

非線形 LC 回路に関連した問題提起

川上 博†

† 〒 770-0861 徳島市住吉一丁目-2-33-1006

E-mail: †h.kawakami@384.ac.jp

あらまし インダクタとキャパシタから構成される LC 回路は、電気回路に生じる振動現象を生起する素となる回路と考えられる。一般の LC 回路から、L (あるいは C) のみからなるカットセットと L (あるいは C) のみからなる閉路を取り除くと、LC 回路の基本形とも言える回路が得られる。この報告では、この LC 回路の基本形を数え上げる問題とこれに関連した解析や発振回路の構成問題を考える。

キーワード LC 回路の基本形, Hamilton 力学系, 準周期発振器

Some Problems on Nonlinear LC Circuits

Horoshi KAWAKAMI†

† Sumiyoshi 1-2-33-1006, Tokushima-shi, 770-0861 Japan

E-mail: †h.kawakami@384.ac.jp

Abstract A simple LC circuit is defined as a fundamental oscillatory circuit, if it has no L(or C) only cut-set and L(or C) only loop. We propose an enumeration problem of the LC circuit and consider a synthesis problem of oscillators with quasi-periodic states.

Key words elementary LC circuit, Hamiltonian dynamics, Oscillator with quasi-periodic states

1. まえがき

インダクタとキャパシタのみからなる回路は LC 回路と呼ばれている。LC 回路のうち、次の3つの性質:

- (1) インダクタのみからなるカットセットおよびループはない
- (2) キャパシタのみからなるカットセットおよびループもない
- (3) 回路のグラフは可分ではない

をもつ回路を、ここでは基本 LC 回路 (elementary LC circuit) と呼ぶことにする。基本 LC 回路と「基本」を付した意味は、回路としては最も簡単で、状態の挙動についても「振動の素」とも言える回路と考えられるからである。

基本 LC 回路は、

- (1) グラフとしての節点数を n とすると、枝の数 b は $b = 2(n - 1)$ であり、そのうち $n - 1$ 個の枝は L 枝で、残りの $n - 1$ 個の枝は C 枝で構成されている。
- (2) したがって、 L 枝集合はこの回路の木枝集合となっている。 C 枝集合についても同様である。
- (3) 基本 LC 回路の L 枝の素子をキャパシタに、 C 枝の素子をインダクタに置き換えても、やはり基本 LC 回路である。このようにグラフとして簡単な性質を持っているので、枝数の

少ない基本 LC 回路をすべて数え上げる問題が考えられる。

基本 LC 回路は力学系としてみると、Hamilton 力学系の回路による実現と考えることができる。基本 LC 回路の木枝数 b は力学系の自由度を表し、回路の状態方程式の階数は $2b$ となる。このことから、

- (1) 基本 LC 回路にどのような条件をつけると回路が可積分系になるか
- (2) 負性抵抗素子を適切に付け加えて準周期アトラクタをもつ発振回路を構成できるか
- (3) 基本 LC 回路の強制振動はどうなるのか

といった問題を考察する際に役立つことができるであろう。この報告では、自由度の低い基本 LC 回路を具体的に構成し、上述の問題を具体的に示した。

2. 自由度の低い基本 LC 回路

自由度の低い基本 LC 回路は、考えられる場合を総当たり的に調べることで基本 LC 回路またはそのグラフを知ることができる。たとえば、次の手順に従うとよい。

- (1) ラベルと根の付いた木集合をつくり、これらを L 木枝集合あるいは C 木枝集合とみなす。
- (2) L 木枝集合の要素である L 木枝グラフと C 木枝集合の C 木枝グラフを加算し、基本回路グラフ、すなわち基本 LC

回路，を構成する。

(3) 前項の2つのグラフの加算を L 木枝集合と C 木枝集合の要素のあらゆる組み合わせについて行う。この大きな集合には、節点数を固定した場合の基本グラフのすべてが含まれている。

