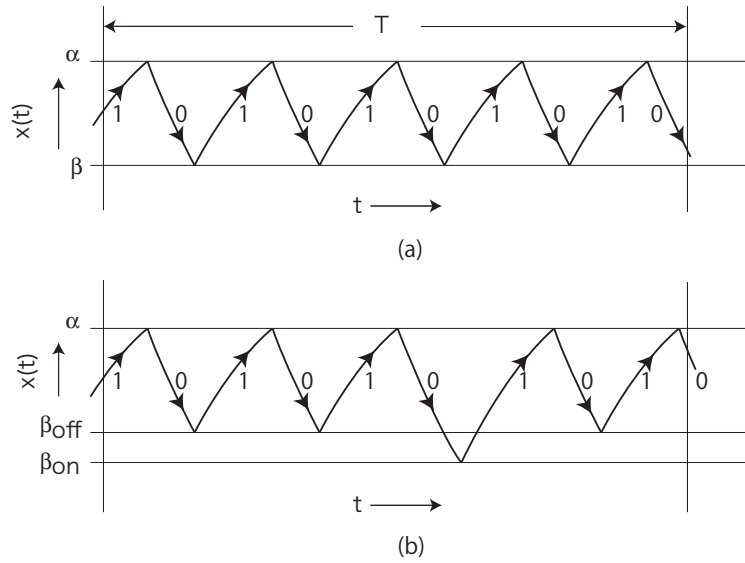


図 17 状態  $x(t)$  の波形とその符号数.

## 3.2 LED ホタルの解析

### 3.2.1 波形の符号数

ここで簡単に、アナログ状態  $x(t)$  がもつ符号数 (signature) を定義し、波形  $x$  を 4 つの型に分類することにしよう. まずは、図 17(a) に示した波形  $x(t)$  に注目しよう.  $x(t)$  は、微分方程式  $\dot{x} = -x + 1$  の解として単調増加する部分と、微分方程式  $\dot{x} = -x$  の解として単調減少する部分を繋ぎ合わせた曲線である. これより、注目する時間  $T$  区間の波形につき、単調増加する部分にコード「1」を、単調減少する部分にコード「0」を付し、図 17(a) に示した波形  $x(t)$  には、 $\{1010101010\} = \{(10)^5\}$  のコードを付けることにする. このコードはデジタル変数 (コンパレータの出力電圧)  $q(t)$  に一致している. したがって、図 17(a) は  $x(t)$  と  $q(t)$  の情報をあわせて表現した波形図である.

- 波形の符号数は、折曲がり点を定める  $\alpha$  や  $\beta$  の値には依存しない. たとえば、図 17(a) と (b) は同じ符号数をもつ. したがって、この小節では、計算を簡単にするため  $\alpha$  と  $\beta$  の値がそれぞれ 1 つの場合について説明する.
- 時間区間  $T$  の間の波形を、符号数の種類で分類すると、次の 4 種類に分類される. 図 18 にそれぞれの波形を示した.

$$\{1(01)^n\} \text{ 型, } \#\alpha = n, \#\beta = n$$

$$\{1(01)^n 0\} \text{ 型, } \#\alpha = n + 1, \#\beta = n$$

$$\{0(10)^n\} \text{ 型, } \#\alpha = n, \#\beta = n$$

$$\{0(10)^n 0\} \text{ 型, } \#\alpha = n, \#\beta = n + 1$$

ここに、 $\#\alpha$  と  $\#\beta$  はそれぞれの値で波形が折れる折れ点 (フェーズイベント) の数を表す.



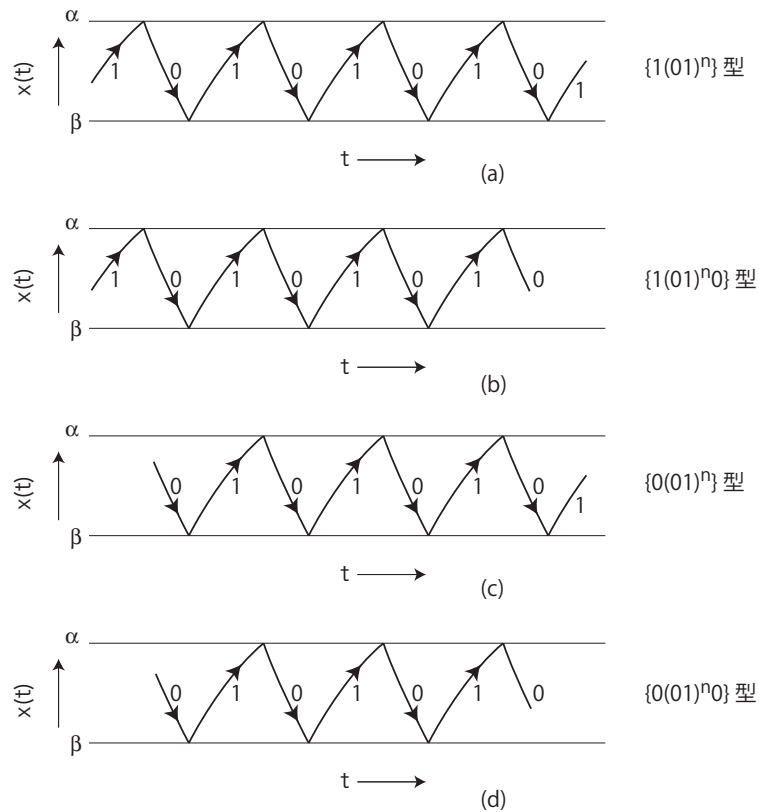


図 18 4種類の波形と符号数.

