



第2回力学系理論と制御理論の融合に関する合宿研究会

電気回路の状態方程式

— 系統的に求めるには —

会場：晴海グランドホテル

川上 博

2011/05/13



あらすじ

1. はじめに：簡単な回路例とKirchhoffの法則

30分

2. 状態の拘束条件と接続の関係

30分

3. Proper treeのある回路の回路方程式

30分

4. Mixed potential による回路方程式の記述

30分



1. はじめに：電気回路の例

1.1 電気回路の位置づけ

1.2 簡単な回路例

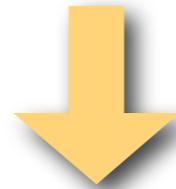
1.3 回路方程式を得る方法



1.1 電気回路の位置づけ

電気回路

物理モデル



analog simulator

常微分方程式 (力学系)

不変集合とその分岐



46 (XXII-16)

回路

[英] network, circuit [仏] réseau, circuit
[独] Netzwerk, Schaltung

C. 電気回路

古くから多くの研究のなされているのは以下のような電気回路に関するものであり，回路といえは，狭義には電気回路を指す．電気回路は，抵抗，キャパシタ，インダクタという3種類の素子を枝に対応させ，それぞれの枝電流 i_κ と枝電圧 v_κ の関数関係を $v_\kappa = R_\kappa i_\kappa$, $i_\kappa = C_\kappa dv_\kappa/dt$, $v_\kappa = L_\kappa di_\kappa/dt$ ($R_\kappa > 0$, $C_\kappa > 0$, $L_\kappa > 0$) で定義し，枝の端子どうしを適当に接続し，電源 (i_κ が与えられた時間の関数であるような枝を電流源， v_κ がそのような枝を電圧源，両者を総称して電源と呼ぶ) を付加したものである． $R_\kappa, C_\kappa, L_\kappa$ が定数である素子を線形素子，これらが枝電流あるいは枝電圧の関数となる素子を非線形素子という．線形素子のみからなる回路を線形回路 (linear network)，そうでない回路を非線形回路 (nonlinear network) という．

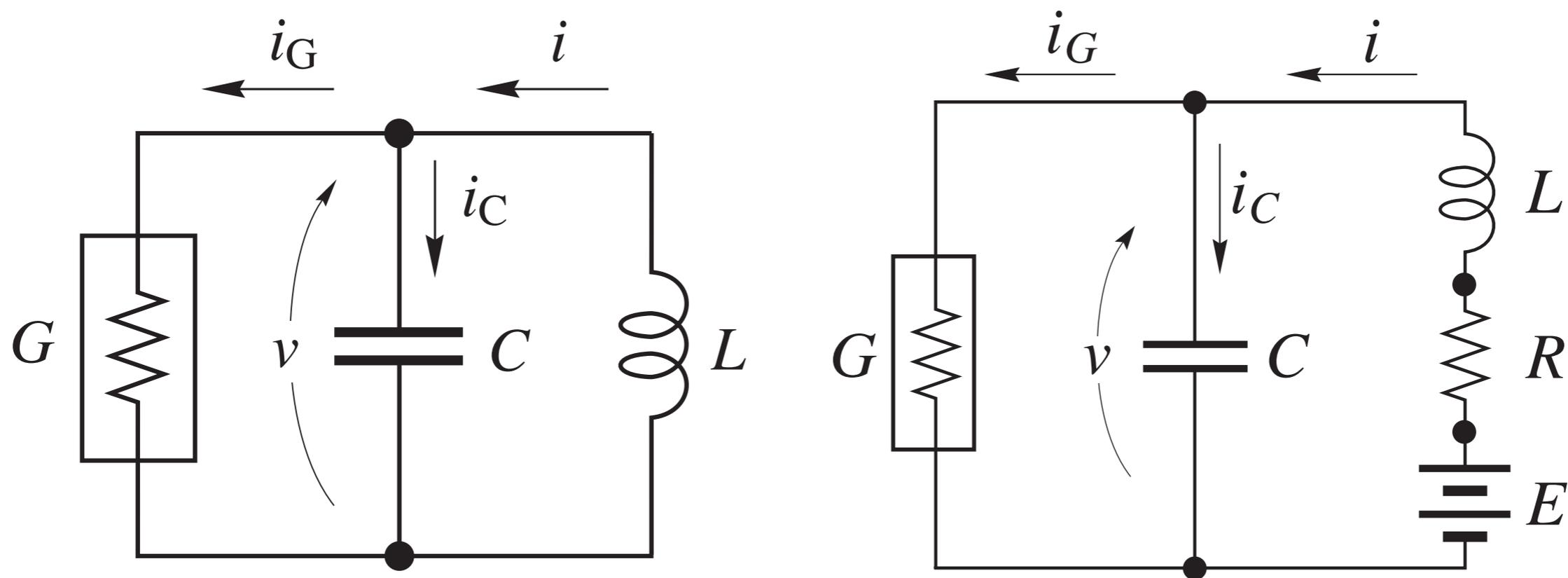
非線形回路の回路方程式をポテンシャル関数を用いて定式化し，回路の安定性解析に役立てる研究 ([12]) や，微分位相幾何学[†]の手法により回路方程式を微分形式を用いて定式化し，回路の大域的性質の解明に役立てる研究 ([13]) も行われている．このように非線形回路は，非線形現象 (例えば，自励振動，非線形共振，結合系の同期現象，パラメータ励振，分岐現象など) を説明する具体的な物理モデルとして有用と考えられている．特に，電気回路は抵抗素子を用いることからエネルギー散逸系モデルであり，解析力学 (→ 487 力学 F) とは対照的な物理系といえる．