(4) 同型なグラフを除去して、構造の異なるグラフを選び出す。

(5) 可分なグラフを除去する。

(6) 回路として同型となるグラフを除去する。すなわち、直列枝の入れ替えで互いに同じとなるグラフは除去する。

(7) この段階で残ったグラフは、基本 LC 回路となるいわば「基本グラフ」である。

(8) 基本グラフに L 枝木と C 枝木を対応させて（埋め込んで）、基本 LC 回路が構成できる。一つの「基本グラフ」に幾つの「基本 LC 回路」が埋め込めるかは、この回路の木を数え上げて、できた回路の回路としての同型回路を除去するとわかる。

2.1 3自由度の基本 LC 回路

節点数が4なので、ラベルと根の付いた木は16種類となる。これらの木の単純な組み合わせはその積 $16 \times 16 = 256$ 通りの木が合成できる。これをグラフ同型で分けると9通りの異なる基本グラフを得る。図1参照。図1から次のことが分かる。

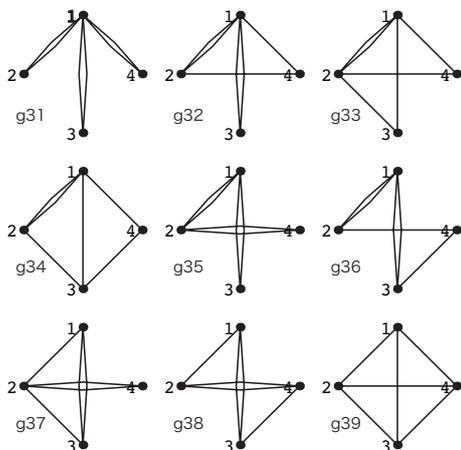


図1 同型でないグラフを抽出した例。

Fig. 1 Non-isomorphic set of graphs for $n = 4$.

- (1) 可分なグラフが4個ある：g31, g32, g35, g37
- (2) g36 と g38 は回路としては同じ回路である。直列素子の順序を変えても回路の性質は変わらない。
- (3) g34 のグラフには2つの異なる回路が実現できる。それらは互いに双対回路となっている。
- (4) 図2との対応をみてみよう。C-1 は g36, g38 に、C-2 は g33 に、C-3 は g39 に、C-4 と C-5 は g34 に、それぞれ対応する。
- (5) 回路でみると、C-1 と C-2 は、双対回路となっている。C-3, C-4, C-5 は自己双対回路である。
- (6) グラフのトポロジーを変えずに、L と C を相互に置き換える操作では、C-1, C-2, C-3 は不変、C-4 は C-5 に、C-5

は C-4 になる。

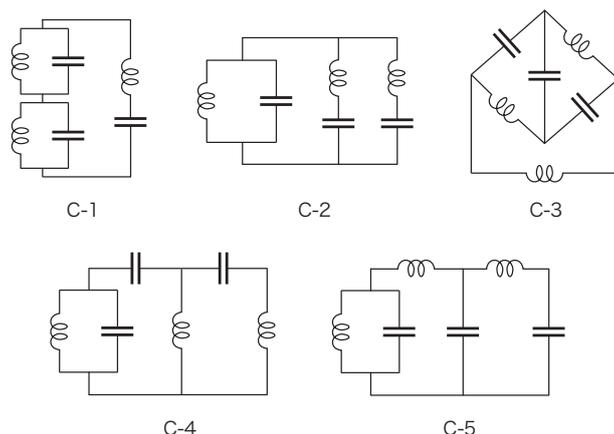


図2 同型でない回路の例。

Fig. 2 Non-isomorphic LC circuits for $n = 4$.