### 3.2.2 波形の初期値と最終値の関係

注目している波形を、RC 方形波発振器の出力波形と考え、初期値  $x(0) = x_0$  から  $t = T$  での最終値  $x(T) = x_1$  が得られると仮定する。このとき、最終値と初期値の関係が波形の型によってどう変わるかをみることにしよう。この関係は、LED ホタルの周期解や Poincaré 写像を考えるとときに有効に利用できる。

#### 最も簡単な 1 型と 0 型波形の場合

まず、1 型の波形の切片について考えよう。図 19(a) 参照。この波形が方程式  $\dot{x} = -x + 1$  の解であることから、初期値  $x_0$  を出発する解は、 $x(t) = (x_0 - 1)e^{-t} + 1$  となる。したがって、次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} x_1 - 1 &= e^{-\tau}(x_0 - 1) \\ \tau &= \ln \frac{x_0 - 1}{x_1 - 1} \end{aligned} \quad (28)$$

同様に、図 19(b) の 0 型波形の場合は、方程式  $\dot{x} = -x$  の解曲線であることから次式を得る。

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-\tau} x_0 \\ \tau &= \ln \frac{x_0}{x_1} \end{aligned} \quad (29)$$

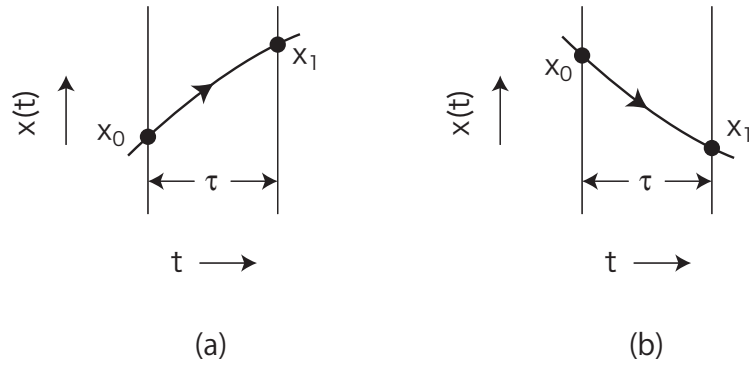


図 19 最も簡単な 1 型と 0 型波形の場合.

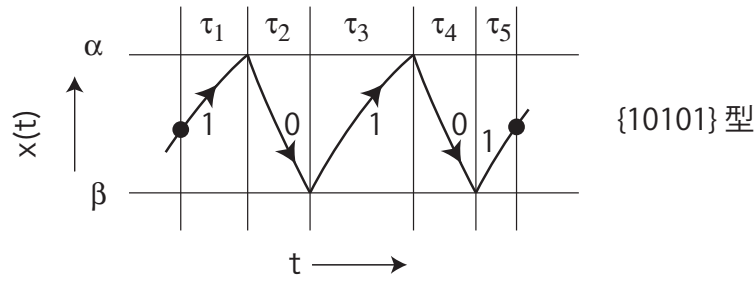


図 20 10101 型波形.

もうひとつの波形：{10101} 型の場合

図 19(a) 参照. 前の例を参照して各波形片について計算すると

$$\tau_1 = \ln \frac{x_0 - 1}{\alpha - 1}, \quad \tau_2 = \tau_4 = \ln \frac{\alpha}{\beta}, \quad \tau_3 = \ln \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}, \quad \ln \frac{\beta - 1}{x_1 - 1}$$

そこで  $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \tau_5 = T$  とすれば,

$$e^{-T} = \frac{(\beta - 1)(\beta - 1)\alpha^2(x_0 - 1)}{(x_1 - 1)(\alpha - 1)\beta^2(\alpha - 1)}$$

これより, 次式を得る.

$$x_1 - 1 = e^{-T} \left( \frac{\alpha(\beta - 1)}{\beta(\alpha - 1)} \right)^2 (x_0 - 1) \quad (30)$$

波形：{1(01)<sup>n</sup>} 型の場合：簡単に 11 型と呼ぶ.

同様な計算から, この型に関する次の関係式を得る.

$$x_1 - 1 = e^{-T} \left( \frac{\alpha(\beta - 1)}{\beta(\alpha - 1)} \right)^n (x_0 - 1) \quad (31)$$

波形：{1(01)<sup>n</sup>0} 型の場合：簡単に 10 型と呼ぶ.