$$v = Ri$$

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad v = L \frac{di}{dt}$$



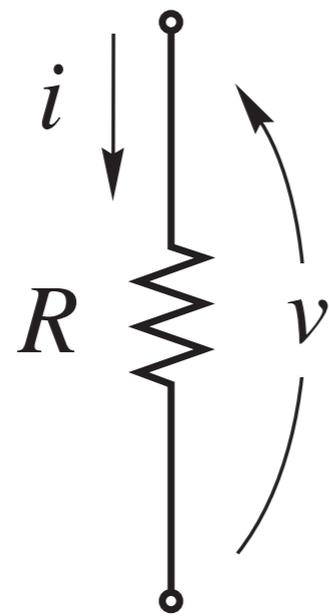
1.2 簡単な回路例



用語：素子，枝，節点，電圧，電流，向き



回路素子：抵抗, キャパシタ, インダクタ

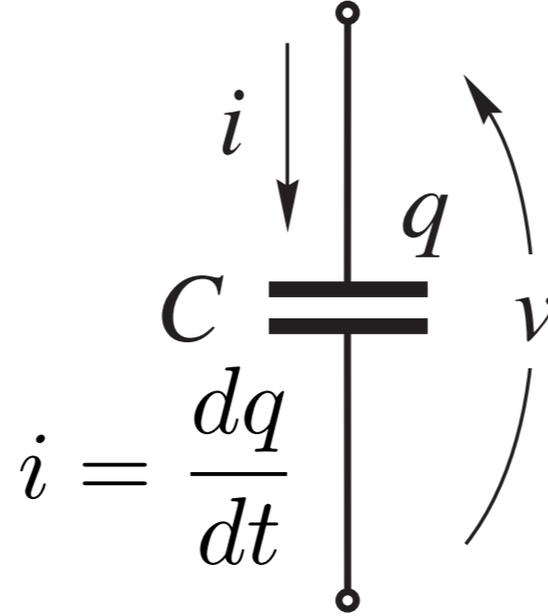


$$v = Ri$$

$$i = Gv$$

$$v = f(i)$$

$$i = g(v)$$

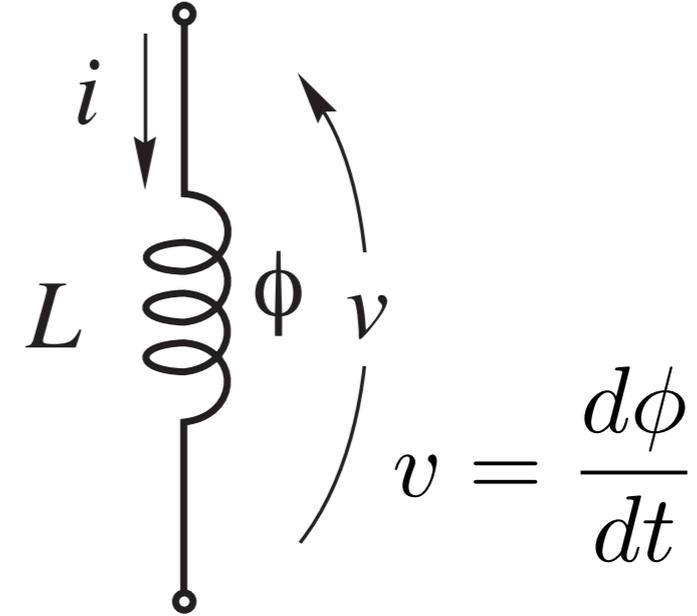


$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$q = Cv$$

$$v = f(q)$$



$$v = \frac{d\phi}{dt}$$

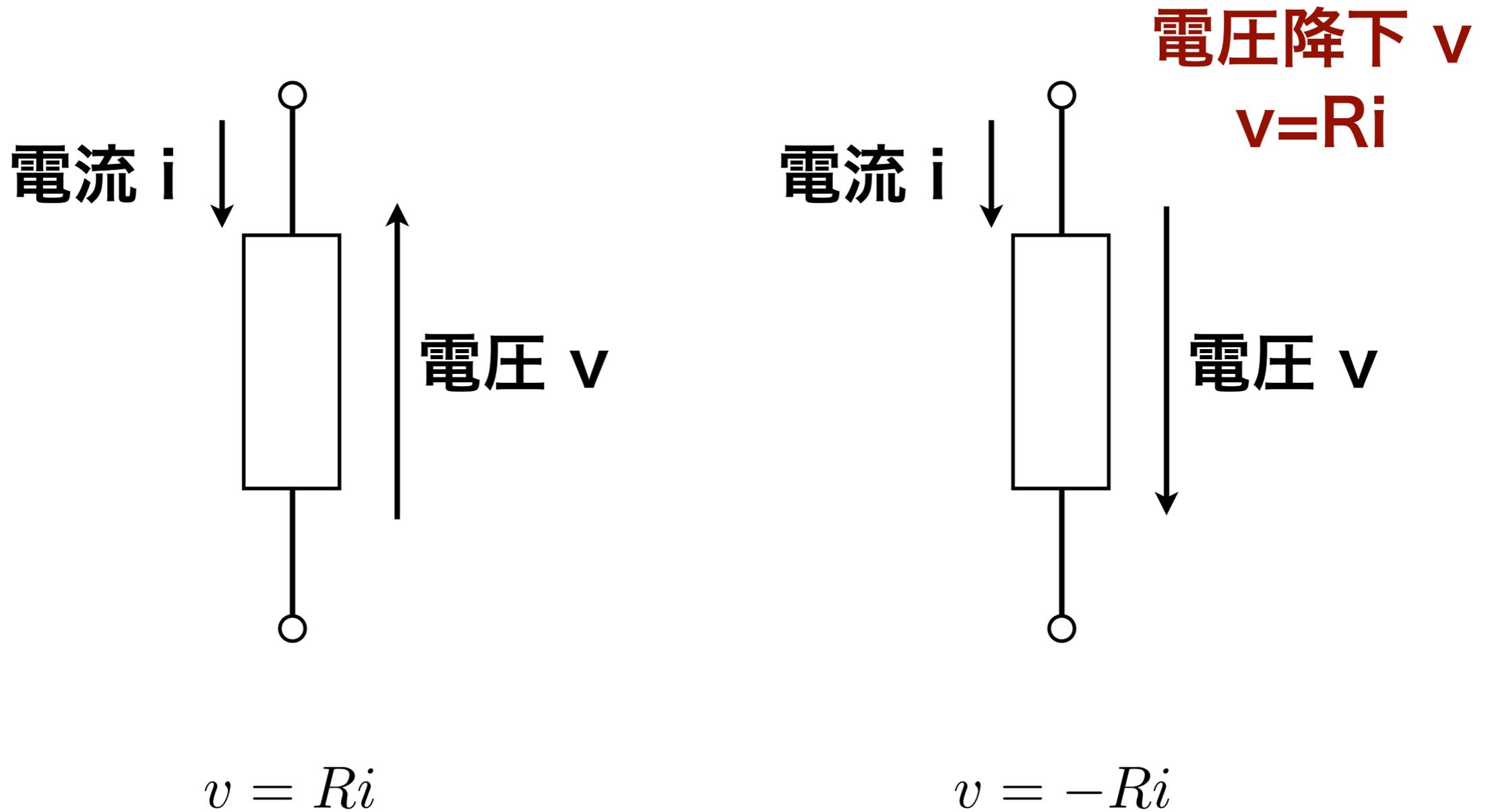
$$v = L \frac{di}{dt}$$

$$\phi = Li$$

$$i = f(\phi)$$

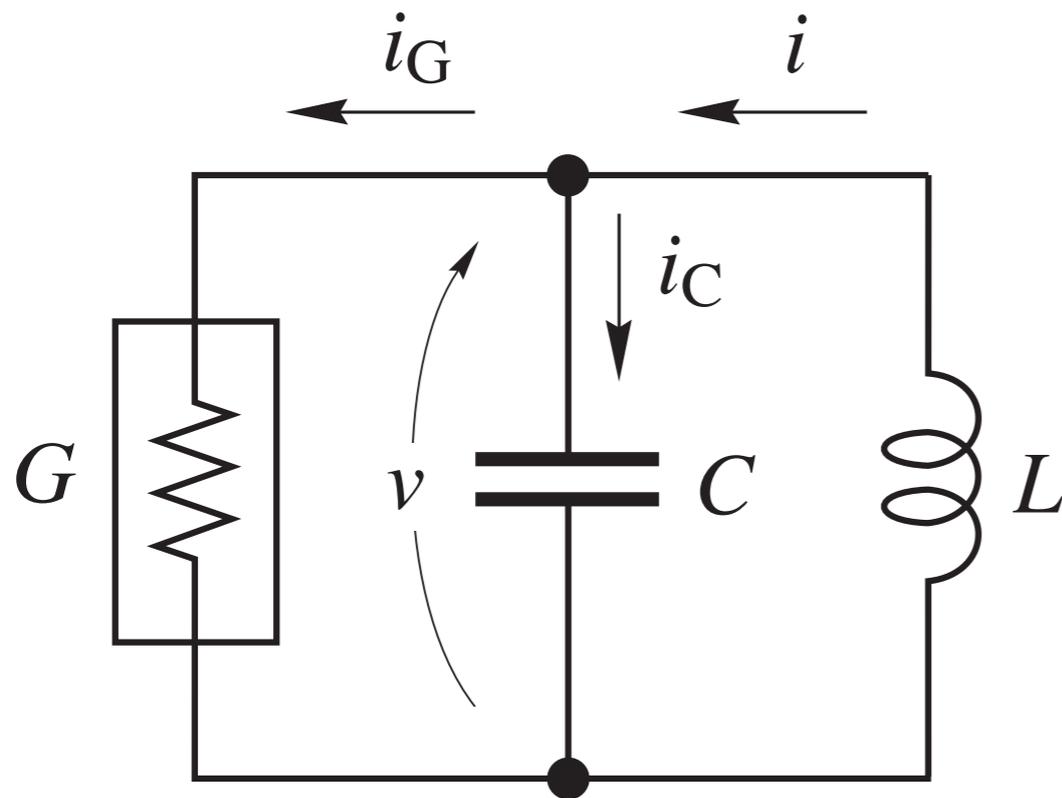


回路素子：向付けには注意が必要





van der Pol 方程式/ Rayleigh 方程式



$$L \frac{di}{dt} + v = 0$$

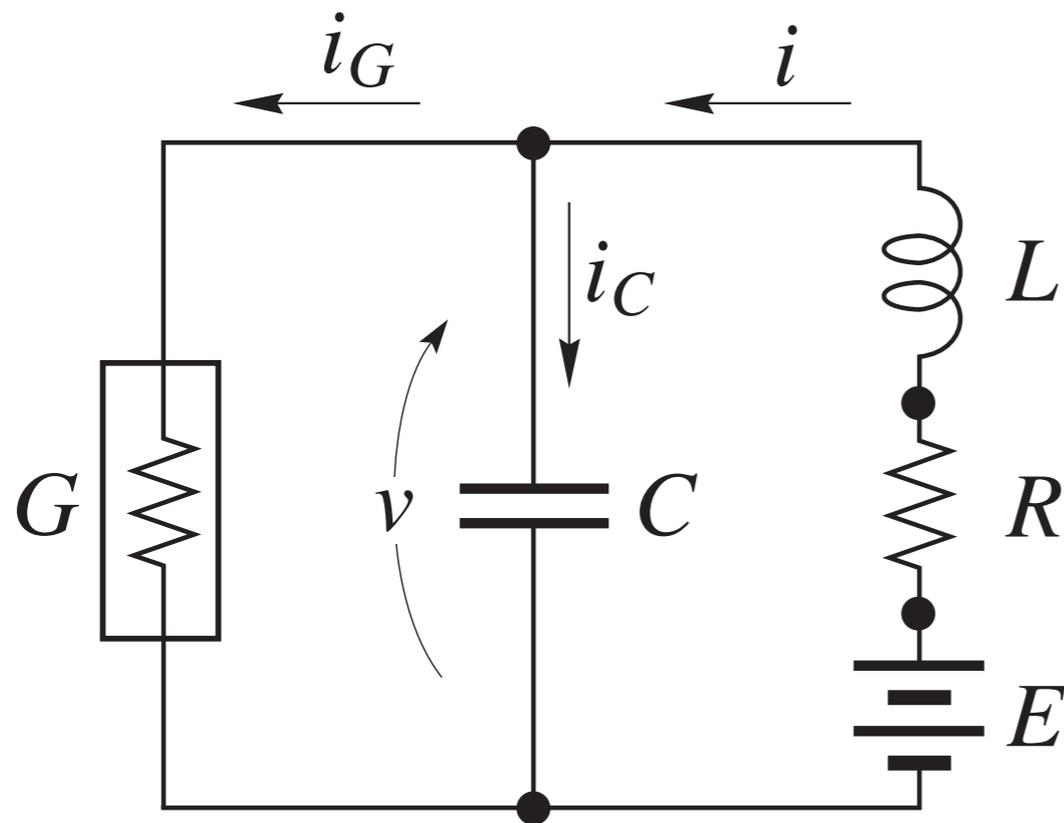
$$\begin{aligned} i &= i_C + i_G \\ &= C \frac{dv}{dt} + g(v) \end{aligned}$$

$$C \frac{dv}{dt} = i - g(v)$$

$$L \frac{di}{dt} = -v$$



BVP / FitzHugh-Nagumo



$$L \frac{di}{dt} + Ri + v = E$$

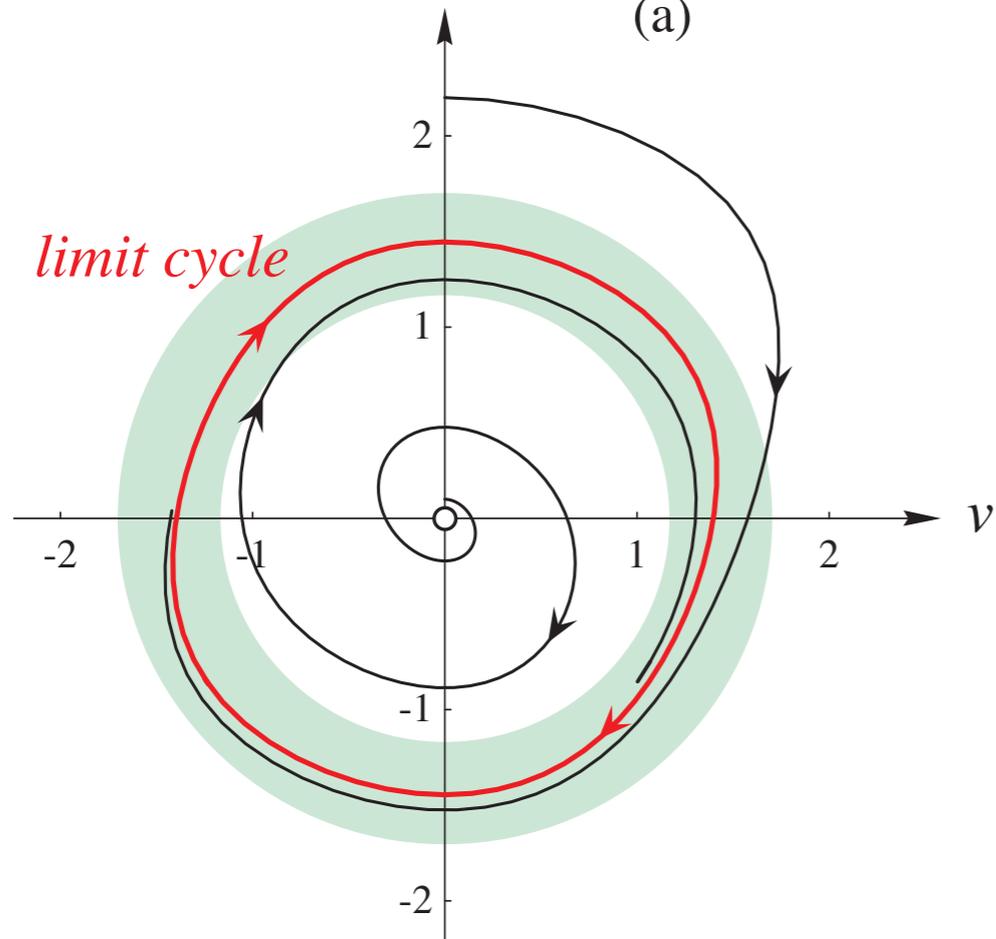
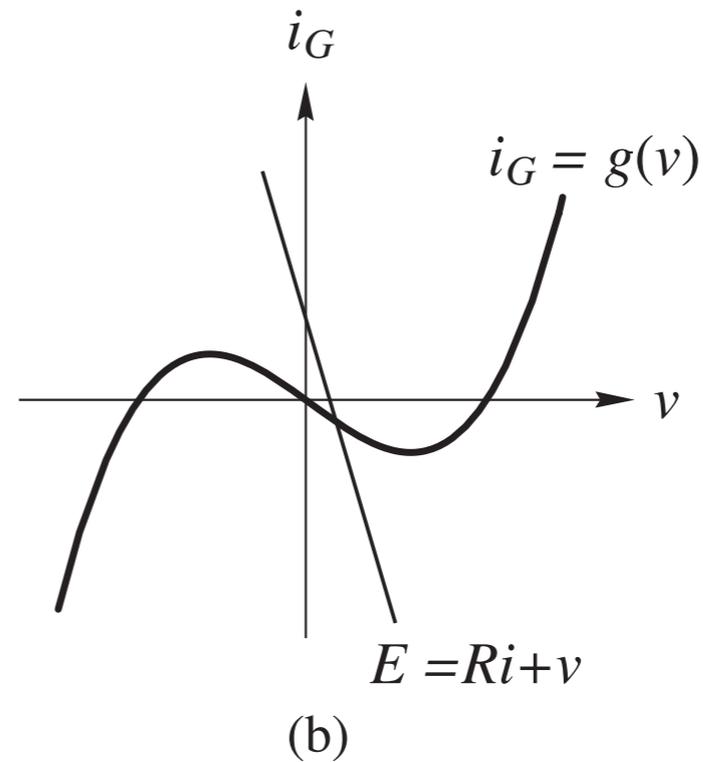
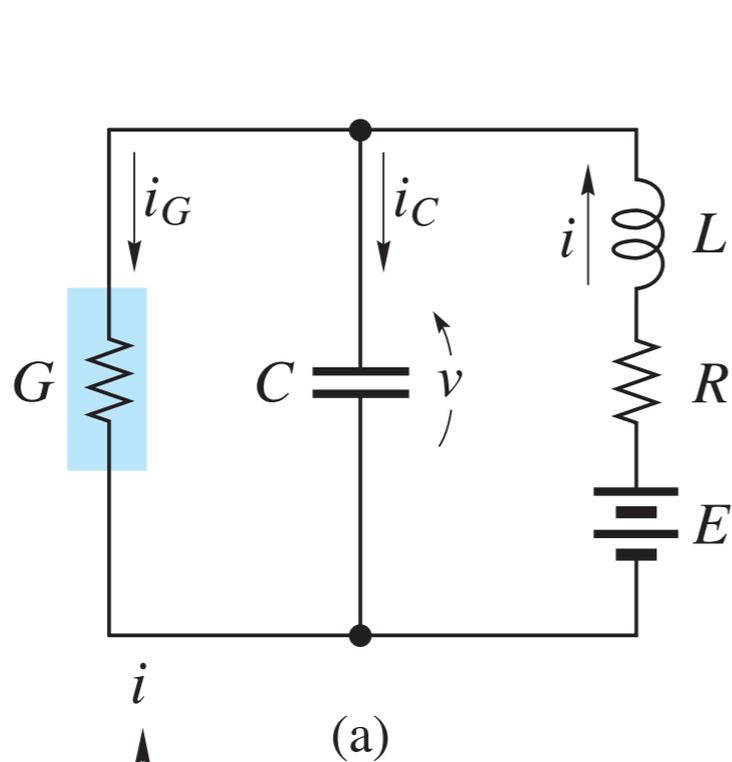
$$\begin{aligned} i &= i_C + i_G \\ &= C \frac{dv}{dt} + g(v) \end{aligned}$$