2.2 4自由度の基本 LC 回路：節点数5のグラフ

この場合も上述の手順に従って計算すると、46個の同型でないラベル付き根付きグラフが得られる。このうち23個は可分グラフとなっているので削除する。また、回路として同型となるグラフが6個ある。そこで基本 LC 回路が得られるグラフは最終的に17個となることがわかる。これらを図3に示した。

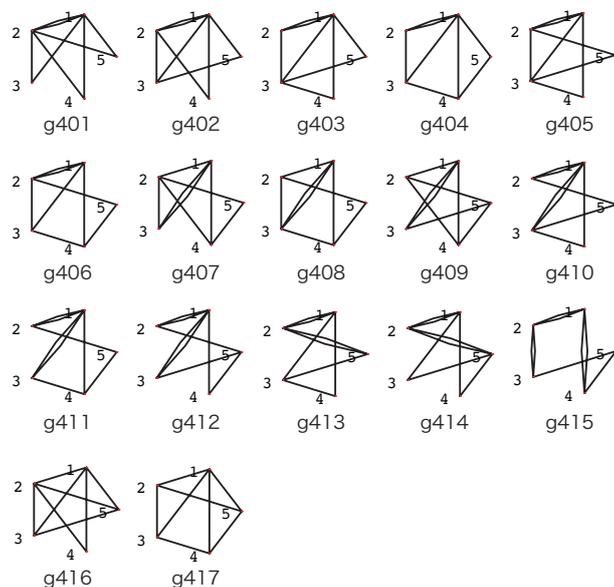


図3 節点数5の場合の基本グラフ。

Fig. 3 Non-isomorphic set of graphs for $n = 5$.

3. 回路方程式

基本 LC 回路の回路方程式が Hamilton 系として記述されることをみておこう。

3.1 C を基準木とした時の KCL と KVL

C を木枝に選び、 L を補木に選んだとき、回路の KCL と KVL は

$$\begin{aligned} i_C + F i_L &= 0 \\ v_L - F^T v_C &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

となる。ここに、行列 F はカットセット行列の主要部を表す。また、上付き添え字の T は転置を表す。

3.2 L を基準木とした時の KCL と KVL

同様に、 L を木枝に選び、 C を補木に選らんだとき、回路の KCL と KVL は

$$\begin{aligned} i_L + N i_C &= 0 \\ v_C - N^T v_L &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

となる。

ここで、行列 F と N の間には

$$FN = I \quad (3)$$

の関係があることに注意しよう。

3.3 回路の基本 2 形式

2つのベクトル v と i を掛け合わせる記号として

$$\langle v, i \rangle = \sum_{k=1}^m v_k i_k$$

を使うことにする。

インダクタの電力 $\langle v_L, i_L \rangle = -\langle v_L, N i_C \rangle$ に着目しよう。なお、キャパシタの電力を使っても同様の議論ができる。

$$v_L = \frac{d\phi}{dt}, \quad i_C = \frac{dq}{dt} \quad (4)$$

であるから、この電力をこれらの変数を使って書き換えると

$$\left\langle \frac{d\phi}{dt}, N \frac{dq}{dt} \right\rangle \quad (5)$$

が得られる。そこで直感的に、次の 2 形式を定義する。

$$\Omega = d\phi \wedge N dq \quad (6)$$

3.4 基本 LC 回路の回路方程式

基本 LC 回路の回路方程式が次式で与えられることを示そう。

$$X_{dH} \lrcorner \Omega = dH \quad (7)$$

まず、相空間となる多様体 M は、座標 (ϕ, q) を持つとしよう。 M 上のエネルギー関数を $H(\phi, q)$ とする。この関数は、キャパシタに蓄えられる電気的エネルギー $W_C(q)$ とインダクタに蓄えられる磁気的エネルギー $W_L(\phi)$ の和として与えられる。

$$H(\phi, q) = W_L(\phi) + W_C(q) = \int^\phi \langle i_L, d\phi \rangle + \int^q \langle v_C, dq \rangle \quad (8)$$

さて、 M 上のベクトル場を次式で与えて、係数の満たす条件式が Hamilton 系となることを確かめよう。

$$X_{dH} = a \frac{\partial}{\partial \phi} + b \frac{\partial}{\partial q} = v_L \frac{\partial}{\partial \phi} + i_C \frac{\partial}{\partial q} \quad (9)$$

次式を得る。

$$\begin{aligned} X_{dH} \lrcorner \Omega &= \left(a \frac{\partial}{\partial \phi} + b \frac{\partial}{\partial q} \right) (d\phi \wedge N dq) \\ &= \langle a, N dq \rangle - \langle b, N^T d\phi \rangle = \langle N^T a, dq \rangle - \langle N b, d\phi \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

