第２回力学系理論と制御理論の融合に関する合宿研究会

電気回路の状態方程式

ー 系統的に求めるには ー

会場：晴海グランドホテル

川上　博

2011/05/13

あらすじ

1. はじめに：簡単な回路例とKirchhoffの法則
   ３０分
2. 状態の拘束条件と接続の関係
   ３０分
3. Proper treeのある回路の回路方程式
   ３０分
4. Mixed potential による回路方程式の記述
   ３０分

3． Proper treeのある回路の回路方程式

標準木に関するKCLとKVL

表１　回路素子とその枝電圧，枝電流および個数

素子名	電圧	電流	個数
木枝独立電圧源 (V)	v_V	i_V	n_V
木枝キャパシタ (C)	v_C	i_C	n_C
木枝抵抗 (G)	v_G	i_G	n_G
補木枝抵抗 (R)	v_R	i_R	n_R
補木枝インダクタ (L)	v_L	i_L	n_L
補木枝独立電流源 (I)	v_I	i_I	n_I

$$Qi = [I\ F]i = 0$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & F_{VR} & F_{VL} & F_{VI} \\ 0 & I & 0 & F_{CR} & F_{CL} & F_{CI} \\ 0 & 0 & I & F_{GR} & F_{GL} & F_{GI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_V \\ i_C \\ i_G \\ i_R \\ i_L \\ i_I \end{bmatrix} = 0$$

$$i_V + F_{VR} i_R + F_{VL} i_L + F_{VI} i_I = 0$$ 電圧源の電流

$$i_C + F_{CR} i_R + F_{CL} i_L + F_{CI} i_I = 0$$ キャパシタの電流

$$i_G + F_{GR} i_R + F_{GL} i_L + F_{GI} i_I = 0$$ 木枝抵抗の電流

$$Bv = [-F^T \ I]v = 0$$

$$\begin{bmatrix} -F_{VR}^T & -F_{CR}^T & -F_{GR}^T & I & 0 & 0 \\ -F_{VL}^T & -F_{CL}^T & -F_{GL}^T & 0 & I & 0 \\ -F_{VI}^T & -F_{CI}^T & -F_{GI}^T & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_V \\ v_C \\ v_G \\ v_R \\ v_L \\ v_I \end{bmatrix} = 0$$

$$-F_{VR}^T v_V - F_{CR}^T v_C - F_{GR}^T v_G + v_R = 0$$ 補木枝の抵抗

$$-F_{VL}^T v_V - F_{CL}^T v_C - F_{GL}^T v_G + v_L = 0$$ インダクタの電圧

$$-F_{VI}^T v_V - F_{CI}^T v_C - F_{GI}^T v_G + v_I = 0$$ 電流源の電圧

状態方程式，出力方程式

出力方程式

$$i_V + F_{VR} i_R + F_{VL} i_L + F_{VI} i_I = 0$$

$$-F_{VI}^T v_V - F_{CI}^T v_C - F_{GI}^T v_G + v_I = 0$$

状態方程式

$$i_C + F_{CR} i_R + F_{CL} i_L + F_{CI} i_I = 0$$

$$-F_{VL}^T v_V - F_{CL}^T v_C - F_{GL}^T v_G + v_L = 0$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

抵抗特性

$$i_G + F_{GR} i_R + F_{GL} i_L + F_{GI} i_I = 0$$

$$-F_{VR}^T v_V - F_{CR}^T v_C - F_{GR}^T v_G + v_R = 0$$

$$i_G = G_G v_G$$

$$v_R = R_R i_R$$

完全回路(complete circuit)

抵抗特性

$$i_G + F_{GR} i_R + F_{GL} i_L + F_{GI} i_I = 0 \qquad v_G = R_G i_G$$

$$-F_{VR}^T v_V - F_{CR}^T v_C - F_{GR}^T v_G + v_R = 0 \qquad i_R = G_R v_R$$

$$F_{GR} = 0$$

$$i_G + F_{GL} i_L + F_{GI} i_I = 0 \qquad v_G = f(i_G)$$

$$-F_{VR}^T v_V - F_{CR}^T v_C + v_R = 0 \qquad i_R = g(v_R)$$

状態方程式

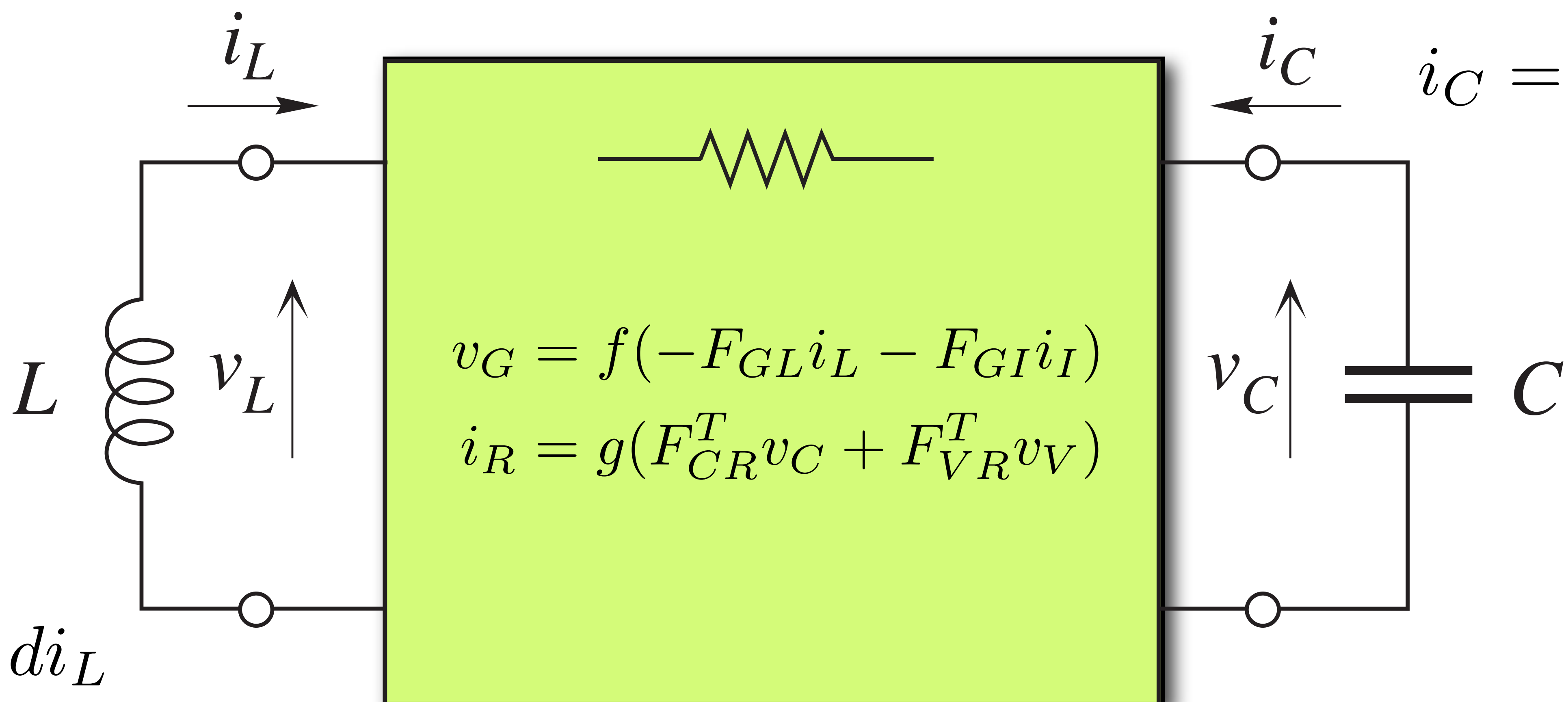
$$i_C + F_{CR} i_R + F_{CL} i_L + F_{CI} i_I = 0$$

$$-F_{VL}^T v_V - F_{CL}^T v_C - F_{GL}^T v_G + v_L = 0$$

$$i_G + F_{GL} i_L + F_{GI} i_I = 0 \qquad v_G = f(i_G)$$

$$-F_{VR}^T v_V - F_{CR}^T v_C + v_R = 0 \qquad i_R = g(v_R)$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$