$$C \frac{dv}{dt} = i - g(v)$$

$$L \frac{di}{dt} = -v - Ri + E$$



LCR発振回路：BVP 発振器

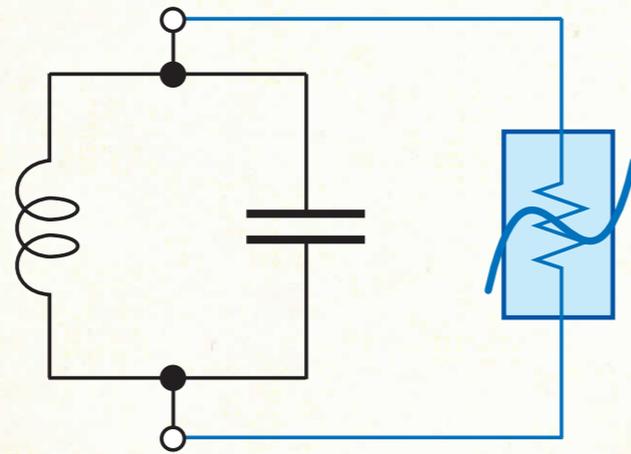


$$C \frac{dv}{dt} = i - g(v)$$

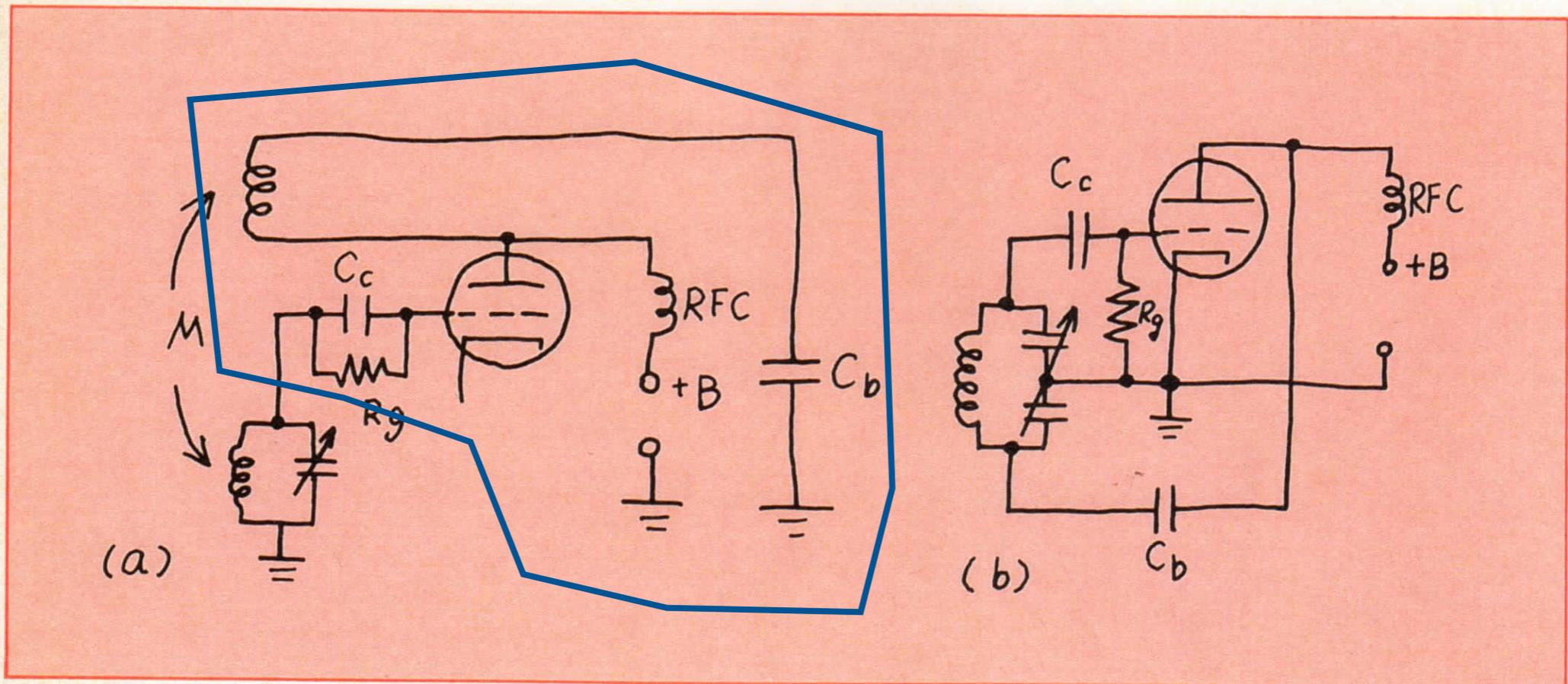
$$L \frac{di}{dt} = -v - Ri + E$$



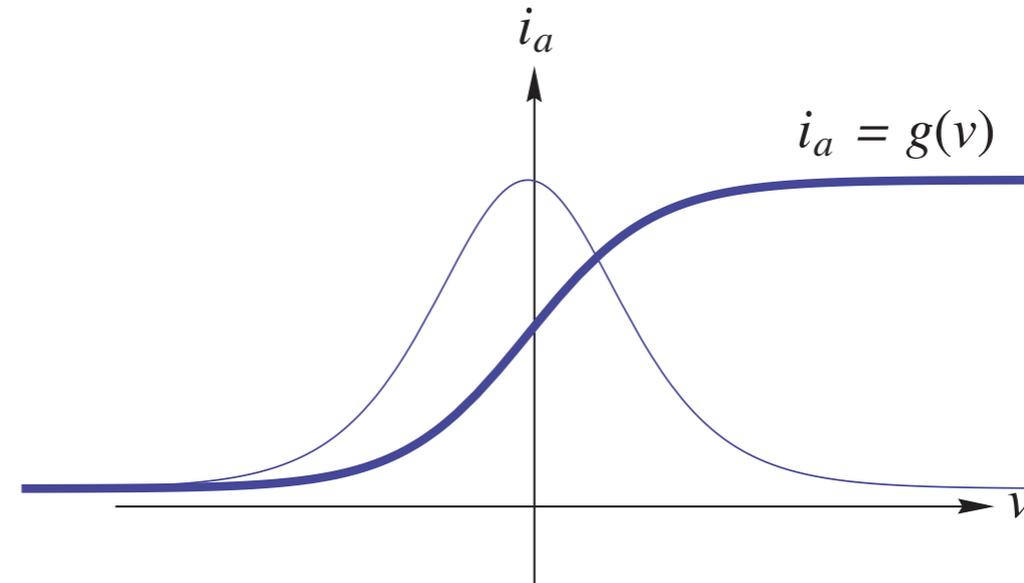
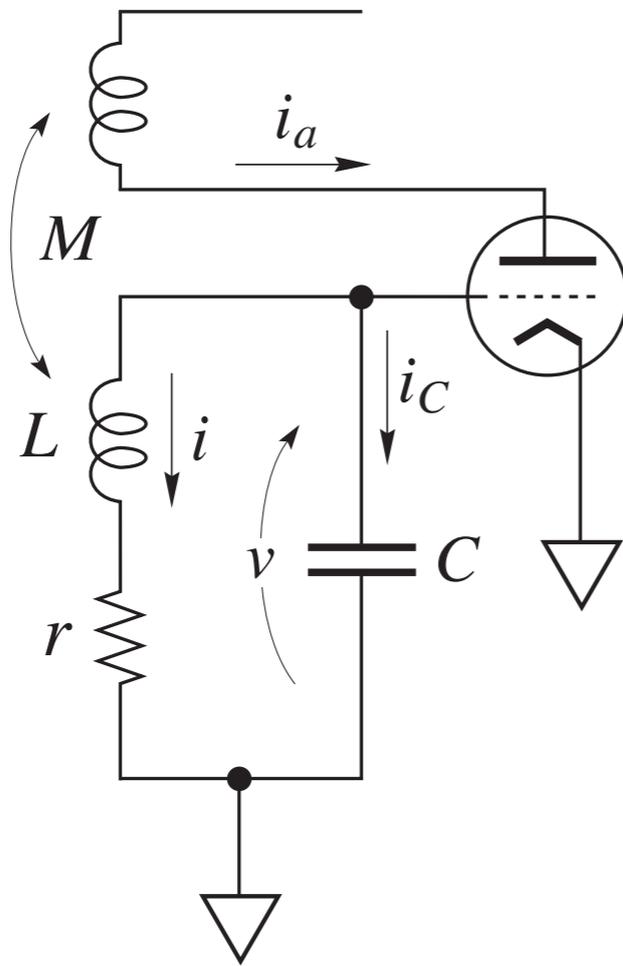
1. 真空管発振器: 1912年頃



真空管発振器は、それ以前のスパーク・ギャップと違って単一周波数の連続波を発生し、単一チャンネルでの通信を可能にした。この回路は正帰還とエネルギー・ポンプとして三極管を使い、同調回路の共振周波数で決まる正弦波を出力する。1912年頃、何人かが独立にこの回路を発明した。特にフェッセンデン (Reginald A. Fessenden)、マイスナー (Alexander Meissner)、ラウンド (H. J. Round) およびド・フォーレ (Lee de Forest) が有名だが、アームストロング (Edwin H. Armstrong) (a) とコルピッツ (Edwin Colpitts) (b) (同様な回路はハートレー: R. V. L. Hartley が考案した) による回路方式が初期には最も広く使われた。



歴史に残る回路, 日経エレクトロニクスブック, 1980



$$v = M \frac{di_a}{dt} + L \frac{di}{dt} + ri$$

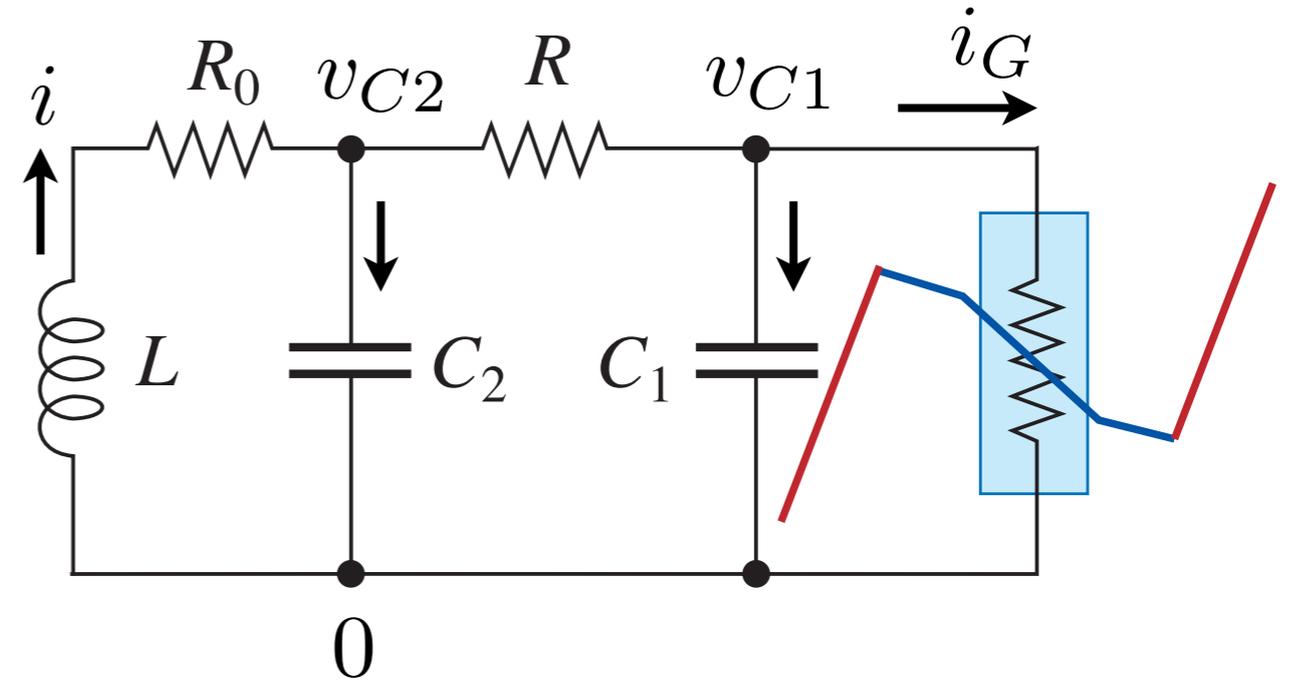
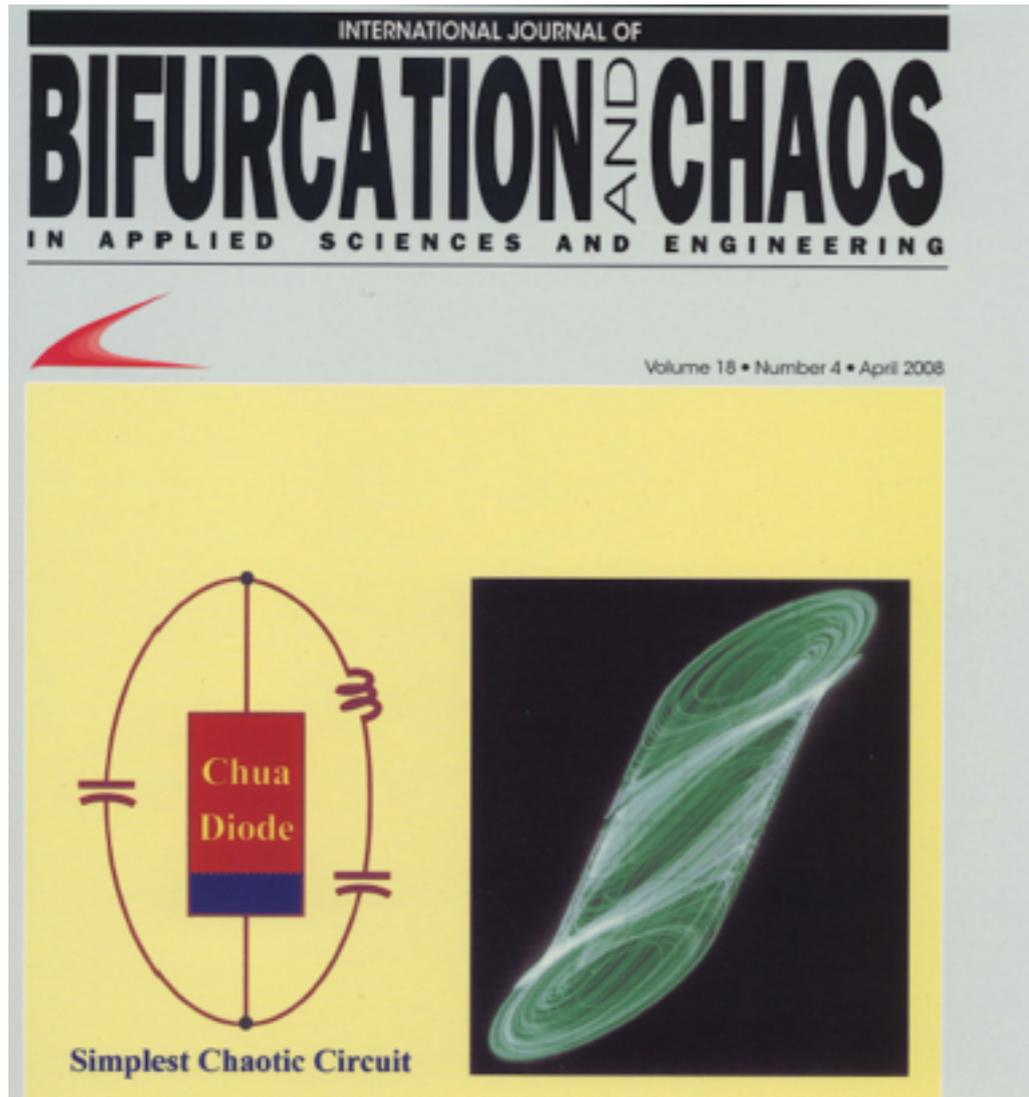
$$i + C \frac{dv}{dt} = 0$$