同様な計算から、この型に関する次の関係式を得る。

$$x_1 = e^{-T} \left( \frac{\alpha(\beta-1)}{\beta(\alpha-1)} \right)^n \frac{\alpha}{\alpha-1} (x_0 - 1) \quad (32)$$

**波形： $\{0(10)^n\}$  型の場合：簡単に 00 型と呼ぶ。**

同様な計算から、この型に関する次の関係式を得る。

$$x_1 = e^{-T} \left( \frac{\alpha(\beta-1)}{\beta(\alpha-1)} \right)^n x_0 \quad (33)$$

**波形： $\{0(10)^n 1\}$  型の場合簡単に 01 型と呼ぶ。**

同様な計算から、この型に関する次の関係式を得る。

$$x_1 - 1 = e^{-T} \left( \frac{\alpha(\beta-1)}{\beta(\alpha-1)} \right)^n \frac{\beta-1}{\beta} x_0 \quad (34)$$

### 3.2.3 貼り合わせ解多様体

図 15 に示した各モードでの状態  $x(t)$  の解曲線の図をすこし見やすくしたい。もう一度、解の時間的な経過を追ってみよう。図 15, 図 21 と図 22 をみてほしい。

1. これらの図は、横軸に時刻  $t$  を外力  $p(t)$  の 1 周期分  $0 < t < T$ , 縦軸に状態  $x(t)$  を区間  $[\beta, \alpha]$  示した図である。ただし、 $\beta$  の値はフォトトランジスタの on, off により  $\beta_{off}$  あるいは  $\beta_{on}$  に変化する。on でいられる最大時間フォトトランジスタが点灯したと仮定して線分  $DE$  を  $p(t)$  の duty cycle いっぱい描いてある。
2. 図 15 では各モードでの解曲線の例が描かれている。出発集合である水色の線分の点を初期値とする解は、到着集合である赤色の線分の点に至る。解曲線群は、モード 2 と 3 では単調増加、モード 0 と 1 では単調減少である。
3. 到着集合は、解がこの集合に到着するや否やモードか遷移し、出発集合に変化する。つまり、この集合で 2 つの集合（線分）を貼り合わせておけば、解は自然に時間発展できる。
4. 図 21 はこの貼り合わせの様子を示した図である。図 (a) は 2 枚のモード図を重ね書きし、図 (b) では一旦 2 枚別々に描き、図 (c) でモード 0 と 1 のシートを裏返しにして貼り合わせやすく配置した。図 (d) は、線分  $AGA$  の部分だけを貼り合わせ、展開した図である。
5. 図 22(a) は、図 21(d) と同じ図を表す。図 (b) は、(a) の貼り残した線分のうちフェーズイベントの部分の貼り合わせた図である。タイマーイベントの起こる部分、すなわち  $t=0$  と  $t=T$  の対応する部分を貼り合わせると、この系の状態を示す多様体ができる。
6. この多様体は、トーラスに幾つかの手術をした図形となっている。
  - (a) モード 0, 2, 3 の線分  $BC$  は向きを一致させて貼付ける。図 22(b) には、この部分を通る周期解の例が描かれている。線分  $BC$  を貼り合わせると、周期解に沿って取った帯状の近傍は、Möbius の帯となる<sup>\*12</sup>。