$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$i_C + F_{CR} i_R + F_{CL} i_L + F_{CI} i_I = 0$$

$$-F_{VL}^T v_V - F_{CL}^T v_C - F_{GL}^T v_G + v_L = 0$$

状態方程式の導出：手順

完全回路

↓

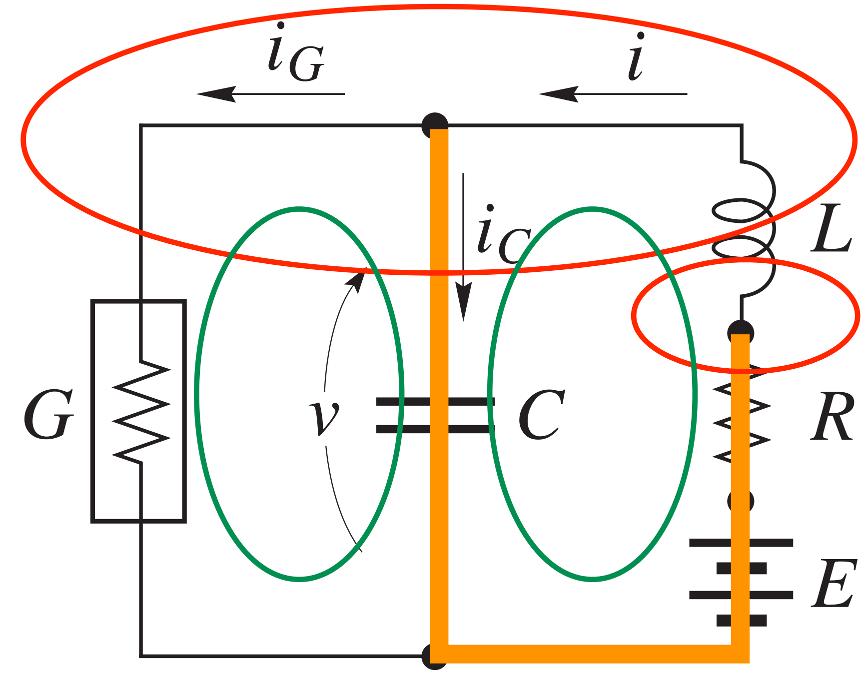
C-標準木

↓

抵抗部分回路

↓

C, L 部分回路



$$C:\ i_C + i_G - i = 0$$
$$R:\ i_R - i = 0$$
$$G:\ -v + v_G = 0$$
$$L:\ -E + v + v_R + v_L = 0$$

$$v_R = Ri$$
$$i_G = g(v)$$

$$i_C = i - i_G = i - g(v)$$
$$v_L = -v_R - v + E = -Ri - v + E$$

完全回路(complete circuit)

$$F_{GR} = 0$$

$$i_G + F_{GL} i_L + F_{GI} i_I = 0 \qquad v_G = f(i_G)$$

$$-F_{VR}^T v_V - F_{CR}^T v_C + v_R = 0 \qquad i_R = g(v_R)$$

$$\boxed{F_{GR} = 0,\ F_{GI} = 0,\ F_{VR}^T = 0}$$

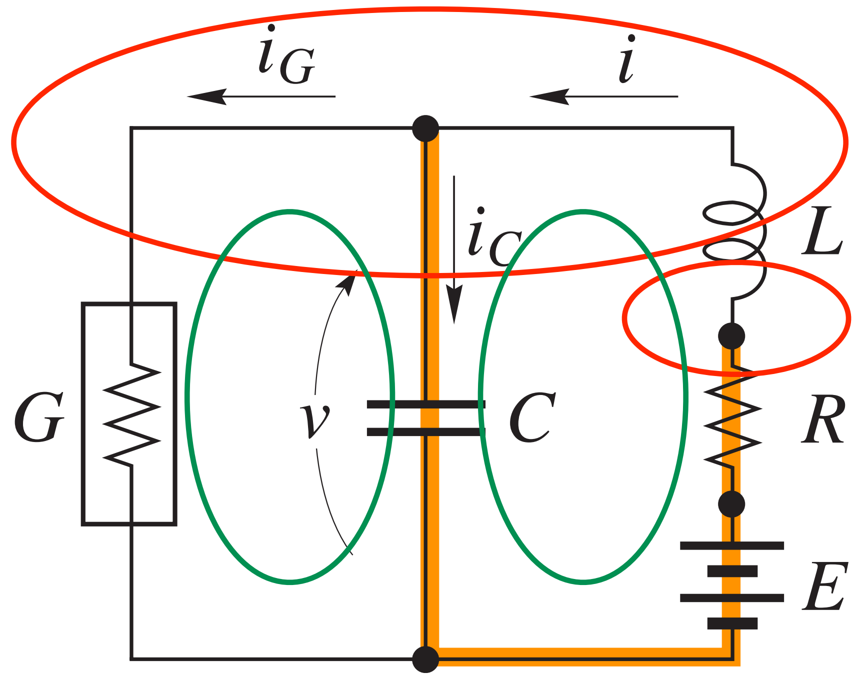
$$i_G + F_{GL} i_L = 0 \qquad v_G = f(i_G)$$

$$v_R - F_{CR}^T v_C = 0 \qquad i_R = g(v_R)$$

状態方程式

$$i_C + F_{CR} i_R + F_{CL} i_L + F_{CI} i_I = 0$$

$$-F_{VL}^T v_V - F_{CL}^T v_C - F_{GL}^T v_G + v_L = 0$$



$$C: \ i_C + i_G - i = 0$$
$$R: \ i_R - i = 0 \qquad v_R = Ri$$
$$G: \ -v + v_G = 0 \qquad i_G = g(v)$$
$$L: \ -E + v + v_R + v_L = 0$$

$$i_C = i - i_G = i - g(v)$$
$$v_L = -v_R - v + E = -Ri - v + E$$

$$\omega = v^T di = 0$$

$$\omega = v^T di = v_V^T di_V + v_C^T di_C + v_G^T di_G + v_R^T di_R + v_L^T di_L + v_I^T di_I$$

$$= (v_L^T di_L - i_C^T dv_C) + (v_G^T di_G - i_R^T dv_R) + d(v_C^T i_C + v_R^T i_R + v_V^T i_V)$$

$$= (v_L^T di_L - i_C^T dv_C) + dP(i_L,\ v_C) = 0$$

$$P(i_L,\ v_C) = \int_0^{i_G} v_G^T di_G - \int_0^{v_R} i_R^T dv_R + v_C^T i_C + v_R^T i_R + v_V^T i_V$$

$$= -\int_0^{i_L} f(-F_{GL} i_L)^T F_{GL} di_L - \int_0^{v_C} g(F_{CR}^T v_C)^T F_{CR}^T dv_C - v_C^T F_{CL} i_L - v_C^T F_{CI} i_I - v_V^T F_{VL} i_L$$

$$v_L + \frac{\partial P}{\partial i_L} = 0$$

$$-i_C + \frac{\partial P}{\partial v_C} = 0$$

$$L\frac{di_L}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial i_L}$$

$$C\frac{dv_C}{dt} = \frac{\partial P}{\partial v_C}$$

$P(i_L,\ v_C)$

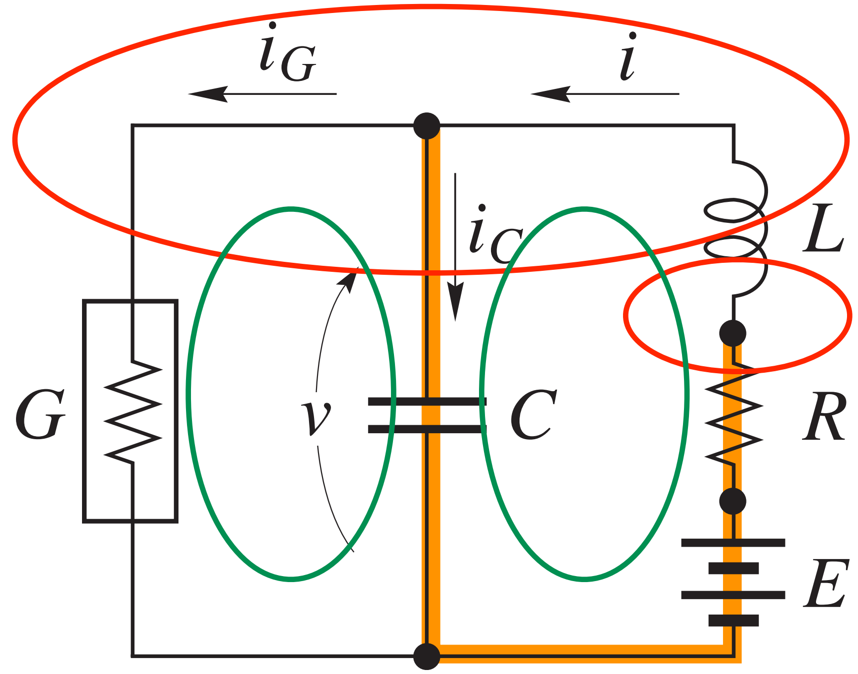
$$P(i_L,\ v_C) = -v_C^T F_{CL} i_L + F(i_L) - G(v_C)$$

$$F(i_L) = -\int_0^{i_L} f(-F_{GL} i_L) di_L - v_V^T F_{VL} i_L$$

$$G(v_C) = \int_0^{v_C} g(F_{CR}^T v_C) dv_C + v_C^T F_{CI} i_I$$

$$L\frac{di_L}{dt} = F_{CL}^T v_C - \left(\frac{\partial F}{\partial i_L}\right)^T$$

$$C\frac{dv_C}{dt} = -F_{CL} i_L - \left(\frac{\partial G}{\partial v_C}\right)^T$$



$$C:\ \ i_C + i_G - i = 0$$

$$R:\ \ i_R - i = 0 \qquad v_R = Ri$$

$$G:\ \ -v + v_G = 0 \qquad i_G = g(v)$$

$$L:\ \ -E + v + v_R + v_L = 0$$

$$P(i,\ v) = -vF_{CL}i + F(i) - G(v) = vi + \frac{1}{2}Ri^2 - Ei - \int_0^v g(v)dv$$