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + [rC - Mg'(v)] \frac{dv}{dt} + v = 0$$

ポントリャーギン，木村俊房校閲，千葉克裕訳：常微分方程式，第5章，共立出版



Chua 回路



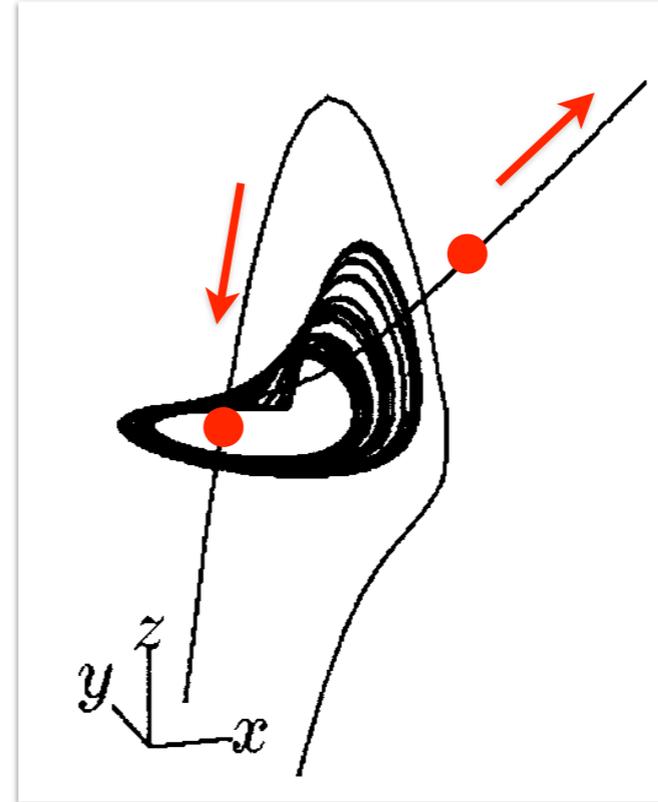
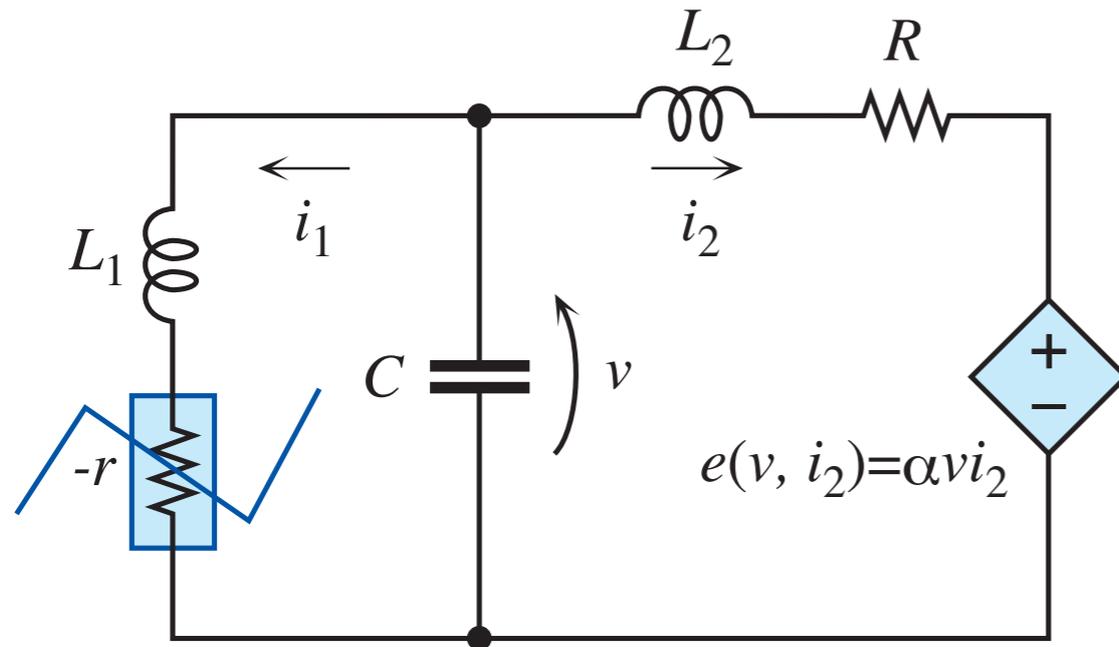
$$v_{C2} = R \left[C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} + g(v_{C1}) \right] + v_{C1}$$

$$v_{C2} + R_0 i + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} + \frac{v_{C2} - v_{C1}}{R} = i$$



Rössler 回路



$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay$$

$$\frac{dz}{dt} = bx - cz + xz$$

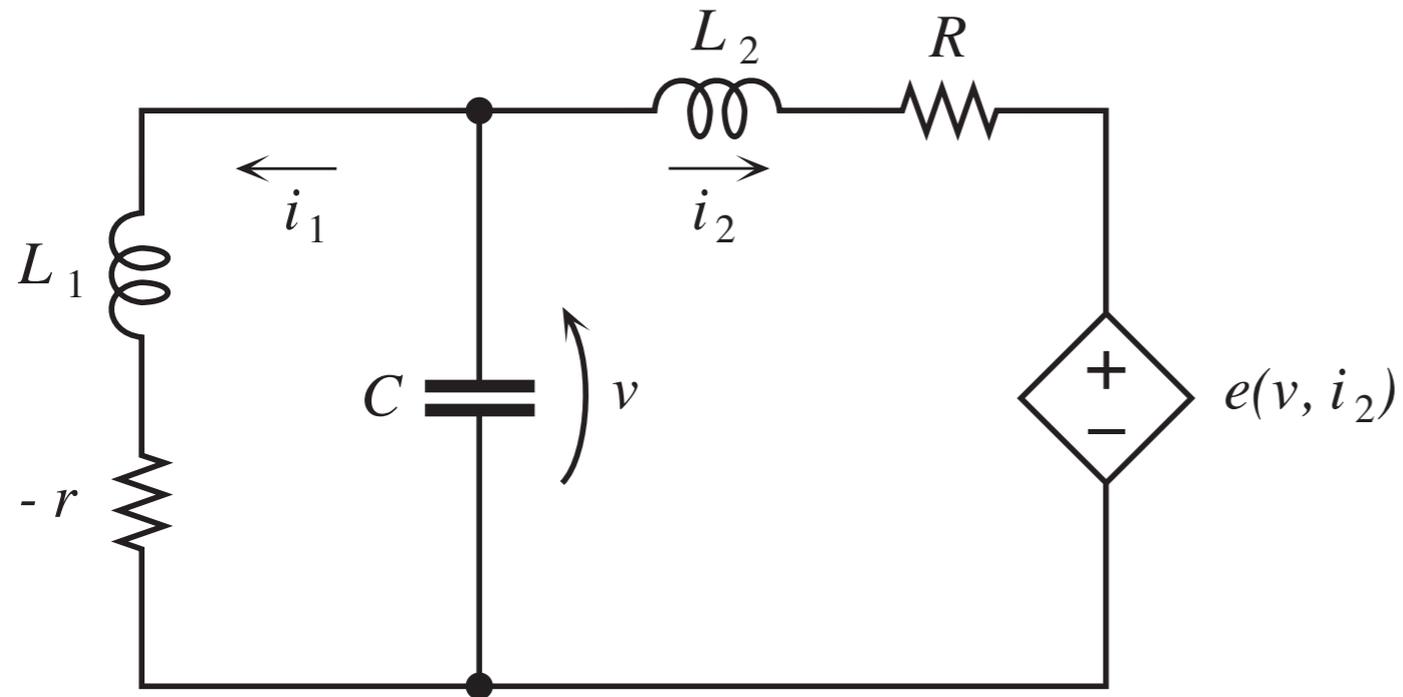
$$C \frac{dv}{dt} = -i_1 - i_2$$

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = v + ri_1$$

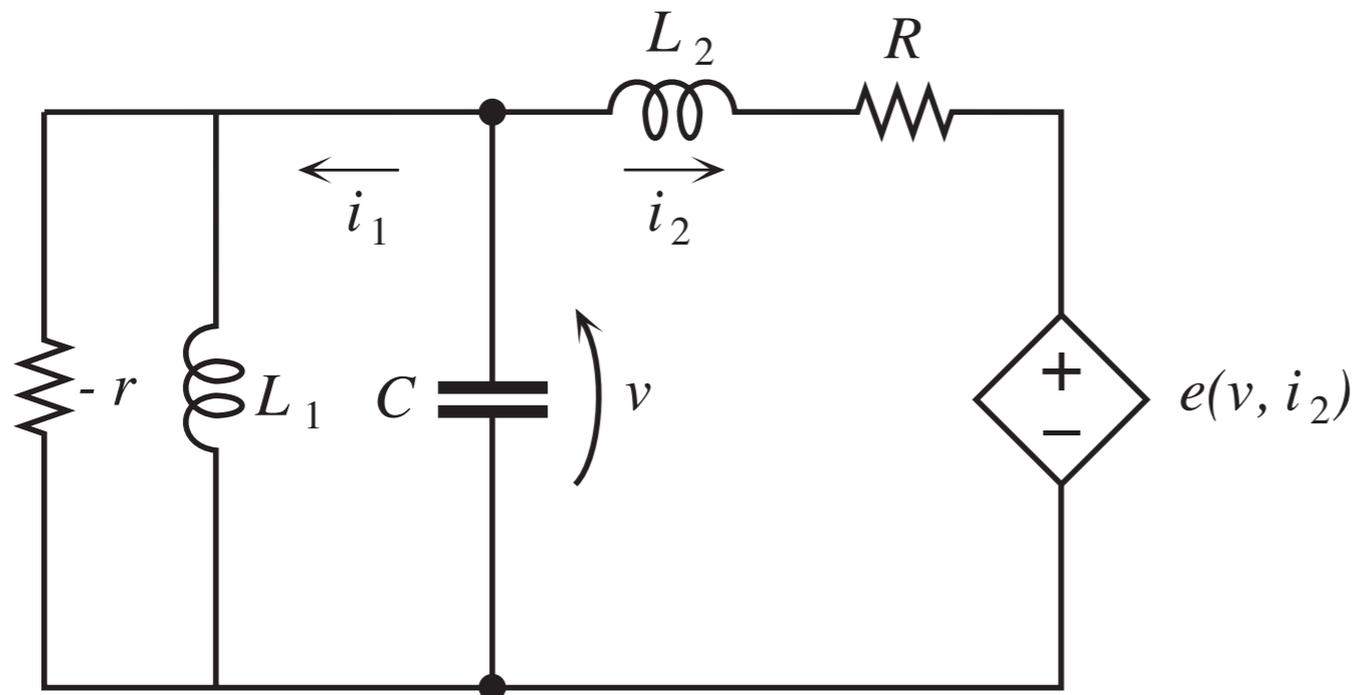
$$L_2 \frac{di_2}{dt} = v - Ri_2 + e(v, i_2)$$



Rössler 回路：役に立つのか



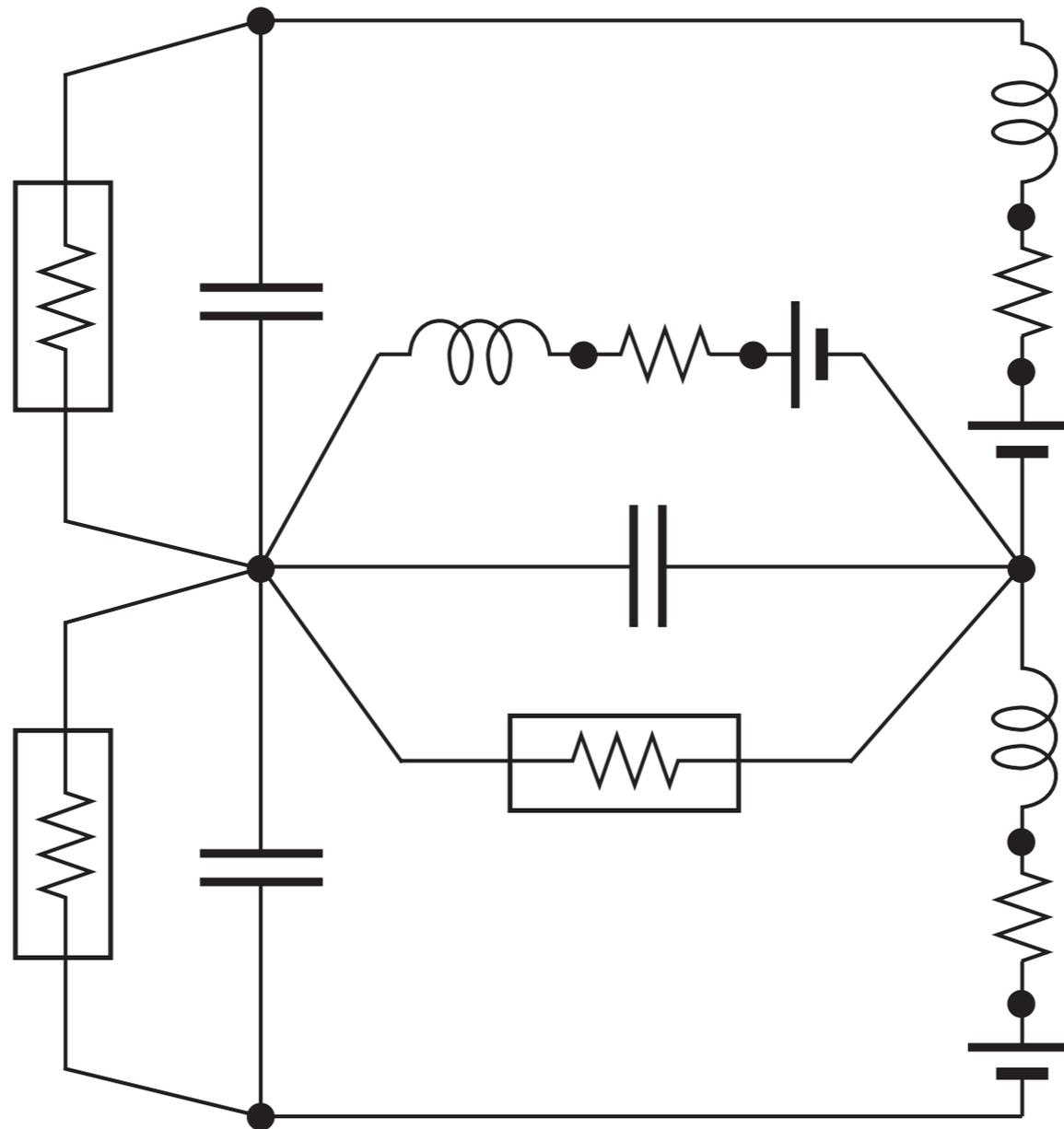
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= bx - cz + xz\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\dot{x} &= gx - y - z \\ \dot{y} &= x \\ \dot{z} &= bx - cz + xz\end{aligned}$$