他方、エネルギー関数から導かれる 1 形式は次式となる。

$$\begin{aligned} dH &= dW_L(\phi) + dW_C(q) = \frac{\partial W_L}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial W_C}{\partial q} dq \\ &= \frac{\partial H}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial H}{\partial q} dq \end{aligned} \quad (11)$$

式 (10) の最後の式と式 (11) を比較して、次式を得る。

$$\begin{aligned} N^T a &= \frac{\partial H}{\partial q} \\ -N b &= \frac{\partial H}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (12)$$

式 (3) より、 $N^{-1} = F$ となることを使って、式 (12) は次式となる。

$$\begin{aligned} a &= v_L = \frac{d\phi}{dt} = F^T \frac{\partial H}{\partial q} \\ b &= i_C = \frac{dq}{dt} = -F \frac{\partial H}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (13)$$

これが回路方程式を与えている。

線形特性のインダクタとキャパシタからなる線形 LC 回路では、

$$\phi = L i_L, \quad q = C v_C, \quad \frac{d\phi}{dt} = L \frac{di_L}{dt}, \quad \frac{dq}{dt} = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$H(\phi, q) = \frac{1}{2} \langle L^{-1} \phi, \phi \rangle + \frac{1}{2} \langle C^{-1} q, q \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \langle i_L, L i_L \rangle + \frac{1}{2} \langle v_C, C v_C \rangle$$

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = L^{-1} \phi = i_L, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = C^{-1} q = v_C$$

であるから、式 (13) は次式となる。

$$\begin{aligned} C \frac{dv_C}{dt} &= -F i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= F^T v_C \end{aligned} \quad (14)$$

今、 $x = \sqrt{C} v_C$, $y = \sqrt{L} i_L$, $P = \sqrt{C}^{-1} F \sqrt{L}^{-1}$, $\Omega = P P^T$, $\omega = \sqrt{\Omega}$ とおくと式 (14) は

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega y \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega x \end{aligned} \quad (15)$$

となる。このことから線形基本 LC 回路の基本解は、 ω の $b/2$ 個の固有値 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{b/2}$ を固有振動数とする $b/2$ 個の正弦波の重ね合わせで求められることがわかる。

3.5 非線形基本 LC 回路

インダクタ特性あるいはキャパシタ特性が非線形の場合や、更に相互に結合した特性を持つ場合には、これらの特性が式 (8) に表われる。従って、これらの特性は式 (13) の右辺の形で回路方程式に反映される。

4. 基本 LC 回路の摂動系

4.1 非線形基本 LC 回路の定性的性質は？

自由度 2 以上の非線形基本 LC 回路の解析に関しては、あまり系統的な結果が見当たらない。安定平衡点の周りの運動は準周期的、不安定平衡点のそれはサドル的部分空間をもつ準周期的と考えられる。しかし、平衡点から離れた大域的運動については、KAM 定理や二重漸近運動などの定性的挙動以外、具体的な性質がほとんど知られていない。したがって、最も基本的な問題として非線形基本 LC 回路の定性的性質を調べる手法を開発することがあげられる。ここでは、電気屋の立場でどのような手法が考えられるか検討してみよう。

まず、平凡であるが 2 つの立場が考えられる。その一つは、抵抗素子を付加して Hamilton 系を壊し、アトラクタを観察することで元の系の性質を調べることである。他の一つは、適当な周期関数を印加して応答をみる手法である。

なお、これらは単に基本 LC 回路の性質を調べる目的とは別に力学系のアトラクタを設計する手法となっていることにも注意しよう。

4.2 負性抵抗による摂動

基本 LC 回路のキャパシタ枝に並列に負性抵抗素子を付加した摂動系を考えよう。この系の回路方程式は

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= F^T \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{dq}{dt} &= -F \frac{\partial H}{\partial \phi} - \frac{\partial R}{\partial q}\end{aligned}\quad (16)$$