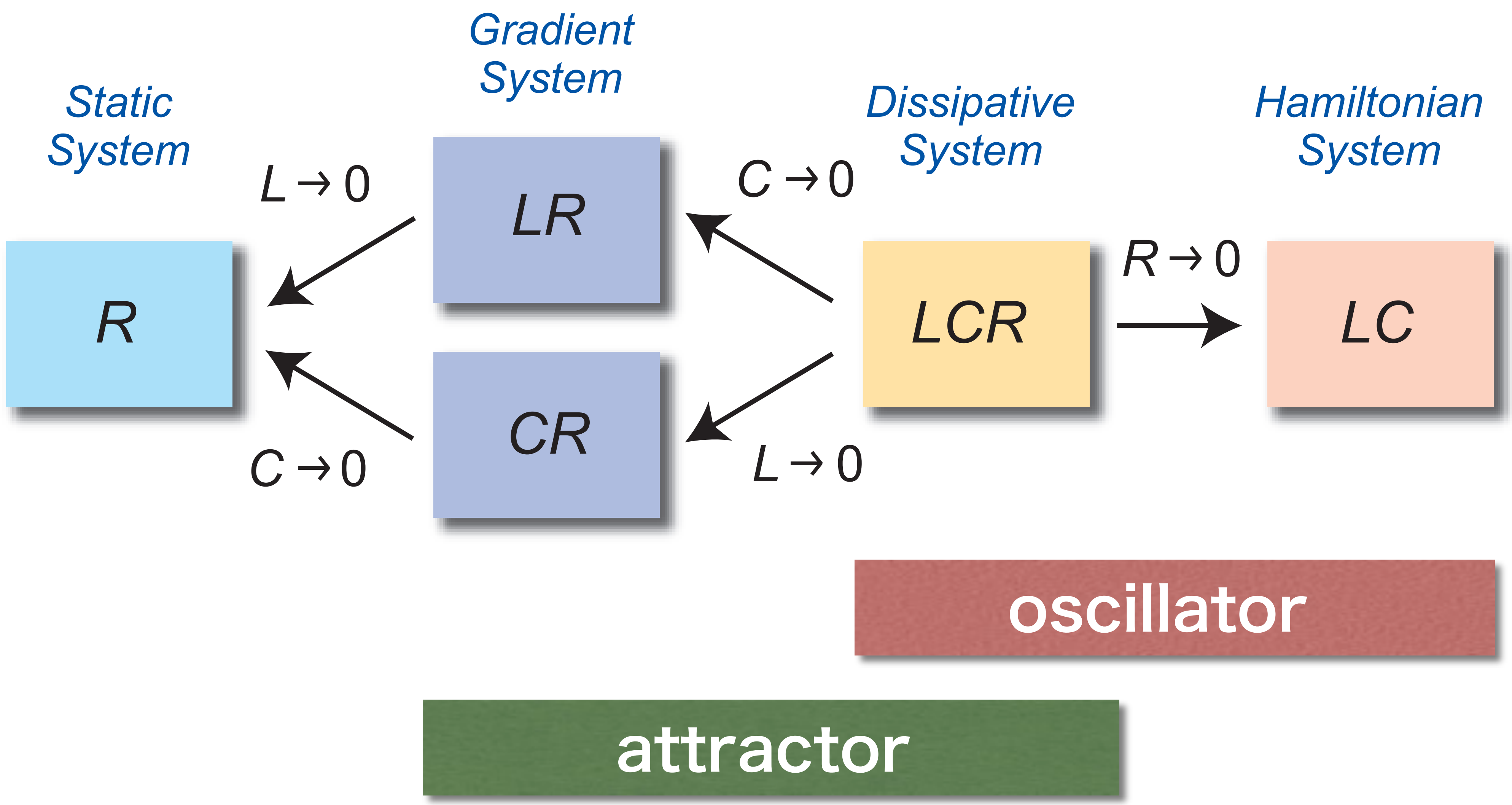
$$L\frac{di}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial i} = -v - Ri + E$$

$$C\frac{dv}{dt} = \frac{\partial P}{\partial v} = i - g(v)$$

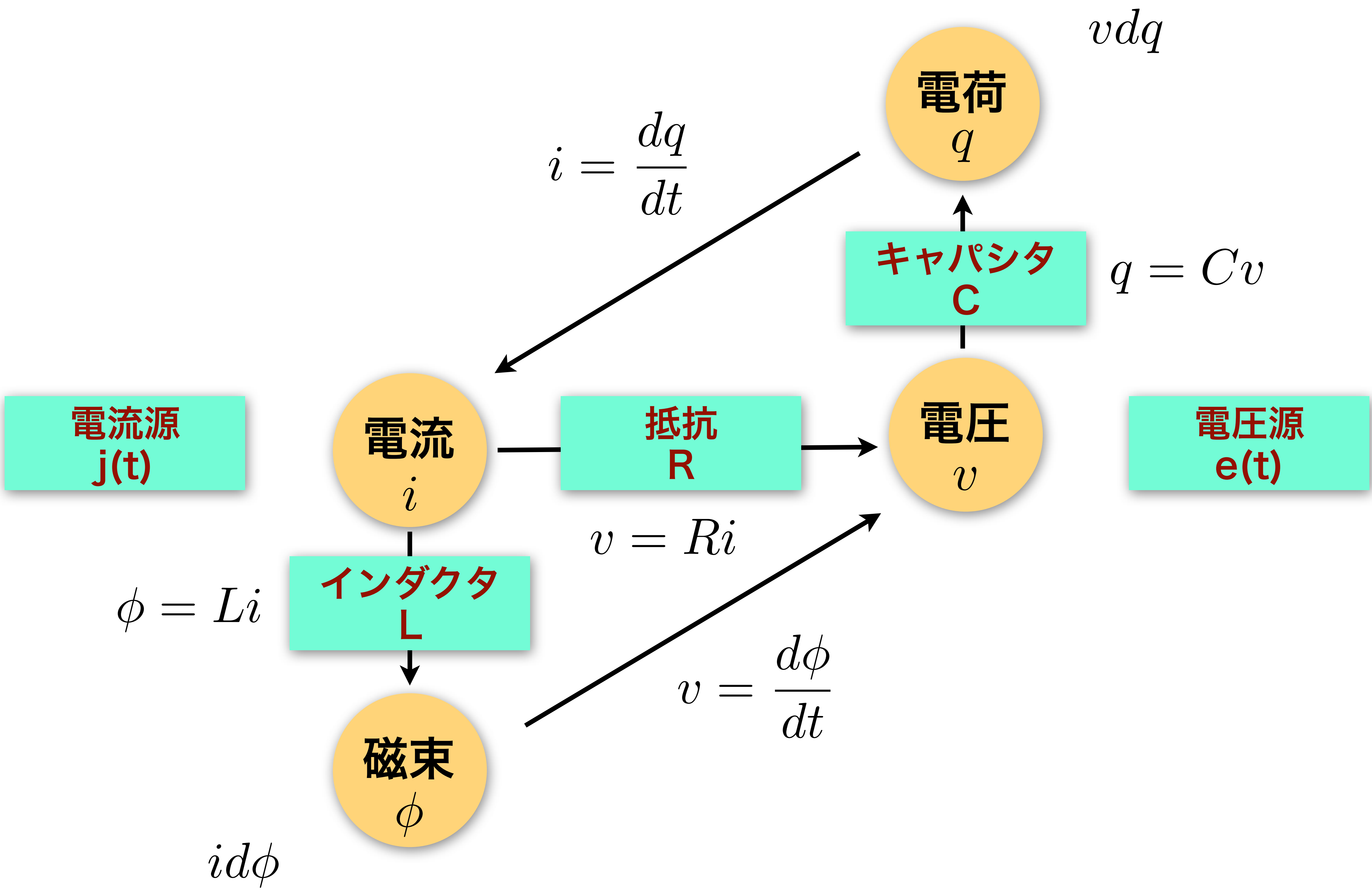
電気回路の力学系

$$L\frac{di_L}{dt} = F_{CL}^T v_C - \left(\frac{\partial F}{\partial i_L}\right)^T$$

$$C\frac{dv_C}{dt} = -F_{CL} i_L - \left(\frac{\partial G}{\partial v_C}\right)^T$$