<sup>\*12</sup> 高坂 BC 回路と同じ相空間が埋まっていた。

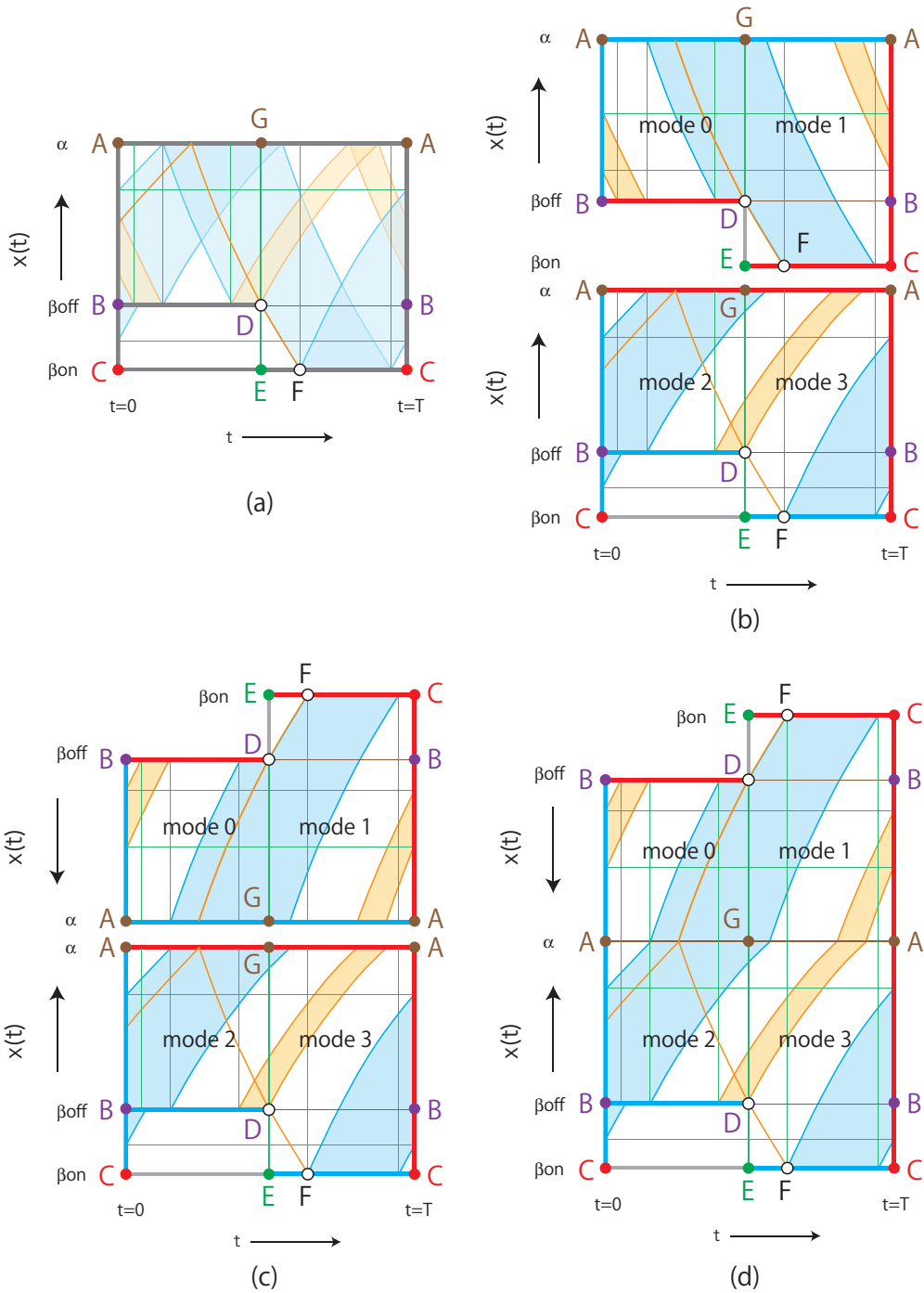


図 21 貼り合わせ解多様体をつくる.

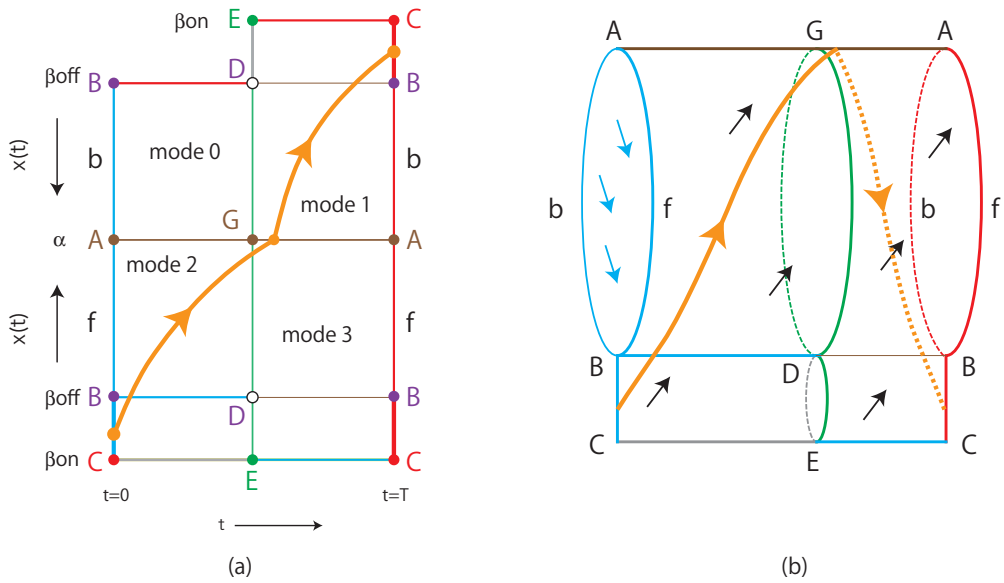


図 22 貼り合わせ解多様体.