となる。ここに、 $R(q)$ は電圧制御型非線形抵抗から定まる散逸関数である。ここで、 R をうまく選び、その個数を 1 から $b/2$ まで変化させると、アトラクタとしてリミットサイクルから各種リミットトラスの生成が期待できる。

同様に、 $H(\phi, q) = E$ (一定) となるエネルギー曲面上の運動を知りたい場合、 $H = E$ で零となり、その他で正の値となる関数を散逸関数に選んで式 (16) を作り、 $H = E$ 上の運動を解析することが考えられる。

4.3 強制振動による摂動

基本 LC 回路のキャパシタ枝に並列に電流源を、またインダクタに直列に電圧源を挿入した回路の回路方程式は

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= F^T \frac{\partial H}{\partial q} + e(t) \\ \frac{dq}{dt} &= -F \frac{\partial H}{\partial \phi} + j(t)\end{aligned}\quad (17)$$

で与えられる。ここに、 $e(t)$ 、 $j(t)$ は、それぞれ挿入された電圧源、および電流源の時間関数を表す。強制外力による共振現象を手がかりに元の系の周期振動のあり場所やパラメータ依存性をみることができるであろう。この場合、次式のように線形

抵抗を適切に付加し、アトラクタを追跡するのも興味がある。

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= F^T \frac{\partial H}{\partial q} - \epsilon_R \phi + e(t) \\ \frac{dq}{dt} &= -F \frac{\partial H}{\partial \phi} - \epsilon_G q + j(t)\end{aligned}\quad (18)$$

5. まとめと文献

5.1 回路解析の立場から Hamilton 系の解析ができないか

自由度 3, 4 の基本 LC 回路を数え上げた結果を示し、各自由度での基本 LC 回路のトポロジーの違いが力学的性質にどのような影響を及ぼすかといった問題のあることを指摘した。

基本 LC 回路の数は、自由度が上がると急速に大きくなる。したがって、自由度が 5 以上の基本回路を数え上げるには、効率のよい構成法が必要である。

最後に、高次元非線形システムの特別な場合である、基本 LC 回路とその解析の方向性について略述した。

5.2 文献あれこれ

LC 回路を含む一般的な回路の定式化については以前から様々な形で行われている [1]~[3]。

自由度 2 の Hamilton 系を解析した例としては [4], [5] に古典的な結果がみられる。また、[6] 参照。

また、自由度 2 以上の基本 LC 回路解析には、数値計算を援用することが必要となるであろう。この報告では紹介しなかったが Hamilton 系の数値解析法については、[7], [8] 参照。特に、[8] には沢山の数値計算の例が示されている。できれば不変集合の解析という立場で数値計算のなされた例がほしい。

なお、この報告の一部は [9] で報告した。

文 献

- [1] R. K. Brayton and J. K. Moser, A Theory of Nonlinear Networks –I, II, Quarterly of Applied Math., No. 1, pp. 1-33, No.2, pp. 81-104, 1964.
- [2] 川上 博, 非線形 LC 回路, 数理解析研究所講究録 284, 電気回路の力学系, pp.48-63, 1976.
- [3] G. M. Bernstein and M. A. Lieberman, A Method for Obtaining a Canonical Hamiltonian for Nonlinear LC Circuits, IEEE Trans. on CAS, Vol. 36, No.3, 1989.
- [4] M. Hénon and C. Heiles, The Applicability of the Third Integral of Motion, Astronomical Journal, Vol. 69, pp. 73-79, 1964.
- [5] 齋藤利弥, 解析力学入門, 第 4 章自由度 2 の力学系—制限 3 体問題, 至文堂, 1964.
- [6] 大貫義郎, 吉田春夫, 力学, 岩波書店, 2001.
- [7] 吉田春夫, シンプレクティック数値解法, 数理科学, No. 384, 1995.
- [8] E. Hairer, C. Lubich and G. Wanner, Geometric Numerical Integration, Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations, 2nd Edition, Springer, 2005.
- [9] H. Kawakami, Attractors in Circuit Dynamics—an elementary question on attractor design—, NDES'07, 2007.