３つの基本素子と４つの物理量



インダクタとキャパシタのエネルギー

インダクタ

$$i_L = f_L(\phi),\ v_L = \frac{d\phi}{dt},\ W_L(\phi) = \int_0^{\phi} i_L^T d\phi = \int_0^{\phi} f_L(\phi)^T d\phi$$

キャパシタ

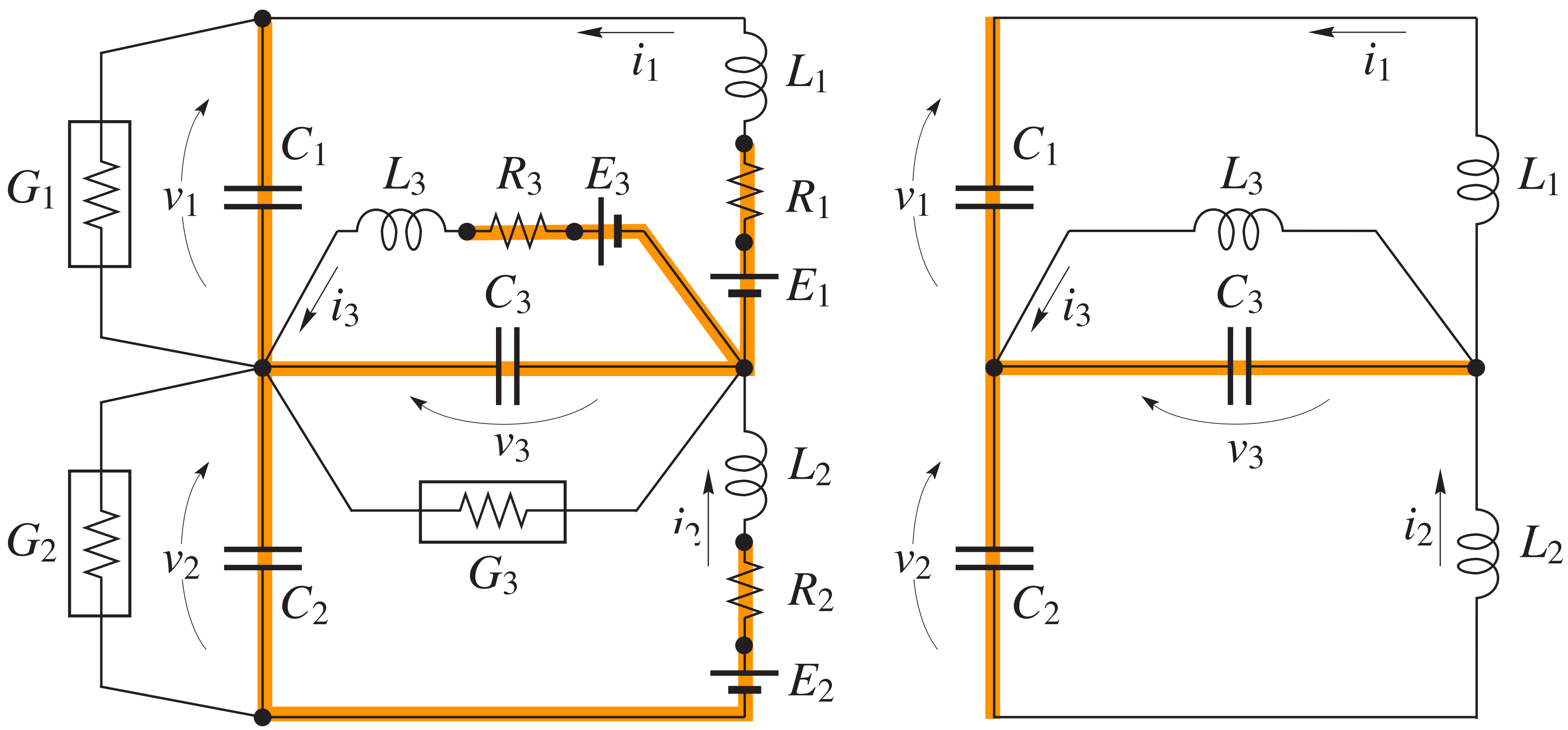
$$v_C = f_C(q),\ i_C = \frac{dq}{dt},\ W_C(q) = \int_0^{q} v_C^T dq = \int_0^{q} f_C(q)^T dq$$

回路の全エネルギー $H(\phi,\ q) = W_L(\phi) + W_C(q)$

回路方程式

$$\frac{d\phi}{dt} = F_{CL}^T \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T,\quad \frac{dq}{dt} = -F_{CL}\left(\frac{\partial H}{\partial \phi}\right)^T$$

A coupled BVP circuit



$$i_{C1} - i_1 = 0$$
$$i_{C2} - i_2 = 0$$
$$i_{C3} - i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

$$F_{CL} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P(i,\ v) = -v^T F_{CL} i + F(i) - G(v) = vi + \frac{1}{2}Ri^2 - Ei - \int_0^v g(v)dv$$

$$P(i,\ v) = -v^T F_{CL} i + \sum_{k=1}^{3} \left[\frac{1}{2}R_k i_k^2 - E_k i_k - \int_0^{v_k} g(v_k)dv_k\right]$$

$$= v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3(i_1 - i_2 + i_3) + \sum_{k=1}^{3} \left[\frac{1}{2}R_k i_k^2 - E_k i_k - \int_0^{v_k} g(v_k)dv_k\right]$$

A coupled BVP circuit

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial i_1} = -v_1 - v_3 - R_1 i_1 + E_1$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial i_2} = -v_2 + v_3 - R_2 i_2 + E_2$$

$$L_3 \frac{di_3}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial i_3} = -v_3 - R_3 i_3 + E_3$$

$$C_1 \frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial P}{\partial v_1} = i_1 - g(v_1)$$

$$C_2 \frac{dv_2}{dt} = \frac{\partial P}{\partial v_2} = i_2 - g(v_2)$$

$$C_3 \frac{dv_3}{dt} = \frac{\partial P}{\partial v_3} = i_1 - i_2 + i_3 - g(v_3)$$