(b) 四角形 BCED は、線分 BD でトーラスに貼り合わされている．DE の部分ではモード 3 に貼り合わされている．

(c) モード 1 の DE の部分は、そのままどこにも貼り合わされていない．

7. できた多様体は、時刻  $t$  軸一定で切った断面を経度 (meridian)、状態  $x$  一定で切った切り口を緯度 (parallel) と呼ぶことにしよう．経度方向に一周するとフェーズイベントが起こり、緯度方向に一周するとタイマーイベントに遭遇する．また、以後デジタル状態  $q = 1$  の定義されている 1 型波形片のある面を表面、状態  $q = 0$  の定義されている 0 型波形片のある面を裏面と言うことがある．

### 3.2.4 Poincaré 写像

前小節で定義した貼り合わせ多様体は、経度方向にはアナログ状態空間で、また緯度方向には 1 周期分の時間で構成されてる．そこで、 $t = 0$  の状態  $x$  の集合から、外力  $p(t)$  の 1 周期後の状態への解による写像を Poincaré 写像とすればよい．この定義は、一般に周期的外力を持つ力学系で考える時間  $T$  写像に習って定めたものである．

図 23 を見ながら、この写像をみておこう．

1. 写像の定義域は  $t = 0$  の出発集合 (青色の線分) である．線分 AfBC では  $q = 1$  であり、解はベクトル場  $\dot{x} = -x + 1$  によって作られる．したがって、1 型波形片で構成されている．一方、線分 AbB では、解は  $\dot{x} = -x$  で作られるので、0 型波形片でできている．
2. 写像の値域は、 $t = T$  の到着集合 (赤色の線分) である．この線分も 2 つの区間 AfBC と AbBC の和集合である．裏面の線分 BC の部分は、表面の BC の部分に貼付けられた後、更に  $t = 0$  の

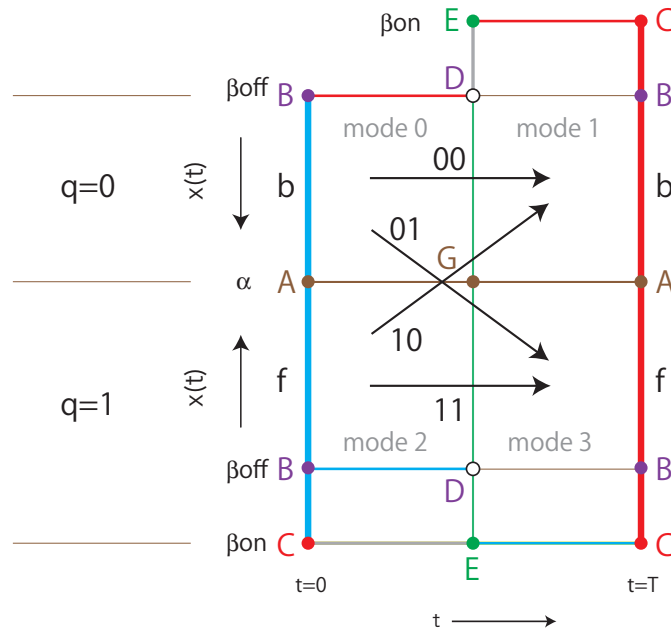


図 23 Poincaré 写像の定義.

線分 BC に貼付けられる. このようにして, 出発集合 (青色の線分) をそれ自身の上に写す写像が定義できる. これを, この系の Poincaré 写像と定義する.

3. Poincaré 写像は次の 4 つの写像で構成されている. 図 23 参照.

- (a) 1 型波形片の点から出発し, 1 型波形片の点に到着する解から定義される 1 1 型写像<sup>\*13</sup>
- (b) 1 型波形片の点から出発し, 0 型波形片の点に到着する解から定義される 1 0 型写像
- (c) 0 型波形片の点から出発し, 0 型波形片の点に到着する解から定義される 0 0 型写像
- (d) 0 型波形片の点から出発し, 1 型波形片の点に到着する解から定義される 0 1 型写像

4. 今,  $\beta = \beta_{off} = \beta_{on}$  となる特別な場合について, これらの写像を計算してみると次式を得る.

(a) 1 1 型写像:

$$x_{n+1} - 1 = \nu(x_n - 1) \quad (35)$$

(b) 1 0 型写像:

$$x_{n+1} = \nu \frac{\alpha}{\alpha - 1} (x_n - 1) \quad (36)$$

(c) 0 0 型写像:

$$x_{n+1} = \nu x_n \quad (37)$$

(d) 0 1 型写像:

$$x_{n+1} - 1 = \nu \frac{\beta - 1}{\beta} x_n \quad (38)$$

<sup>\*13</sup> 1 1 型写像の呼称 1 1 であるが, 最初の数字が定義域の波形型 1 を, 2 番目の数字が値域の波形型 1 を表す. この順に並べると関数の合成は  $f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n$  と右側に作用させるようになる.

ここに,

$$\nu = e^{-T} \left( \frac{\alpha(\beta - 1)}{\beta(\alpha - 1)} \right)^n$$

とおいた. この写像をグラフにすると図 24 となる. 実際には, 各  $\beta$  の値が異なるので, 上式の  $()^n$  を  $\beta_{off}$  と  $\beta_{on}$  に分けて, それぞれの積  $\Pi$  に変更した式となる.