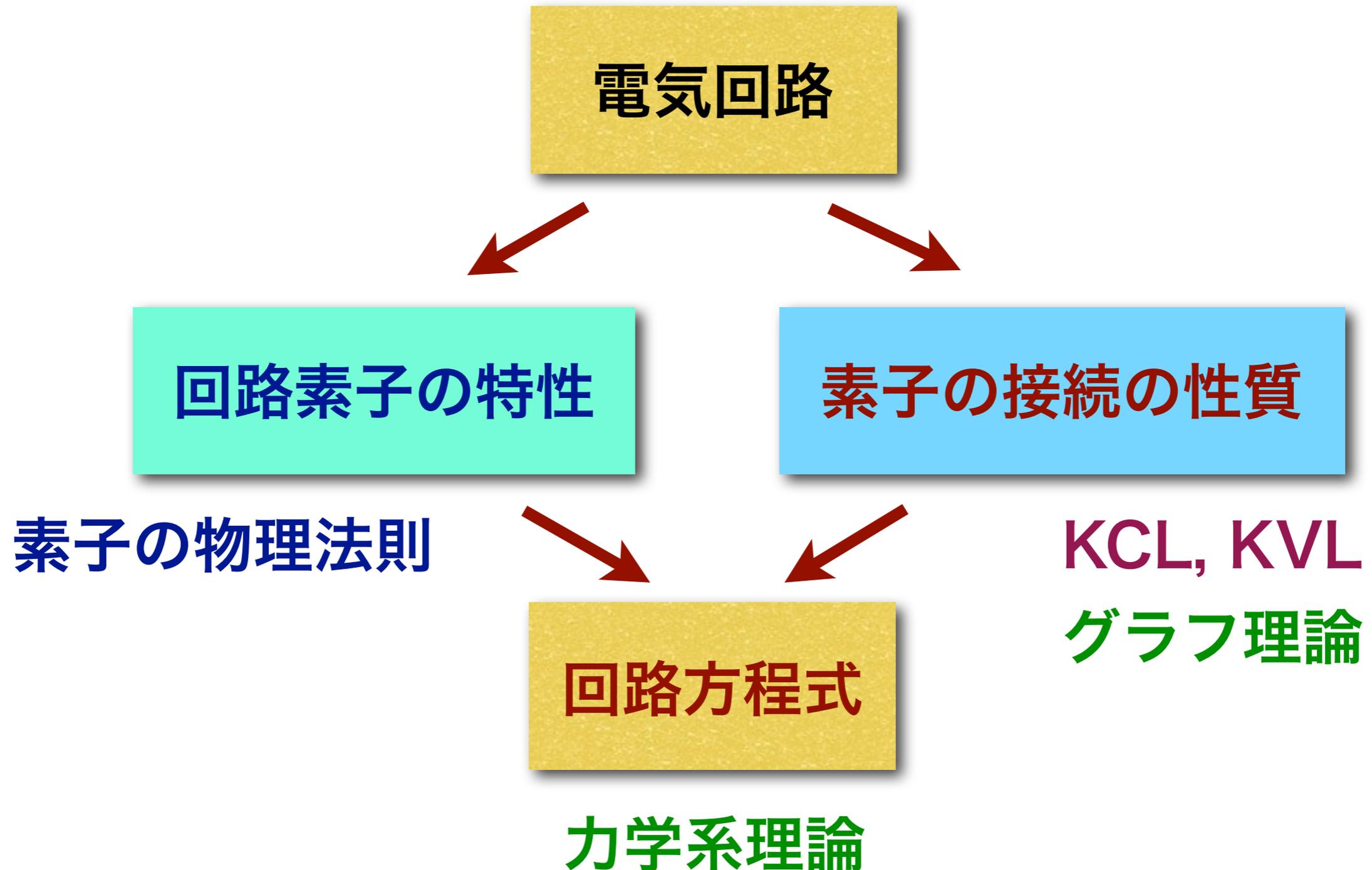


回路方程式は？



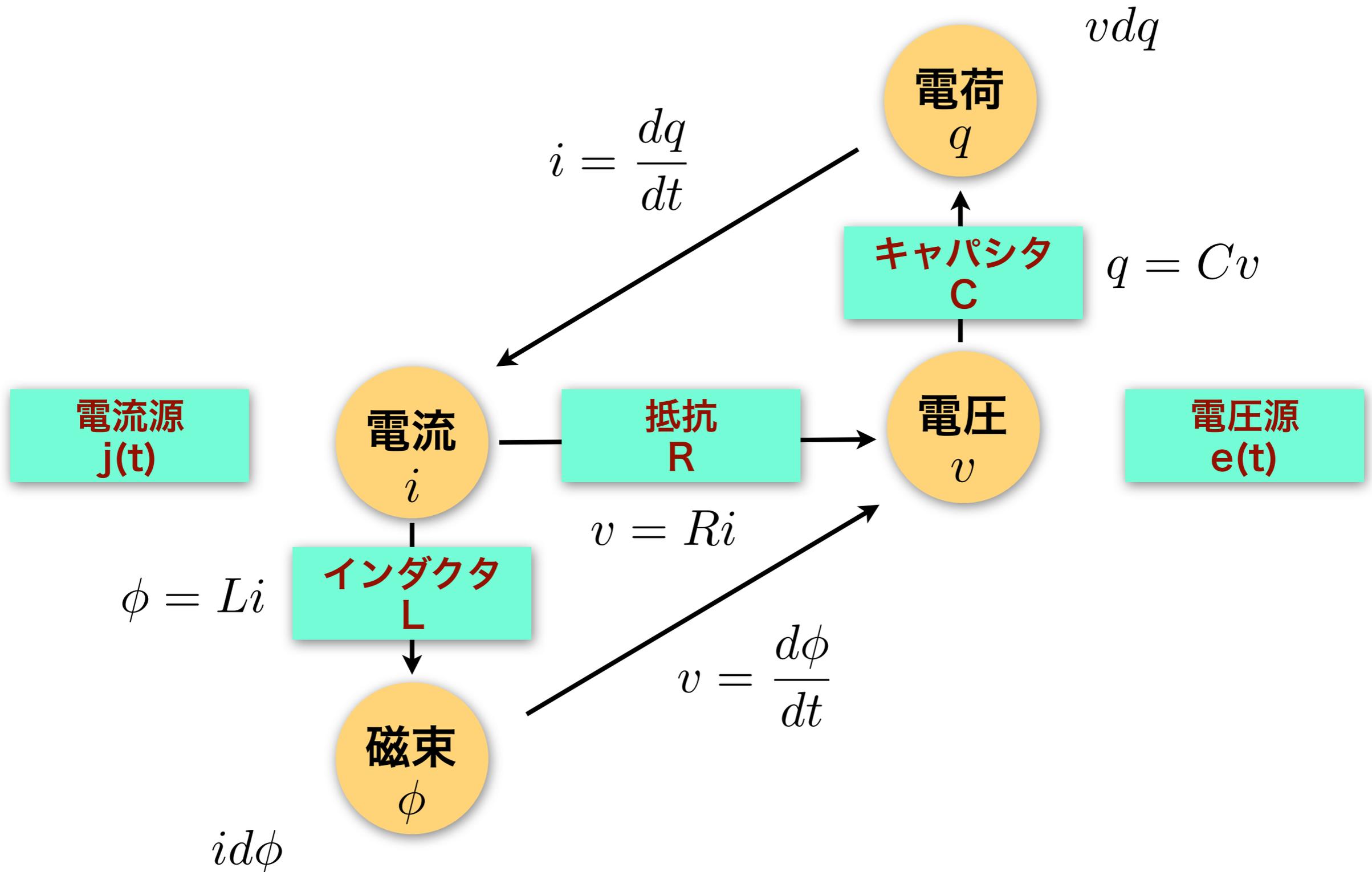


1.3 回路方程式を得る方法



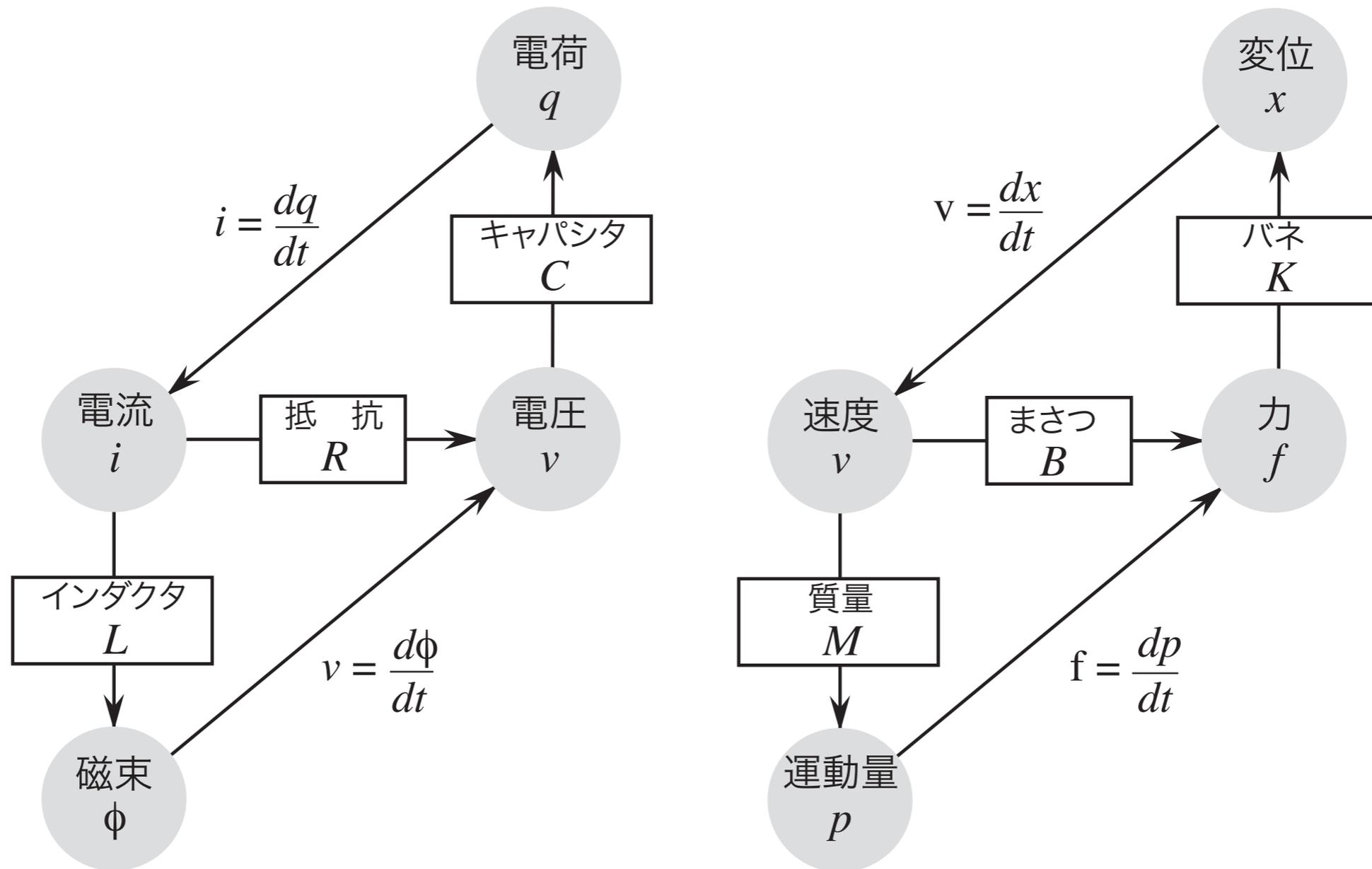


3つの基本素子と4つの物理量





analogy





1. はじめに：Kirchhoffの法則

1.4 回路とそのグラフ

1.5 グラフの木と補木

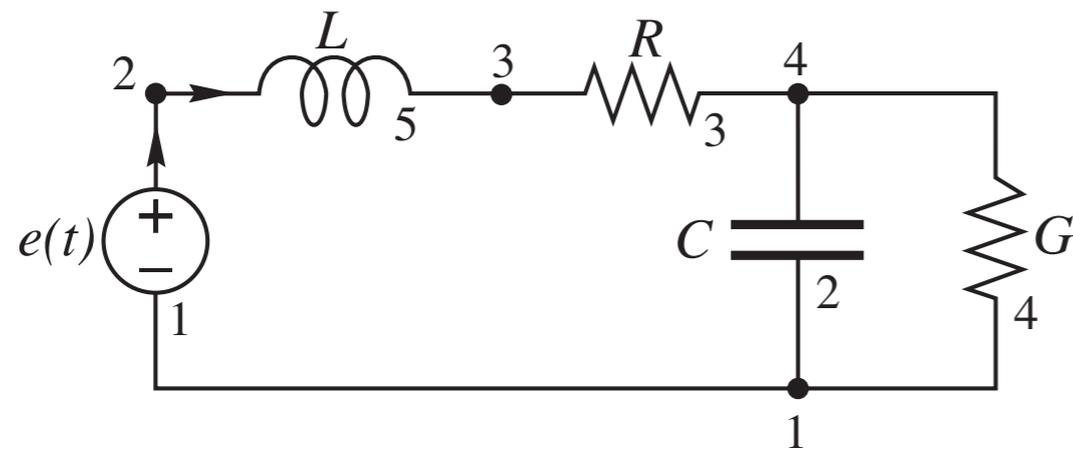
1.6 基本カットセットと基本ループ

1.7 KCLとKVL

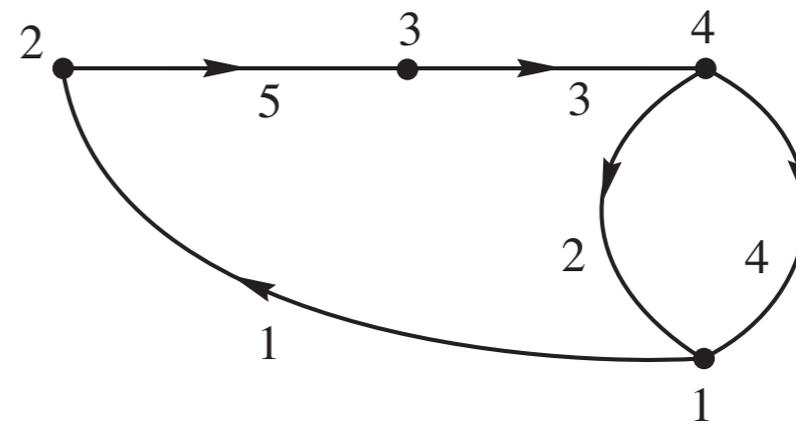
1.8 Tellegenの定理



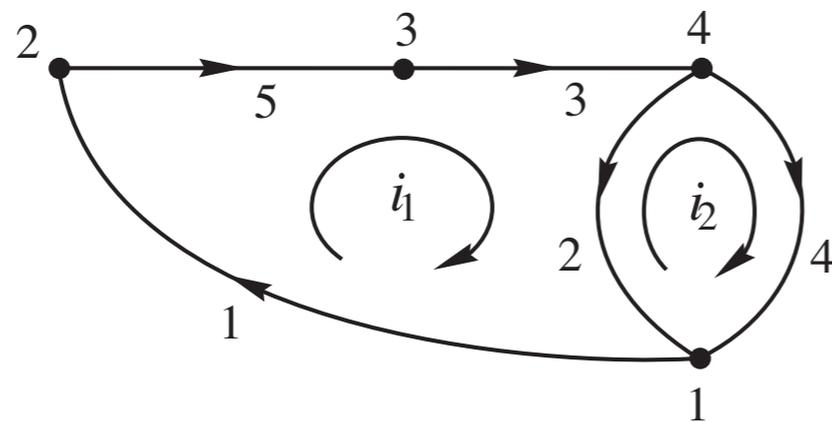
1.4 回路とそのグラフ



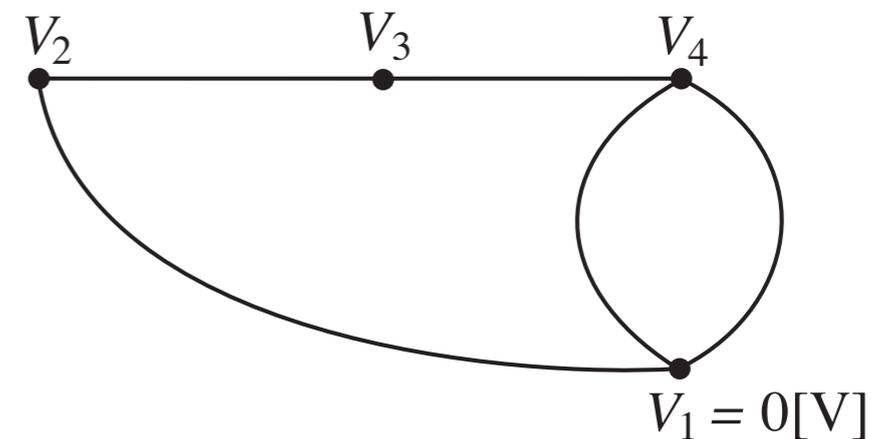
(a)



(b)



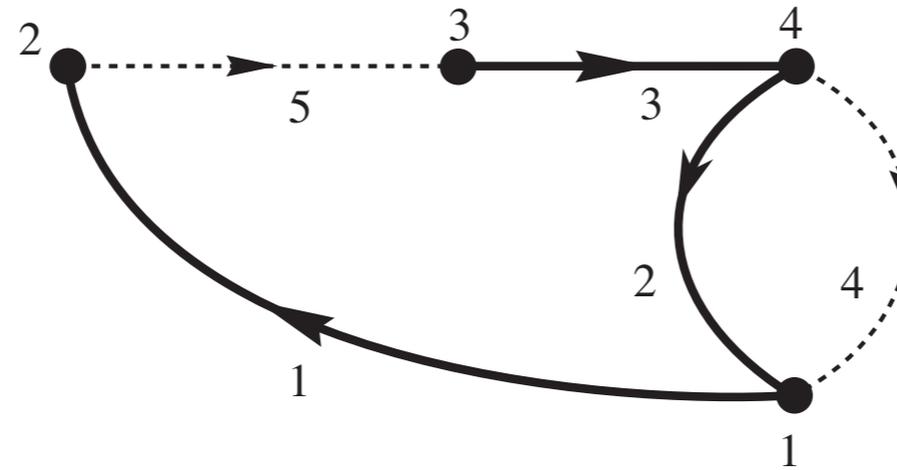
(c)



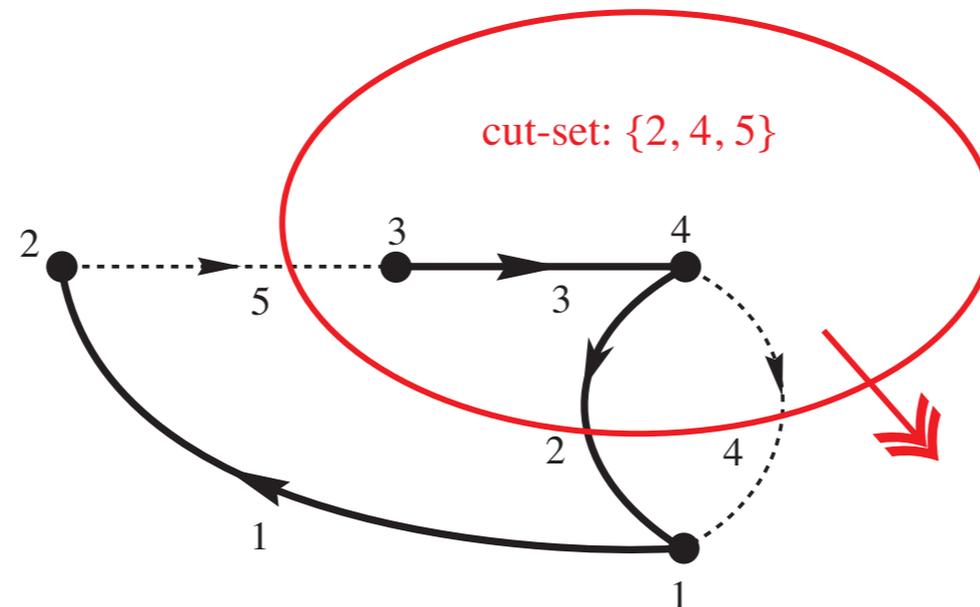
(d)



1.5 グラフの木と補木



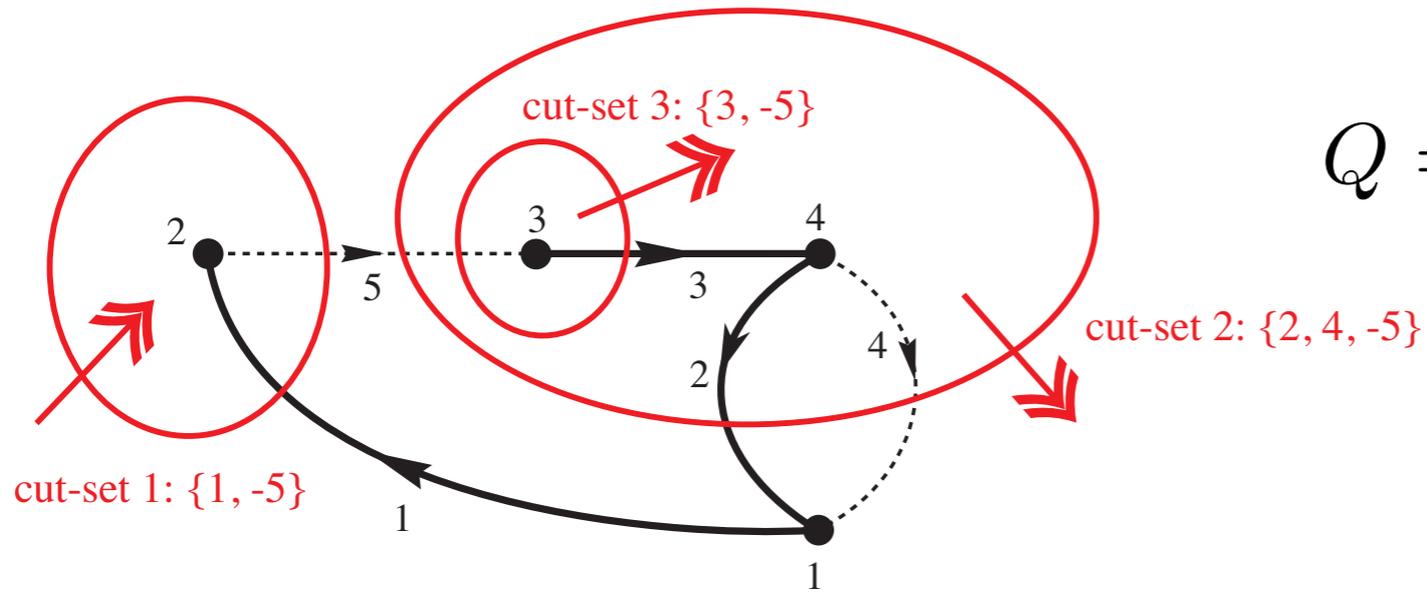