回路を変形する

完全回路

↓

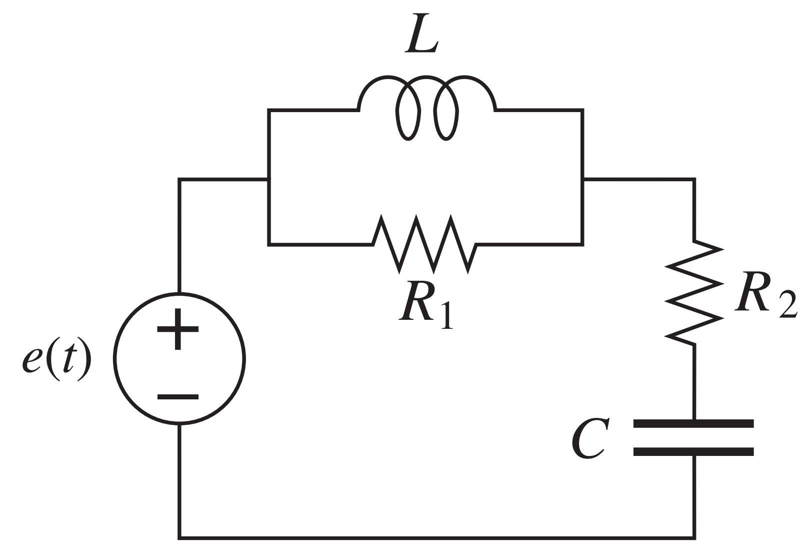
C-標準木

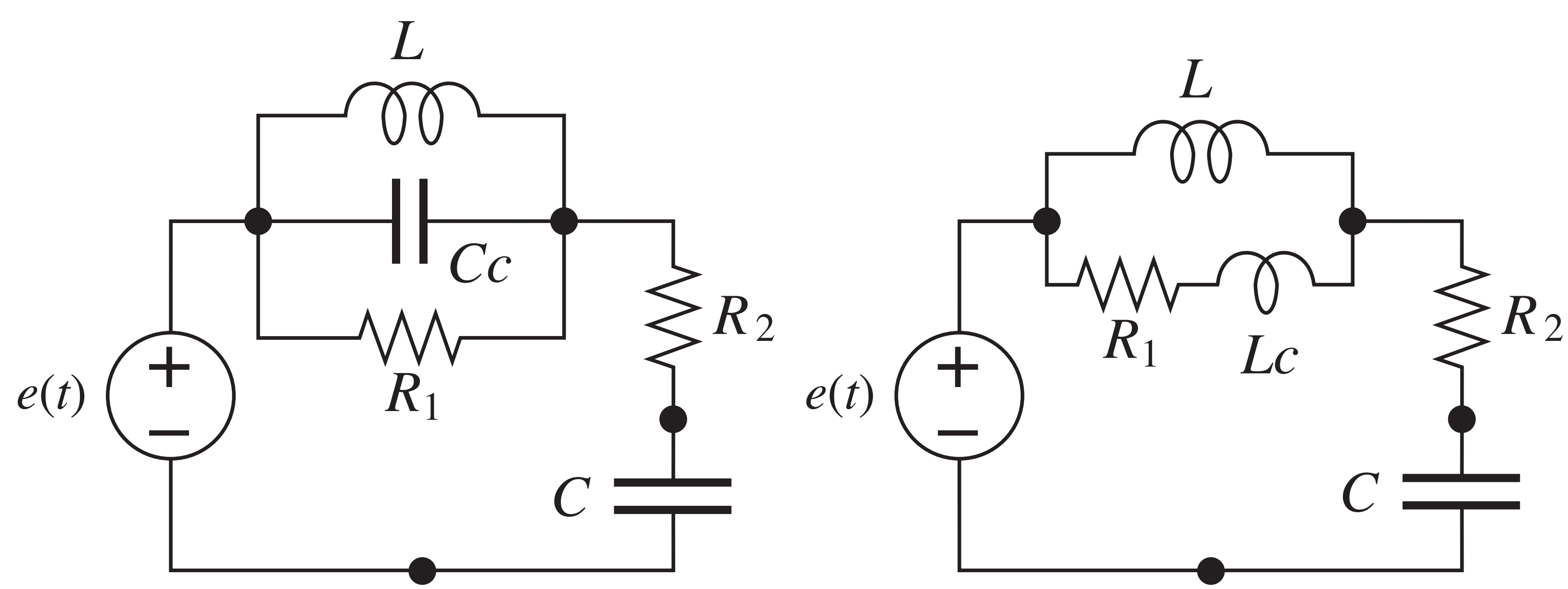
↓

抵抗部分回路

↓

C, L 部分回路





(a) (b)

C-基準木のある回路の場合

表１　回路素子とその枝電圧，枝電流および個数

素子名	電圧	電流	個数
木枝独立電圧源 (V)	v_V	i_V	n_V
木枝キャパシタ (C)	v_C	i_C	n_C
木枝抵抗 (G)	v_G	i_G	n_G
木枝インダクタ (Γ)	v_Γ	i_Γ	n_Γ
補木枝キャパシタ (S)	v_S	i_S	n_S
補木枝抵抗 (R)	v_R	i_R	n_R
補木枝インダクタ (L)	v_L	i_L	n_L
補木枝独立電流源 (I)	v_I	i_I	n_I

$$Qi = 0; \quad Bv = 0$$

$$(V):\ i_V + F_{VS}i_S + F_{VR}i_R + F_{VL}i_L + F_{VI}i_I = 0$$
$$(C):\ i_C + F_{CS}i_S + F_{CR}i_R + F_{CL}i_L + F_{CI}i_I = 0$$
$$(G):\ i_G + F_{GS}i_S + F_{GR}i_R + F_{GL}i_L + F_{GI}i_I = 0$$
$$(\Gamma):\ i_\Gamma + F_{\Gamma S}i_S + F_{\Gamma R}i_R + F_{\Gamma L}i_L + F_{\Gamma I}i_I = 0$$

$$i_C = C_C\dot{v}_C$$
$$i_S = C_S\dot{v}_S$$

$$i_V + F_{VS}i_S + F_{VR}i_R + F_{VL}i_L + F_{VI}i_I = 0$$
$$i_C + F_{CS}i_S + F_{CR}i_R + F_{CL}i_L + F_{CI}i_I = 0$$
$$i_G + F_{GR}i_R + F_{GL}i_L + F_{GI}i_I = 0$$
$$i_\Gamma + F_{\Gamma L}i_L + F_{\Gamma I}i_I = 0$$

$$v_S - F_{VS}^T v_V - F_{CS}^T v_C = 0$$
$$v_R - F_{VR}^T v_V - F_{CR}^T v_C - F_{GR}^T v_G = 0$$
$$v_L - F_{VL}^T v_V - F_{CL}^T v_C - F_{GL}^T v_G - F_{\Gamma L}^T v_\Gamma = 0$$
$$v_I - F_{VI}^T v_V - F_{CI}^T v_C - F_{GI}^T v_G - F_{\Gamma I}^T v_\Gamma = 0$$

$$v_L = L_L\dot{i}_L$$
$$v_\Gamma = L_\Gamma\dot{i}_\Gamma$$

微分方程式の階数＝#C1+#L1

表１　CL 基準木の木枝・補木枝に属する各素子の数

素子	C 基準木				素子の総数
	木枝		補木枝		
独立電圧源		n_V			n_V
キャパシタ	n_{C1}	n_{C2}		n_S	$n_C = n_{C1} + n_{C2} + n_S$
抵抗	n_{G1}	n_{G2}	n_{R1}	n_{R2}	$n_R = n_{G1} + n_{G2} + n_{R1} + n_{R2}$
インダクタ		n_Γ	n_{L1}	n_{L2}	$n_L = n_\Gamma + n_{L1} + n_{L2}$
独立電流源				n_I	n_I
	補木枝	木枝		補木枝	
	L 基準木				