5. 写像は, 裏面の点 D を通る解で不連続となる. 図 25 の点  $x^*$  参照.
6. 例として,  $\alpha = 3/4, \beta_{off} = 1/2, \beta_{on} = 2/5, T \approx 1.7$  の場合 (外力の duty cycle=50%) の写像のグラフを図 25 に示した. この図を使って, 点  $x_0$  から逐次点列を追いかけて求めることができる. 図の例を参照. この例では, 1 1 写像と 1 0 写像の間に不連続点がみられる. 具体的に, 各関数は直接計算すれば次式となる.

$$x_{n+1} - 1 = e^{-T} \frac{\alpha(1 - \beta_{on})}{\beta_{on}(1 - \alpha)} (x_n - 1) \quad (39)$$

$$x_{n+1} = e^{-T} \frac{\alpha^2(1 - \beta_{off})}{\beta_{on}(1 - \alpha)^2} (x_n - 1) \quad (40)$$

$$x_{n+1} = e^{-T} \frac{\alpha(1 - \beta_{on})}{\beta_{on}(1 - \alpha)} x_n \quad (41)$$

$$x_{n+1} - 1 = -e^{-T} \frac{\alpha(1 - \beta_{off})^2}{\beta_{off}^2(1 - \alpha)} x_n \quad (42)$$

また, 不連続点  $x^*$  は, 次式から求めることができる.

$$x^* = 1 - e^{T/2} \frac{\beta_{off}(1 - \alpha)}{\alpha} \quad (43)$$

7. もう一つの表現: 4 つの写像を別々に表し, 4 枚のグラフの相互の配置を工夫すると Poincaré 写像の別の表現ができる. 図 26 参照. これらは, その都度便利な表現を用いるとよいであろう.

### 3.2.5 周期波形と周期解

#### 周期波形の型

このノートでは, 2 種類あるベクトル場は正規化して変えることがないので, 周期波形を作って, この波形を外力の適当な周期に合わせてやれば, 系の周期解が構成できる. 実際にこれをやってみよう.

1.  $m$  個のフェーズイベントを持つ周期波形は,  $\{1(01)^{m-1}0\}$  の符号数をもつ.
2. この解曲線が外力の  $n$  周期時間に埋め込まれるとタイマーイベントが  $n$  回生じて,  $m/n$  周期解が得られる. この周期解の符号数を

$$\{\{1(01)^{m-1}0\}, n\}$$

と書くことにする.

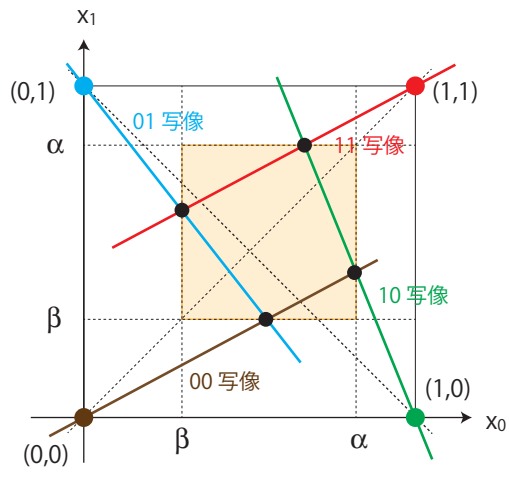


図 24 Poincaré 写像のグラフ.

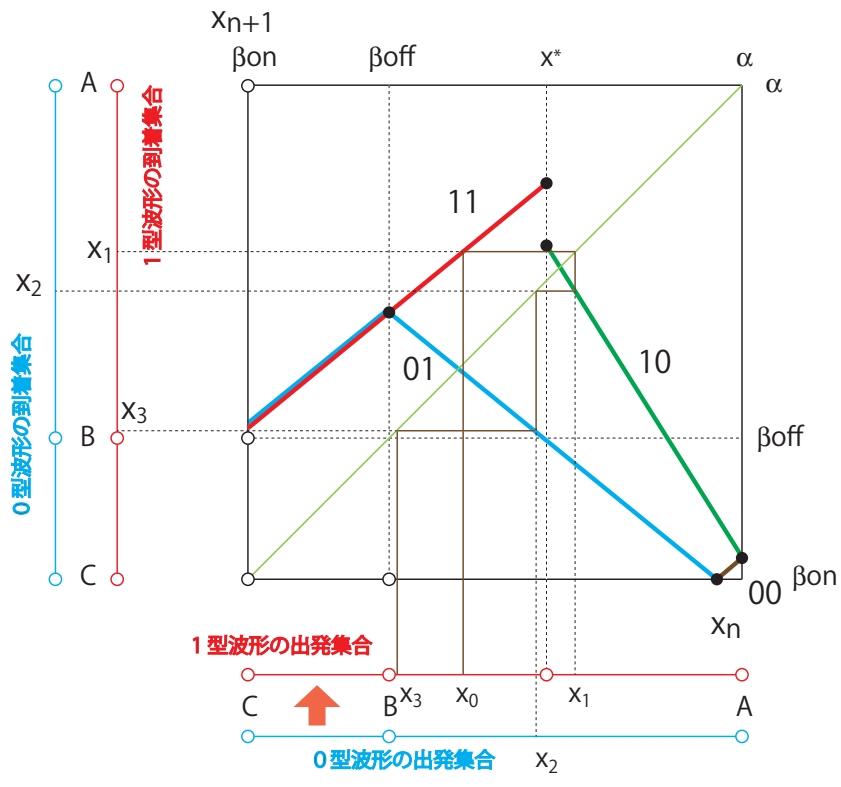


図 25 Poincaré 写像のグラフ例.