n_n 個の節点を最も少ない個数の枝で結ぶ。この枝集合を木(tree)という。
残った枝集合を補木(cotree)という。



グラフの枝にハサミを入れ、節点集合を2つの部分集合に分割する。
このときハサミを入れた枝集合をカット・セット(cut-set)という。

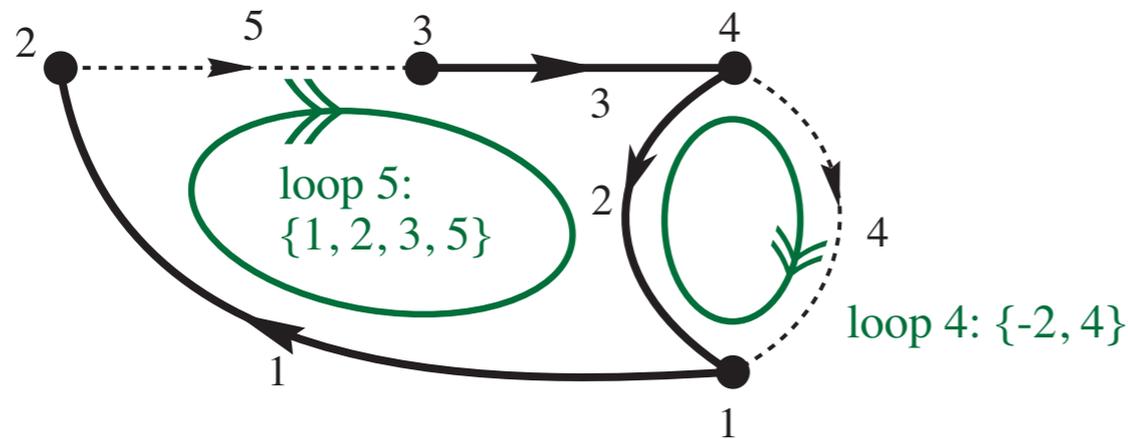


1.6 基本カットセットと基本ループ



$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q = [I_\rho \quad F]$$



$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$B = [-F^T \quad I_\mu]$$



1.7 KCLとKVL

$$i = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_{n_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_t \\ \cdots \\ i_\ell \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_t \\ \cdots \\ v_\ell \end{bmatrix}$$