強制退化　　保存則

$$Qi = 0; \quad Bv = 0$$

$$i_C = C_C \dot{v}_C$$

$$i_S = C_S \dot{v}_S$$

$$i_V + F_{VS} i_S + F_{VR} i_R + F_{VL} i_L + F_{VI} i_I = 0$$

$$i_C + F_{CS} i_S + F_{CR} i_R + F_{CL} i_L + F_{CI} i_I = 0$$

$$i_G + F_{GR} i_R + F_{GL} i_L + F_{GI} i_I = 0$$

$$i_\Gamma + F_{\Gamma L} i_L + F_{\Gamma I} i_I = 0$$

$$v_L = L_L \dot{i}_L$$

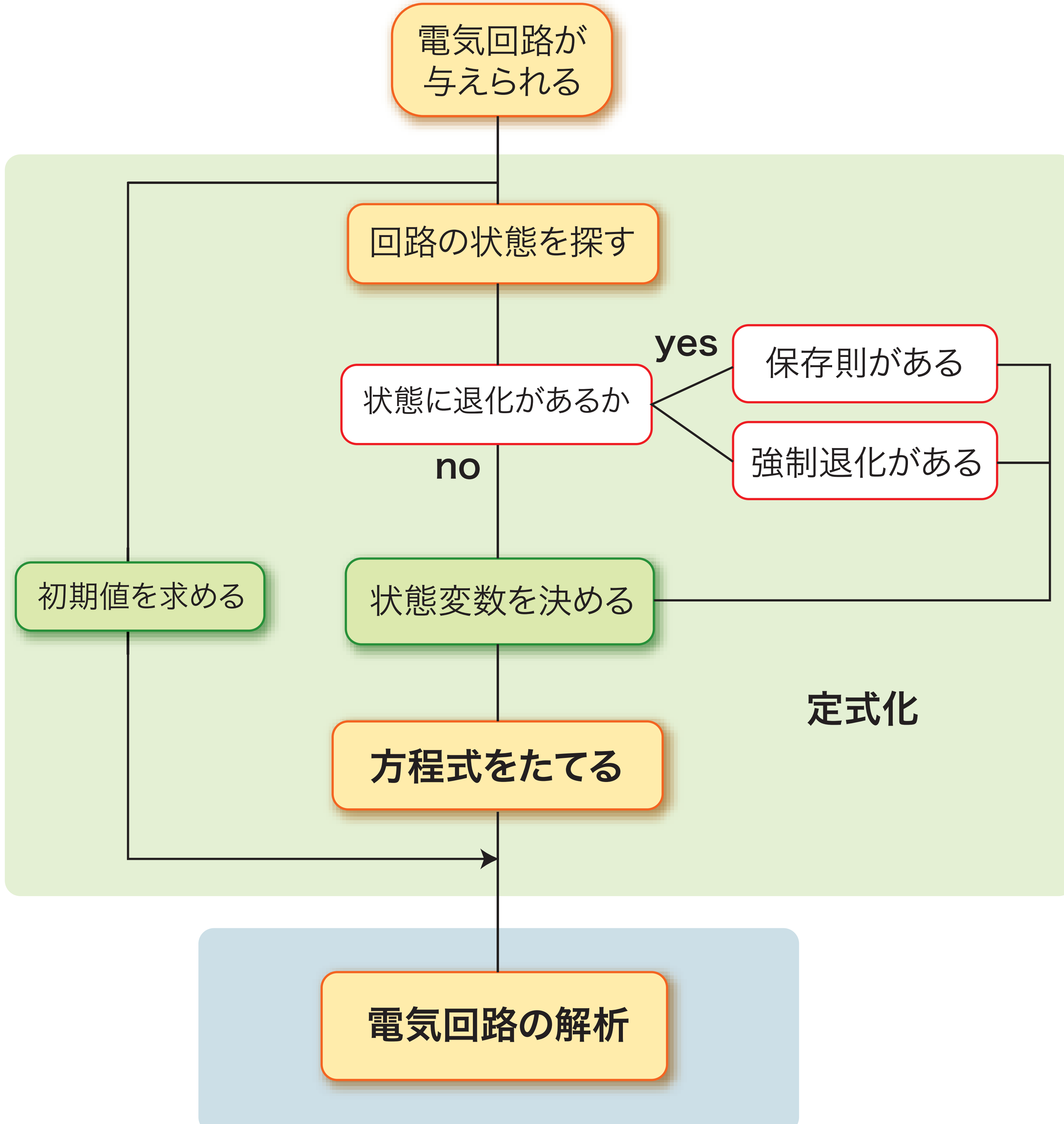
$$v_\Gamma = L_\Gamma \dot{i}_\Gamma$$

$$v_S - F_{VS}^T v_V - F_{CS}^T v_C = 0$$

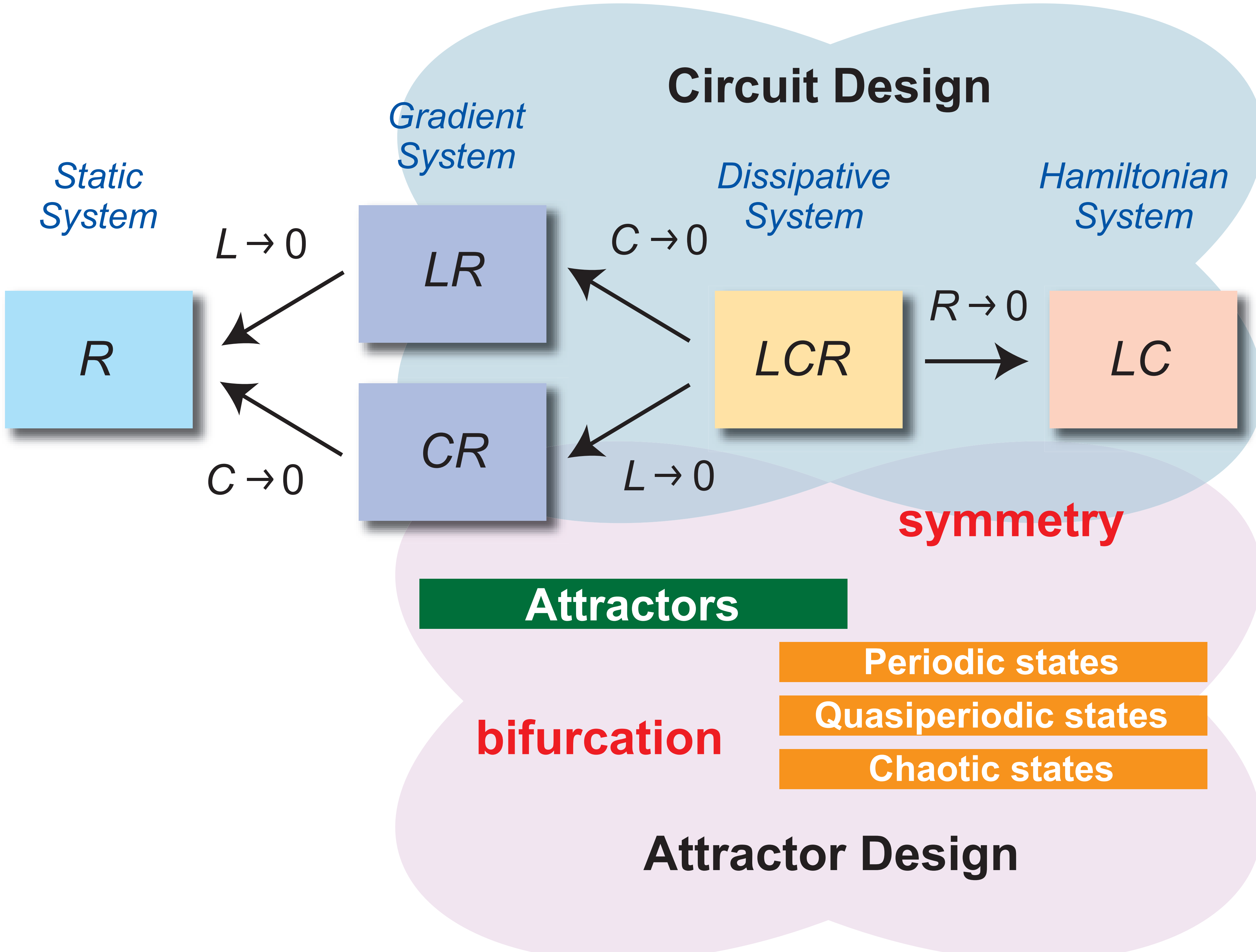
$$v_R - F_{VR}^T v_V - F_{CR}^T v_C - F_{GR}^T v_G = 0$$

$$v_L - F_{VL}^T v_V - F_{CL}^T v_C - F_{GL}^T v_G - F_{\Gamma L}^T v_\Gamma = 0$$

$$v_I - F_{VI}^T v_V - F_{CI}^T v_C - F_{GI}^T v_G - F_{\Gamma I}^T v_\Gamma = 0$$

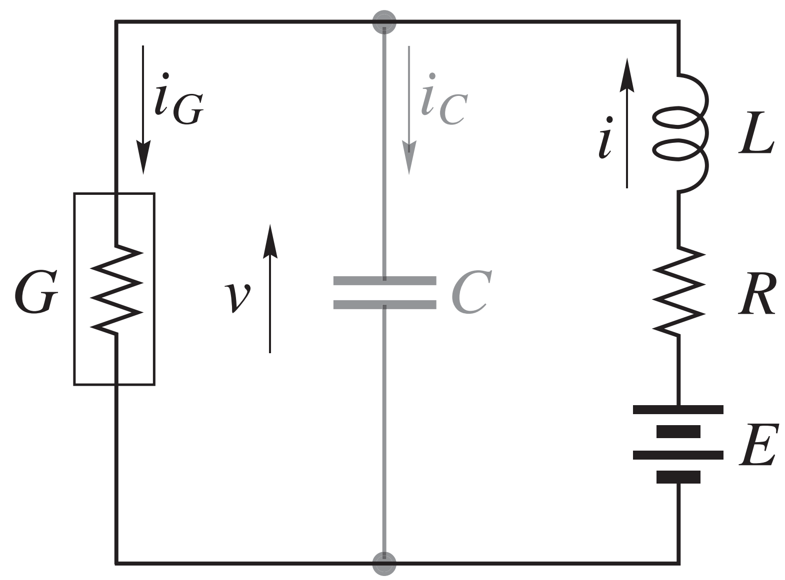

電気回路が
与えられる
回路の状態を探す
yes
保存則がある
状態に退化があるか
強制退化がある
no
初期値を求める
状態変数を決める
定式化
方程式をたてる
電気回路の解析