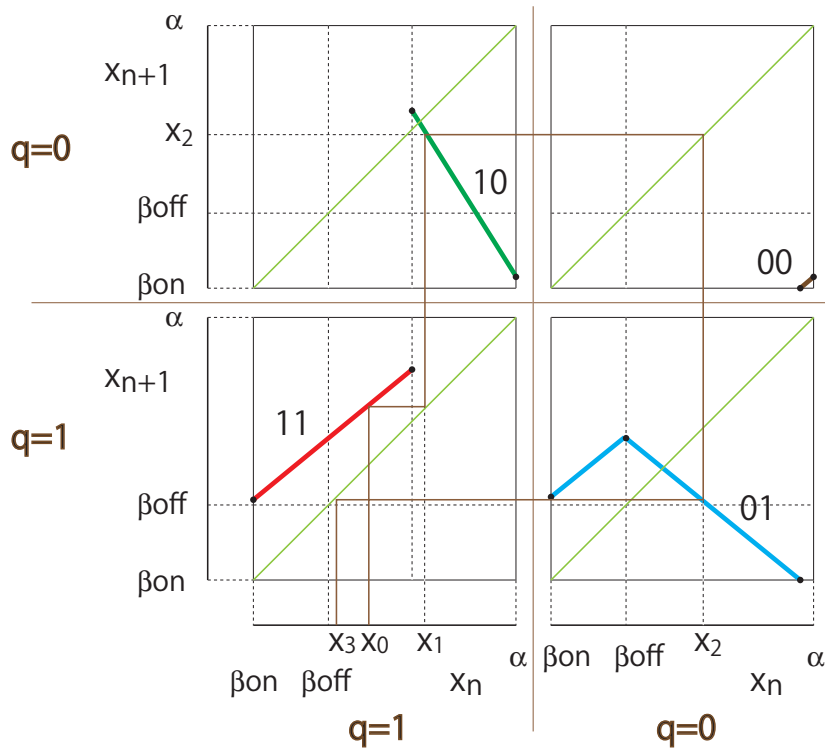


図 26 Poincaré 写像のもう一つの表現.

3. 更に細分して考えるために,  $q = 0$  の領域で起こるフェーズイベントの違いに着目する. この領域での到着集合は

$$x = \beta_{off}, x = \beta_{on}, x = \beta \ (\beta_{on} < \beta < \beta_{off})$$

の 3 種類である. これらの個数を

$$\#\beta_{off}, \#\beta_{on}, \#\beta = 1$$

で表す.  $\#\beta = 1$  に注意しよう. これは大変重要な性質である. そこで次の関係を得る.

$$\#\beta_{off} + \#\beta_{on} + 1 = m \tag{44}$$

このことを考慮して周期解は次の符号数で特徴付けることができる.

$$\{1(01)^{m-1}0\}, (\#\beta_{off}, \#\beta_{on}, \#\beta), n\}$$

周期波形の型の例を表 2 に示した.

### 周期波形の具体的な作り方

図 27 に示した波形は, 1 つの周期波形である. この波形が周期解となるための必要条件を考えてみよう.

表 2 周期波形の型

$m$	$\{1(01)^{m-1}0\}$	$(\#\beta_{off}, \#\beta_{on}, \#\beta)$	note
1	10	(0,0,1)	
2	1010	(1,0,1) (0,1,1)	
3	$(10)^3$	(2,0,1) (1,1,1) (0,2,1)	
$m+1$	$(10)^{m+1}$	( $m,0,1$ ) ( $m-1,1,1$ ) $\vdots$ (1, $m-1,1$ ) (0, $m,1$ )	

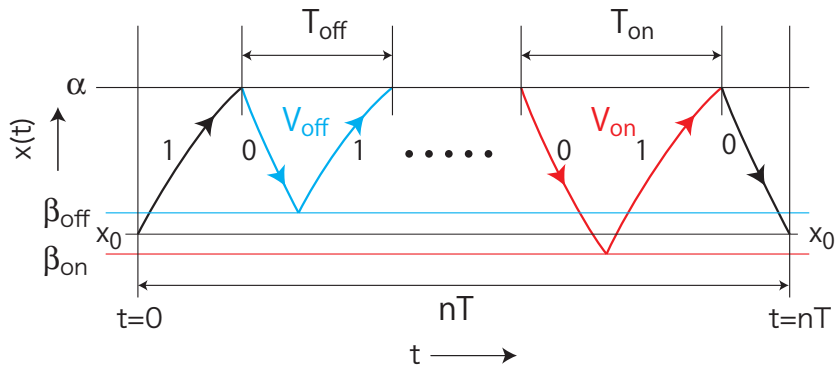


図 27 周期波形  $\{1V_{off}^{m_1}V_{on}^{m_2}0\}$ .