Kirchhoff's Current Law(KCL)

$$Qi = 0$$

$$Qi = [I_\rho \quad F]i = i_t + Fi_\ell = 0$$

$$i_t = -Fi_\ell$$

Kirchhoff's Voltage Law(KVL)

$$Bv = 0$$

$$Bv = [-F^T \quad I_\mu]v = -F^T v_t + v_\ell = 0$$

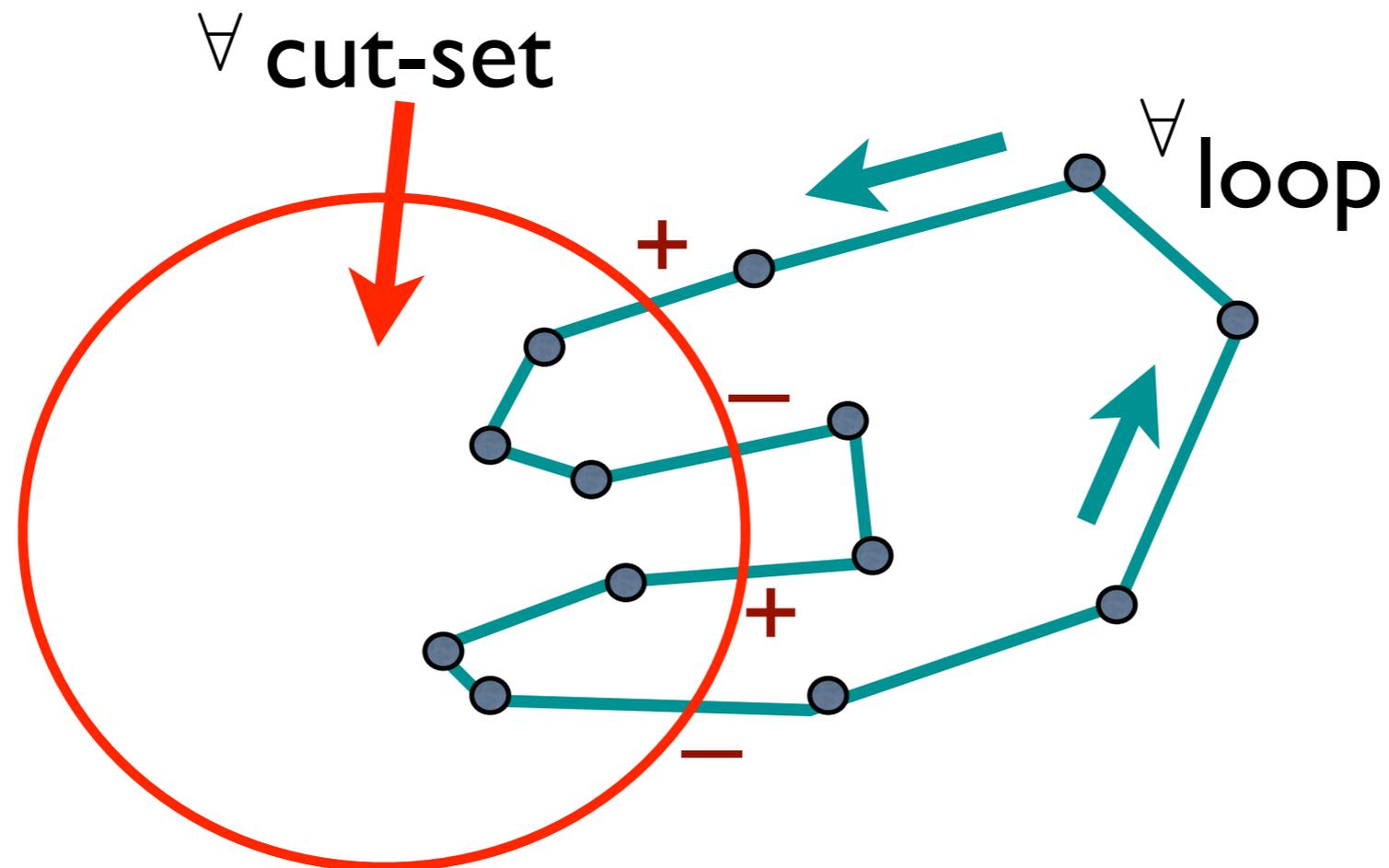
$$v_\ell = F^T v_t$$



1.8 Tellegenの定理

$$v^T i = 0 \Leftrightarrow Q^T B = 0, B^T Q = 0$$

$$v^T di = 0, dv^t i = 0$$





Tellegenの定理の応用

$$v^T i = v_L^T i_L + v_C^T i_C + v_R^T i_R = 0$$

$$W_L(\phi) = \int v_L^T i_L dt = \int \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^T i_L dt = \int i_L^T d\phi = \frac{1}{2} \phi^T L^{-1} \phi$$

$$W_C(q) = \int v_C^T i_C dt = \int v_C^T \left(\frac{dq}{dt} \right) dt = \int v_C^T dq = \frac{1}{2} q^T C^{-1} q$$

$$\frac{d}{dt} (W_L + W_C) = -v_R^T i_R$$

$$\omega = v^T di = v_L^T di_L + v_C^T di_C + v_R^T di_R = 0$$

$$\begin{aligned} \omega &= v_L^T di_L - i_C^T dv_C + d(v_C^T i_C) + v_R^T di_R \\ &= v_L^T di_L - i_C^T dv_C + dP(i_L, v_C) = 0 \end{aligned}$$



2. 状態の拘束条件と接続の関係



2. 状態の拘束条件と接続の関係

$$Q \begin{bmatrix} i_C \\ v_R \\ i_L \end{bmatrix} = 0$$

$$B \begin{bmatrix} v_C \\ v_R \\ v_L \end{bmatrix} = 0$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$v_R = Ri_R$$

$$C \frac{dv_C}{dt} = g(v_C, i_L)$$

$$L \frac{di_L}{dt} = f(v_C, i_L)$$



接続による状態の拘束

保存則

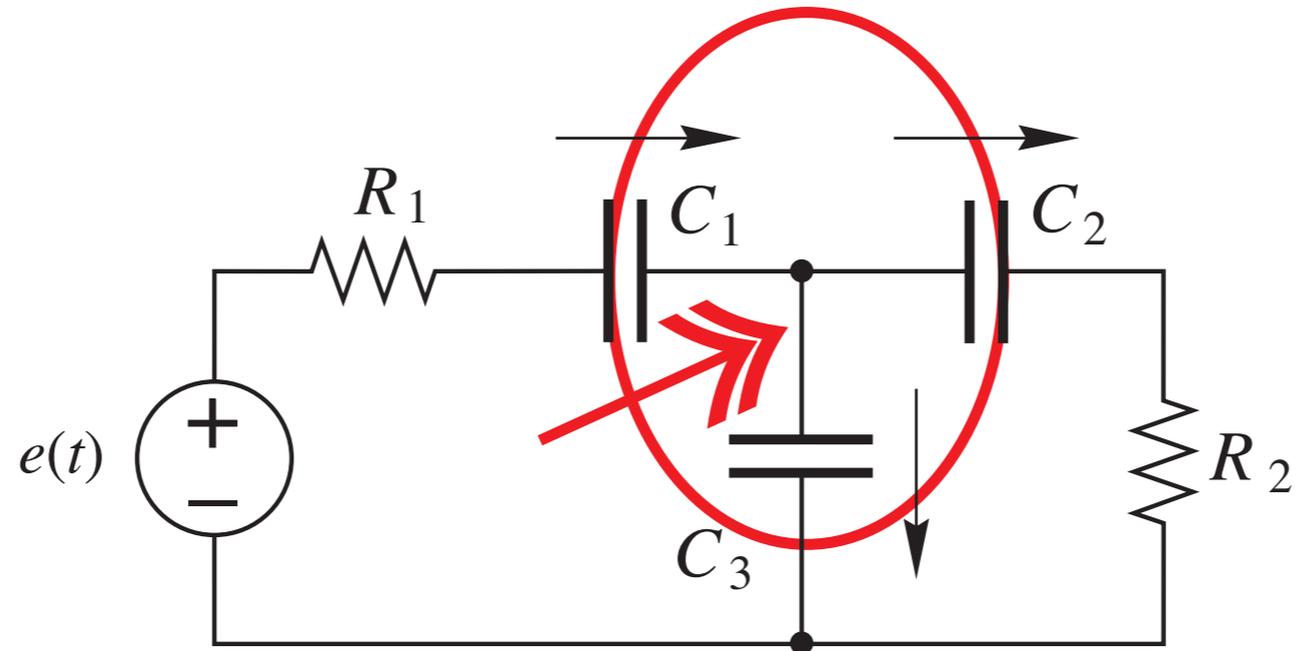
- (a) キャパシタのみからなるカットセット
- (b) インダクタのみからなるループ

強制退化

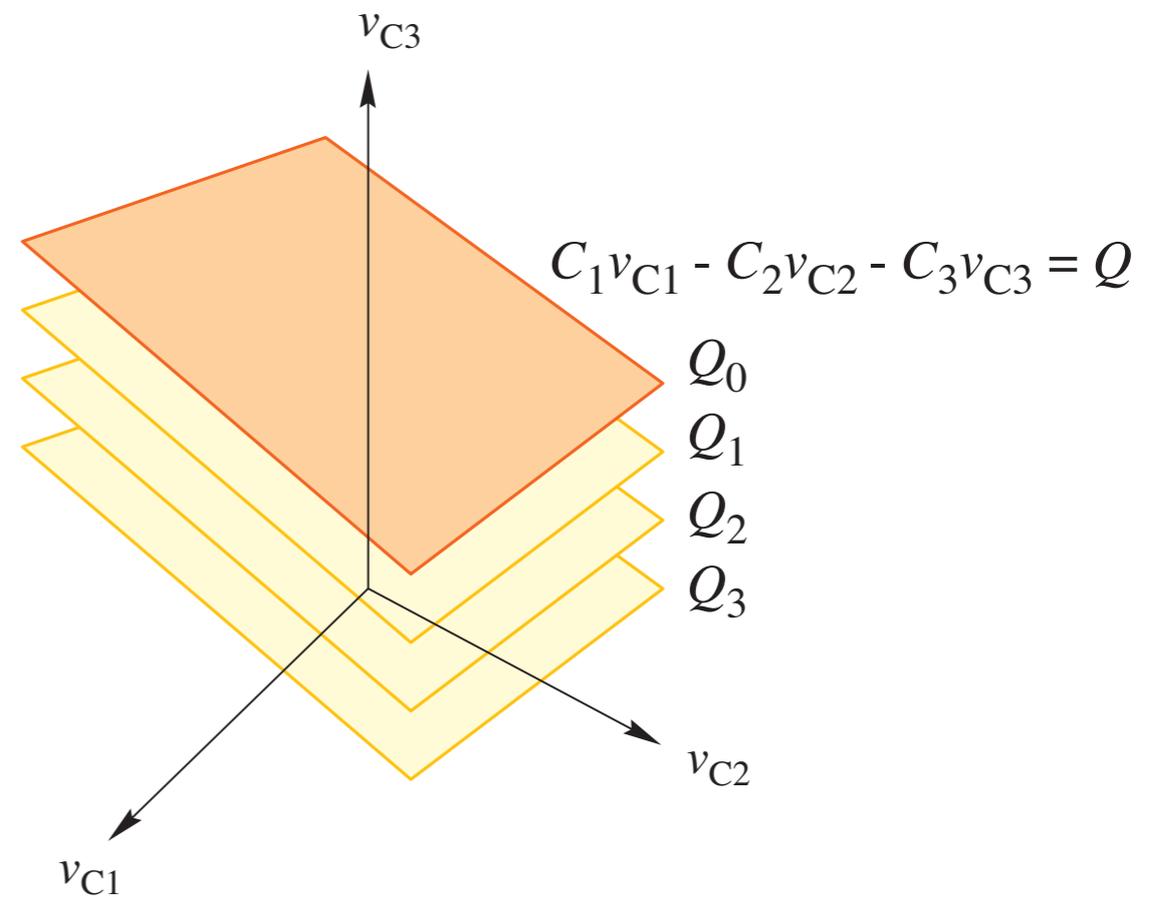
- (c) キャパシタのみからなるループ
- (d) インダクタのみからなるカットセット



(a) キャパシタのみからなるカットセット

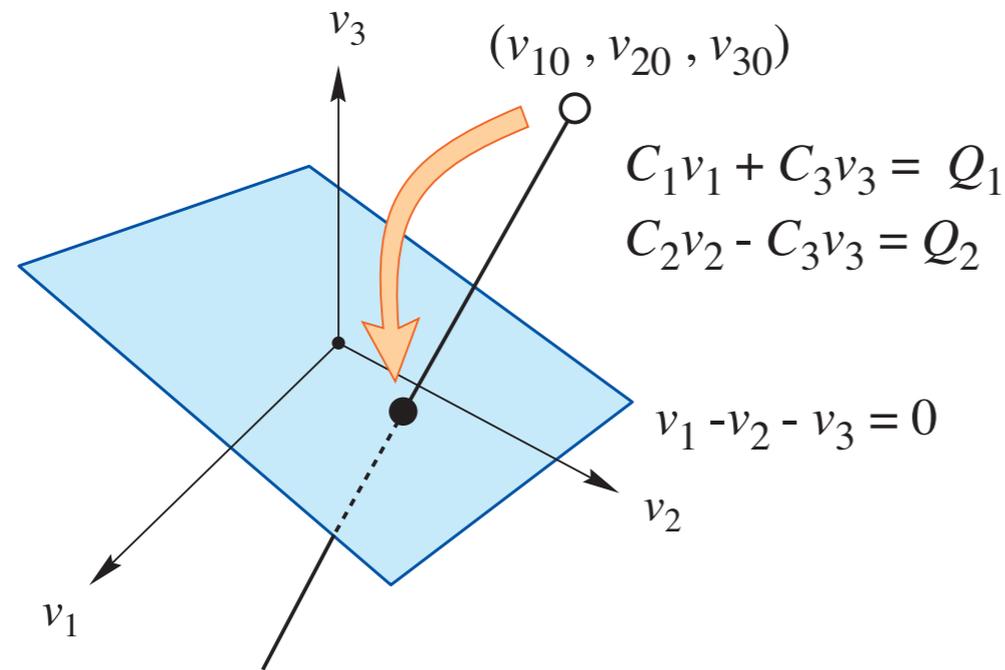
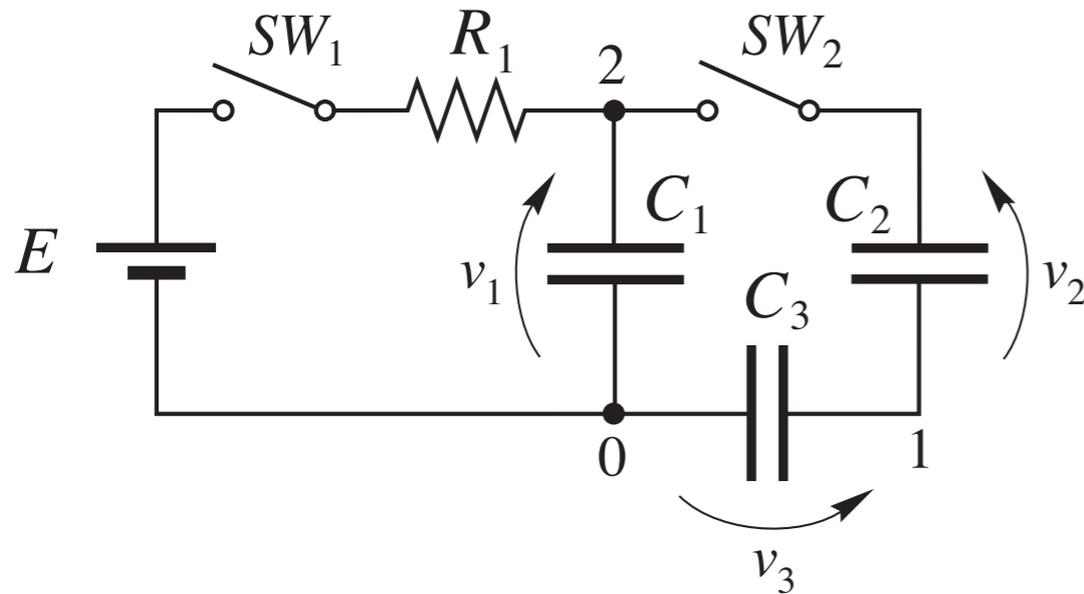


$$C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} - C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} - C_3 \frac{dv_{C3}}{dt} = 0$$