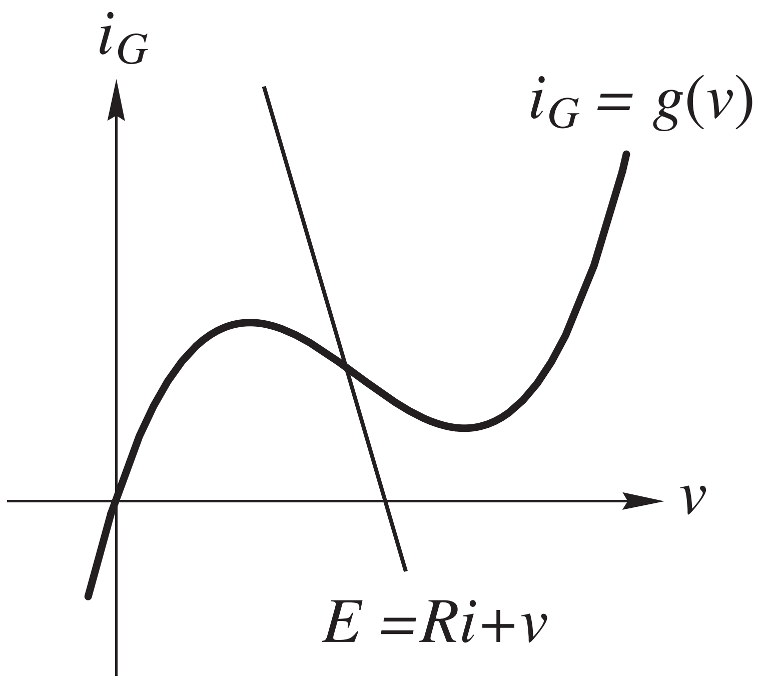
電気回路の非線形現象

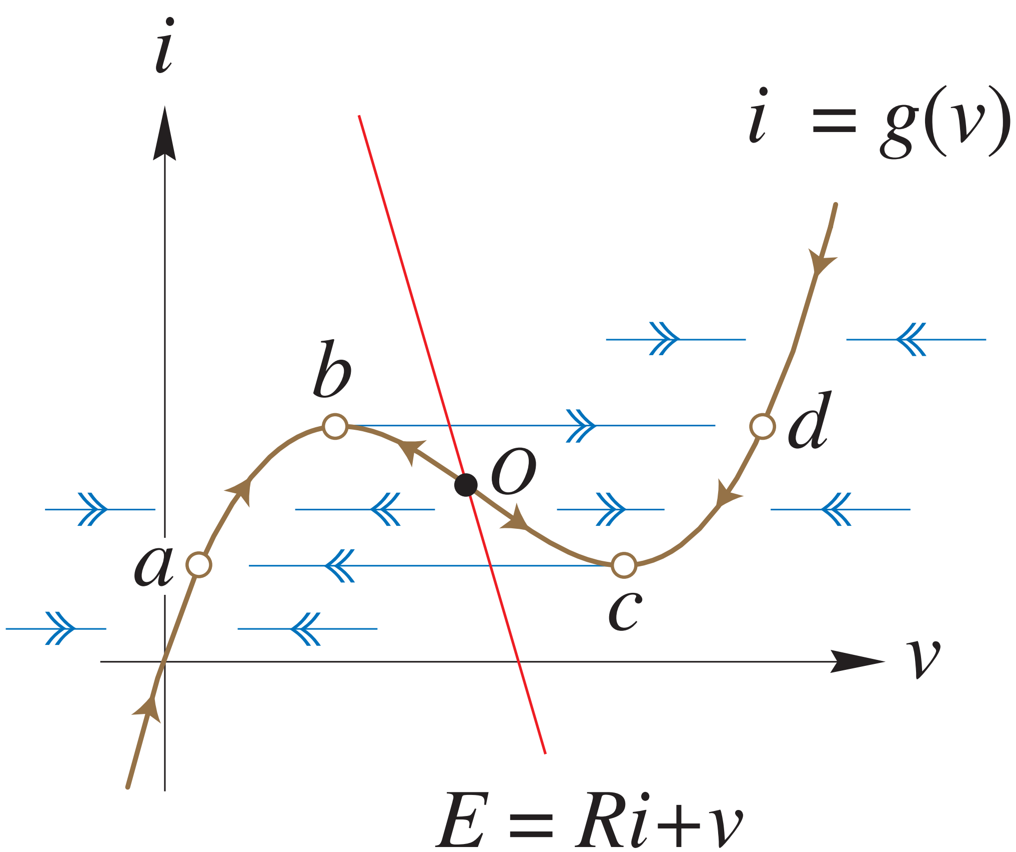


Circuit Design
Static System
Gradient System
Dissipative System
Hamiltonian System
R
LR
CR
LCR
LC
L → 0
C → 0
C → 0
L → 0
R → 0
symmetry
Attractors
Periodic states
Quasiperiodic states
Chaotic states
bifurcation
Attractor Design

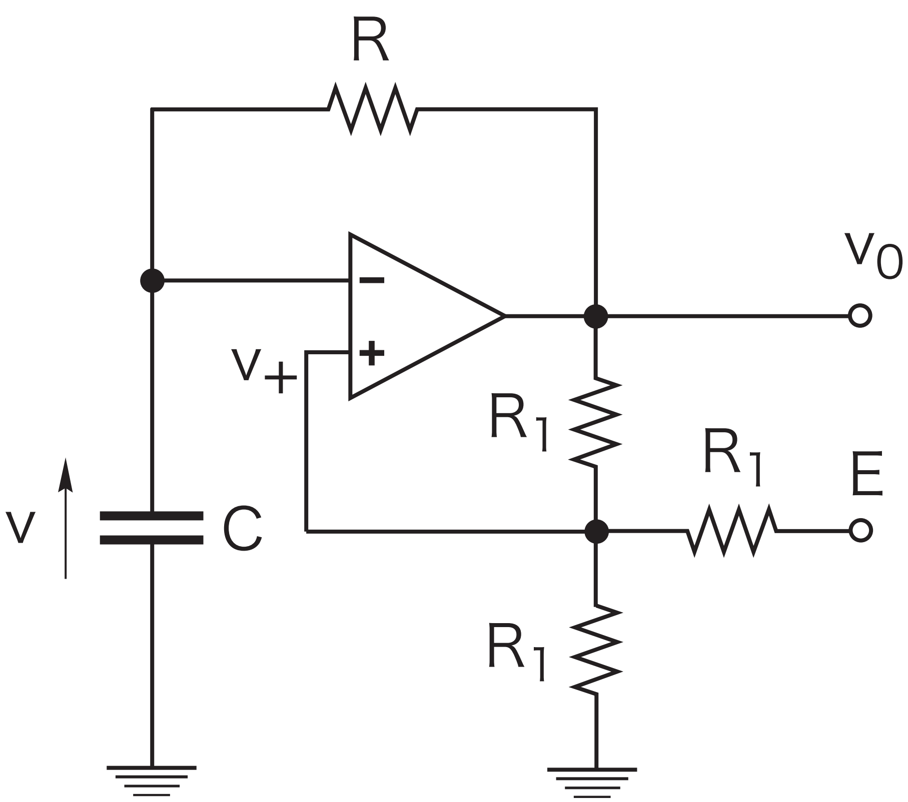
弛張振動(relaxation oscillation)