- この波形は、0 1 型波形片  $V_{off}$  を  $m_1$  個、同じく 0 1 型波形片  $V_{on}$  を  $m_2$  個と左右に 1 と 0 型波形片から作られていると仮定しよう。すなわち、波形の符号数に従って 1010... と辿って行くと、 $m_1 + m_2 + 1$  回の  $\alpha$  (あるいは同じことであるが  $\beta$ ) に関するフェーズイベントに遭遇する。
- 外力の周期を  $T$  とし、この波形を外力の  $nT$  時間区間に埋め込むことにする。つまり、タイマーイベントは  $n$  回起こる場合を考える。このとき、 $T, T_{off}, T_{on}$  は次の条件式を満たす必要がある。

$$T_{off}^{m_1+1} + T_{on}^{m_2} < nT < T_{off}^{m_1} + T_{on}^{m_2+1} \quad (45)$$

- 周期解となるためには、 $t = 0$  の 1 型波形片と  $t = nT$  の 0 型波形片を貼り合わさなければなら

ない。このイベントだけがフェーズイベントでかつタイマーイベントである。

4. 図中の初期値  $x_0$  は次式を解いて求めることができる。

$$\ln \frac{(x_0 - 1)\alpha}{(\alpha - 1)x_0} = nT - (T_{off}^{m_1+1} + T_{on}^{m_2}) \quad (46)$$

5. できあがった周期解は、貼り合わせトラス上を、経度方向に  $m_1 + m_2 + 1$  回回転し、その間時間軸方向に  $n$  回回転する。したがって、 $(m_1 + m_2 + 1)/n$  調波周期解の一つが構成できたことになる。
6. この周期解は、式 (45) の不等式の上限と下限で分岐し、消滅する。すなわち、この不等式はまた周期解の存在範囲を示しているといえる。ただし、この条件を満たしていても外力の duty cycle により解が存在できない場合がある。個々の例については、具体的に検討が必要である。
7. Poincaé 写像の不連続点が区間  $[\beta_{on}, \beta_{off}]$  にあれば、2つの周期解が共存可能である。

### 3.2.6 非周期解の存在

### 3.2.7 分岐解析

## 参考文献

- [1] J. Buck and E. Buck; Synchronous Fireflies, *Sci. Am.*, Vol. 234, No.5, pp. 74-85, 1976.
- [2] W. Garver and F. Moss; Electronic Fireflies, *Sci. Am.*, Vol. 269, No.6, pp. 94-96, 1993.
- [3] 高坂, 川上, 上田; 方形波発振器を用いた電子ホタルの同期現象, *信学技報*, NLP96-5, 1996.
- [4] T. Kousaka, H. Kawakami and T. Ueta; Synchronization of Electric Fireflies by Using Square Wave Generators, *Trans. IEICE Fundamentals*, Vol.E81-A, No.4, 1998.
- [5] 関川, 木本, 河野, 川上, 合原; 光結合した方形波発振器を用いた同期現象, *信学技報*, Vol. 111, No. 243, 2011.
- [6] 伊藤, 辻, 上田, 川上; 周期外力を加えた電子ホタルにおける分岐と同期現象, *信学技報*, Vol. 111, No. 395, 2012.
- [7] 辻, 伊藤, 木本, 関川, 喜多, 上田, 合原, 川上; LED ホタルの同期現象: 自律的に動く光パタンの生成, *LED 総合フォーラム 2012 in 徳島論文集*, pp. 99-100, 2012.
- [8] D. Ito, T. Nakanishi, A. Tsuji, T. Ueta and H. Kawakami; Bifurcation phenomena of a light coupled oscillator with a clock pulse input, *NCSP' 12*, Honolulu, 2012.
- [9] K. Kimoto, A. Tsuji, M. Sekikawa, I. Aihara, D. Ito, T. Ueta, K. Aihara and H. Kawakami; Optically Coupled Oscillators(OCO)s—LED Fireflies, *ACM Multimedia Art Exhibition 2012*, Todaiji Culture Center, 10/20-11/4, 2012.
- [10] 伊藤, 辻, 木本, 合原, 関川, 上田, 合原, 川上; LED ホタルの引き込み現象: ホタルはエッジで同期する, *LED 総合フォーラム 2013 in 徳島論文集*, 2013.
- [11] Edward A. Lee and Sanjit A. Seshia; *Introduction to Embedded Systems, A Cyber-Physical Systems Approach*, 2011. <http://LeeSeshia.org>
- [12] 川上; 光と電圧で制御される RC 方形波発振器の種類と結合系の個数について, *LED ホタルのための私的ノート*, 2011.