(c) キャパシタのみからなるループ



$$C_1 \frac{dv_1}{dt} + C_3 \frac{dv_3}{dt} + i_E = 0$$

$$C_1 \frac{d}{dt} [\{v_1(0_+) - v_1(0_-)\} u(t)]$$

$$+ C_3 \frac{d}{dt} [\{v_3(0_+) - v_3(0_-)\} u(t)] + i_E = 0$$

$$C_1 [\{v_1(0_+) - v_1(0_-)\} \delta(t)]$$

$$+ C_3 [\{v_3(0_+) - v_3(0_-)\} \delta(t)] + i_E = 0$$

$$C_1 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \{v_1(0_+) - v_1(0_-)\} \delta(t) dt$$

$$+ C_3 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \{v_3(0_+) - v_3(0_-)\} \delta(t) dt + i_E = 0$$

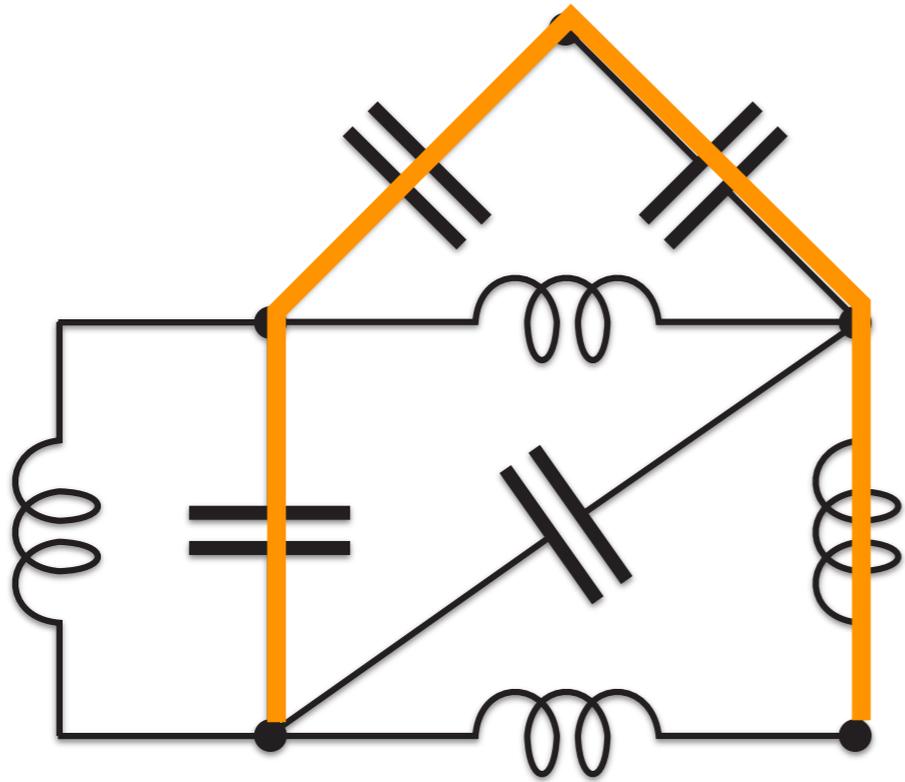
$$C_1 \{v_1(0_+) - v_1(0_-)\}$$

$$+ C_3 \{v_3(0_+) - v_3(0_-)\} + 2\epsilon i_E = 0$$

電荷の移動がおこる素子以外は関係しない：開放除去



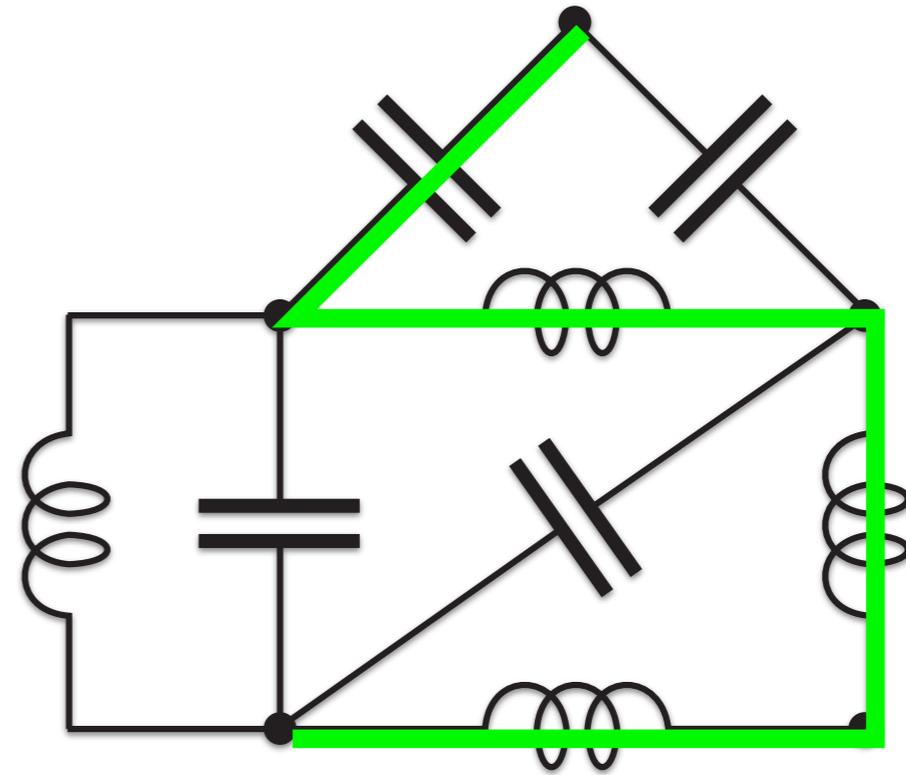
保存則と強制退化の数を知る方法



木枝：Cをできるだけ多く
補木枝：Lをできるだけ多く

Cのループ；Lのカットセット

強制退化



木枝：Lをできるだけ多く
補木枝：Cをできるだけ多く

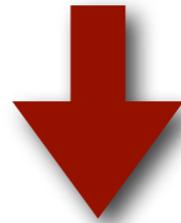
Lのループ；Cのカットセット

保存則



C-基準木(normal tree) : 強制退化を検出

1. 電圧源は木枝に, 電流源は補木枝に含ませる
2. キャパシタをできるだけ多く木枝に,
インダクタをできるだけ多く補木枝に含ませる



1. 補木枝キャパシタの数だけキャパシタと電圧源のみのループが,
木枝インダクタの数だけインダクタと電流源のみのカットセット
が存在する

強制退化

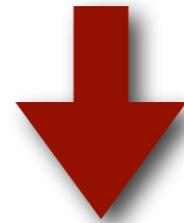
2. キャパシタのみのカットセットや, インダクタのみのループは
検出できない

保存則



L-基準木(normal tree) : 保存則を検出

1. 電圧源は木枝に, 電流源は補木枝に含ませる
2. インダクタをできるだけ多く木枝に,
キャパシタをできるだけ多く補木枝に含ませる



1. 補木枝インダクタの数だけインダクタと電圧源のみのループが,
木枝キャパシタの数だけキャパシタと電流源のみのカットセット
が存在する
保存則

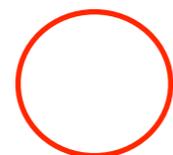
2. インダクタのみのカットセットや, キャパシタのみのループは
検出できない
強制退化



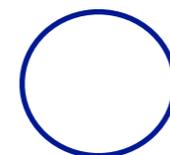
微分方程式の階数 = #C1 + #L1

表1 CL 基準木の木枝・補木枝に属する各素子の数

素子	C 基準木				素子の総数
	木枝		補木枝		
独立電圧源		n_V			n_V
キャパシタ	n_{C1}	n_{C2}		n_S	$n_C = n_{C1} + n_{C2} + n_S$
抵抗	n_{G1}	n_{G2}	n_{R1}	n_{R2}	$n_R = n_{G1} + n_{G2} + n_{R1} + n_{R2}$
インダクタ		n_Γ	n_{L1}	n_{L2}	$n_L = n_\Gamma + n_{L1} + n_{L2}$
独立電流源				n_I	n_I
	補木枝	木枝		補木枝	
	L 基準木				



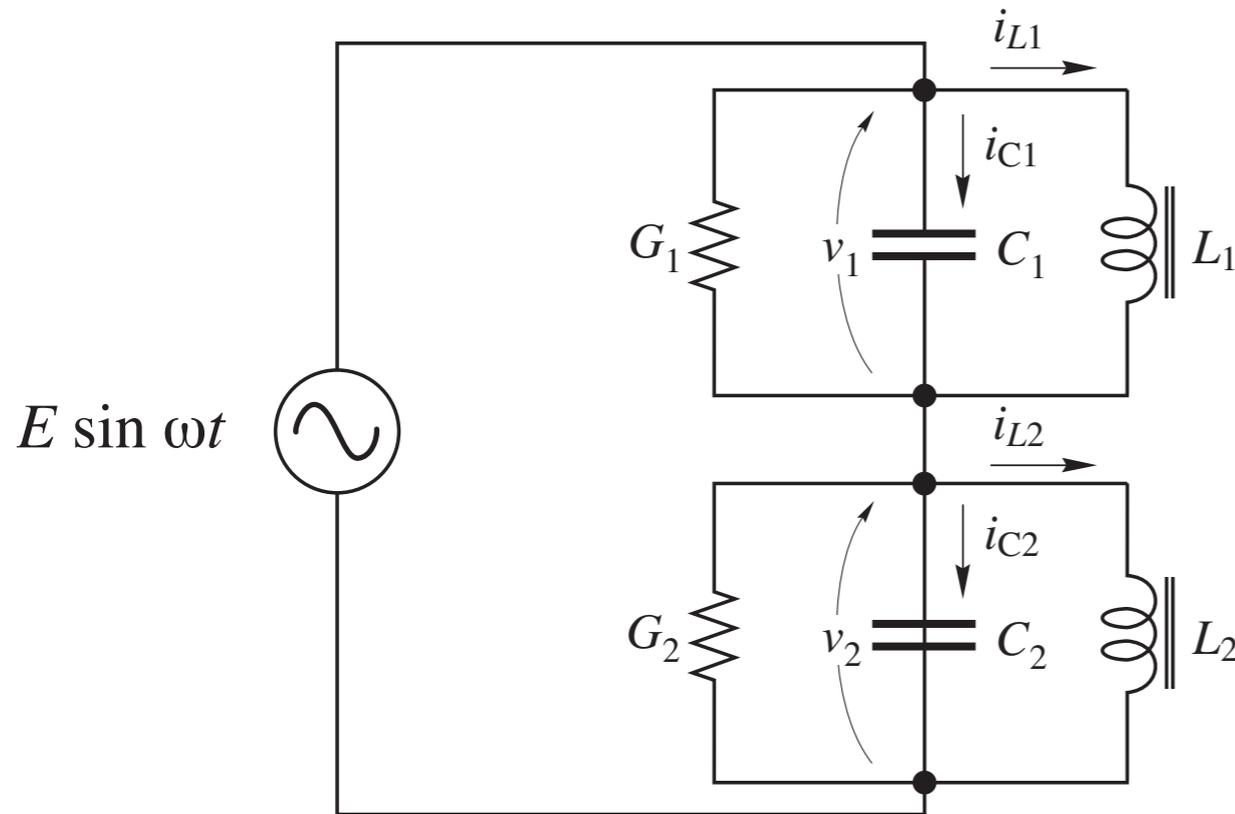
強制退化



保存則



パラメータ励振回路



$$v_1 + v_2 = E \sin \omega t$$

$$\frac{d\phi_1}{dt} + \frac{d\phi_2}{dt} = E \sin \omega t$$

$$\phi_1 + \phi_2 = -\frac{E}{\omega} \cos \omega t$$

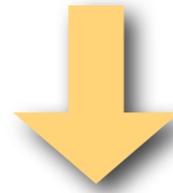
$$x = \phi_1 - \phi_2$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + (\alpha + \beta \cos 2\omega t)x + x^3 = 0$$



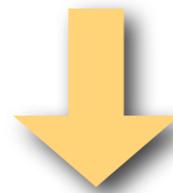
C-標準木(proper tree)

接続による保存則や強制退化の無い回路



1. 電圧源は木枝に, 電流源は補木枝に含ませる
2. キャパシタをすべて木枝に,
インダクタをすべて補木枝に含ませる

C-proper tree



抵抗素子を適切に付加して保存則や強制退化の無い回路を構成可能