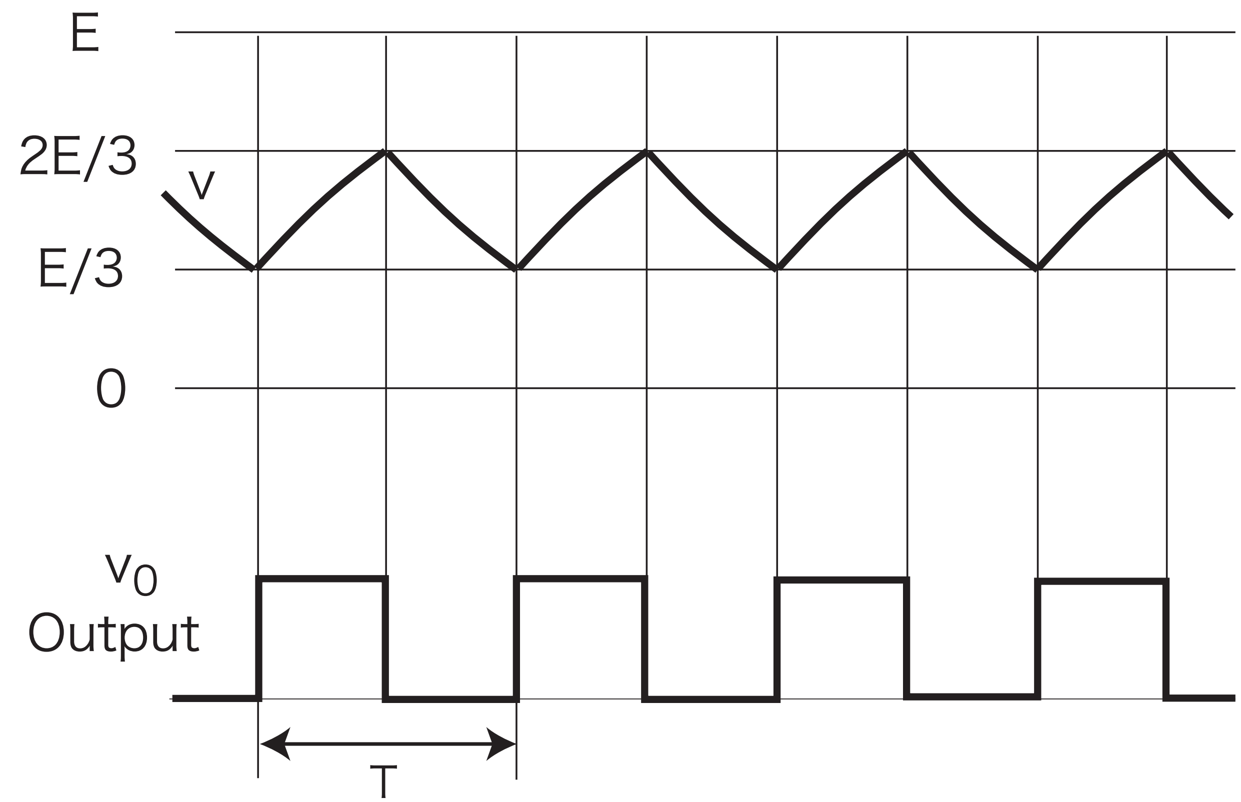




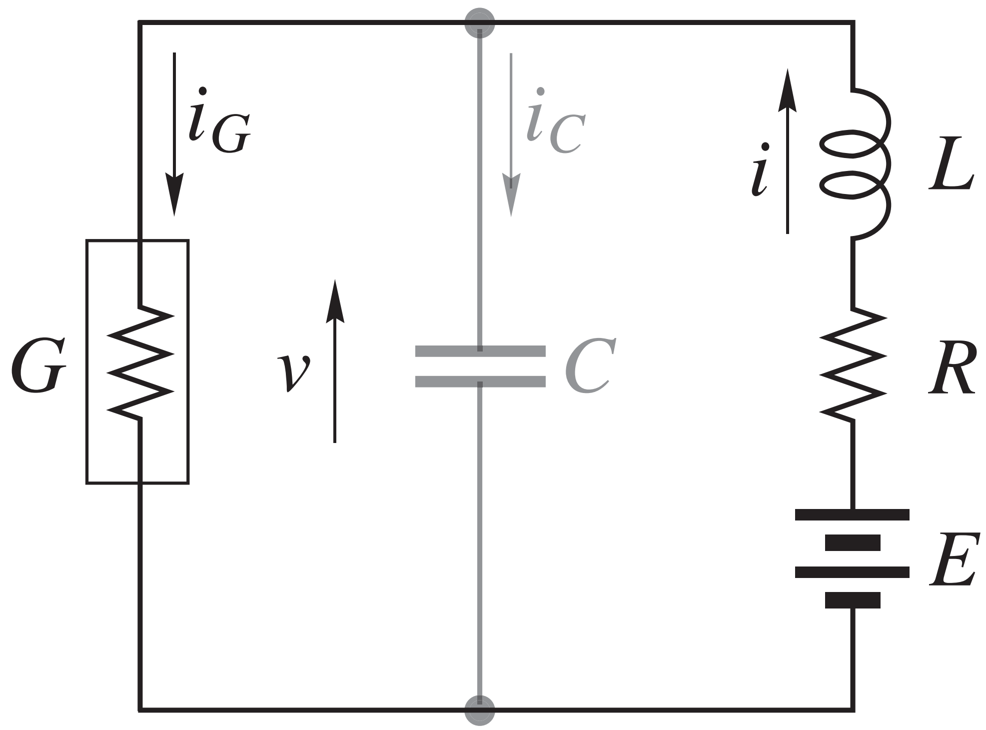


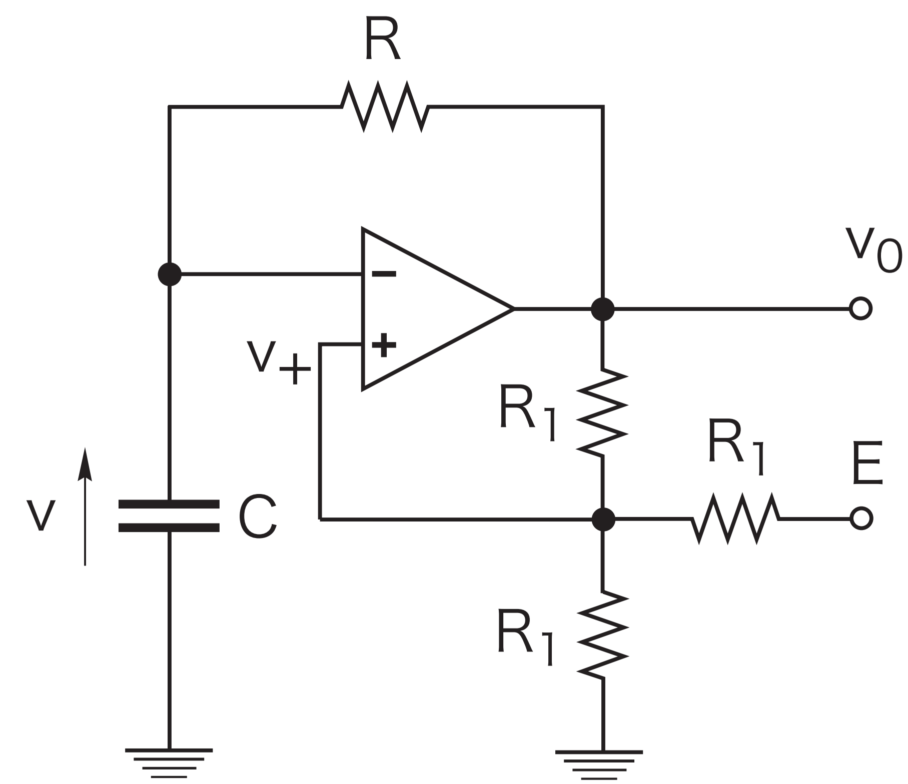
弛張振動(relaxation oscillation)



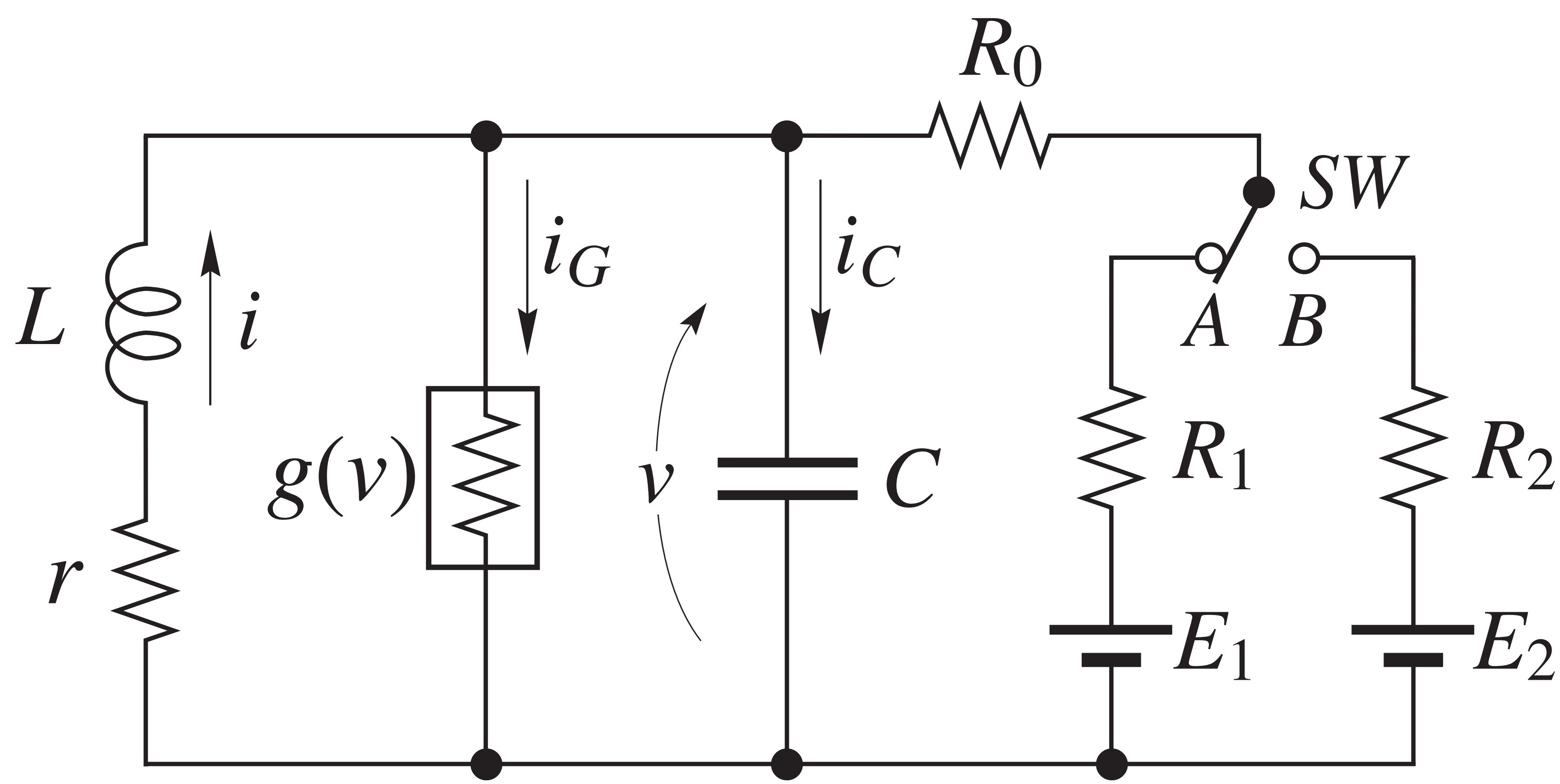


寄生素子の働きとスイッチの役割



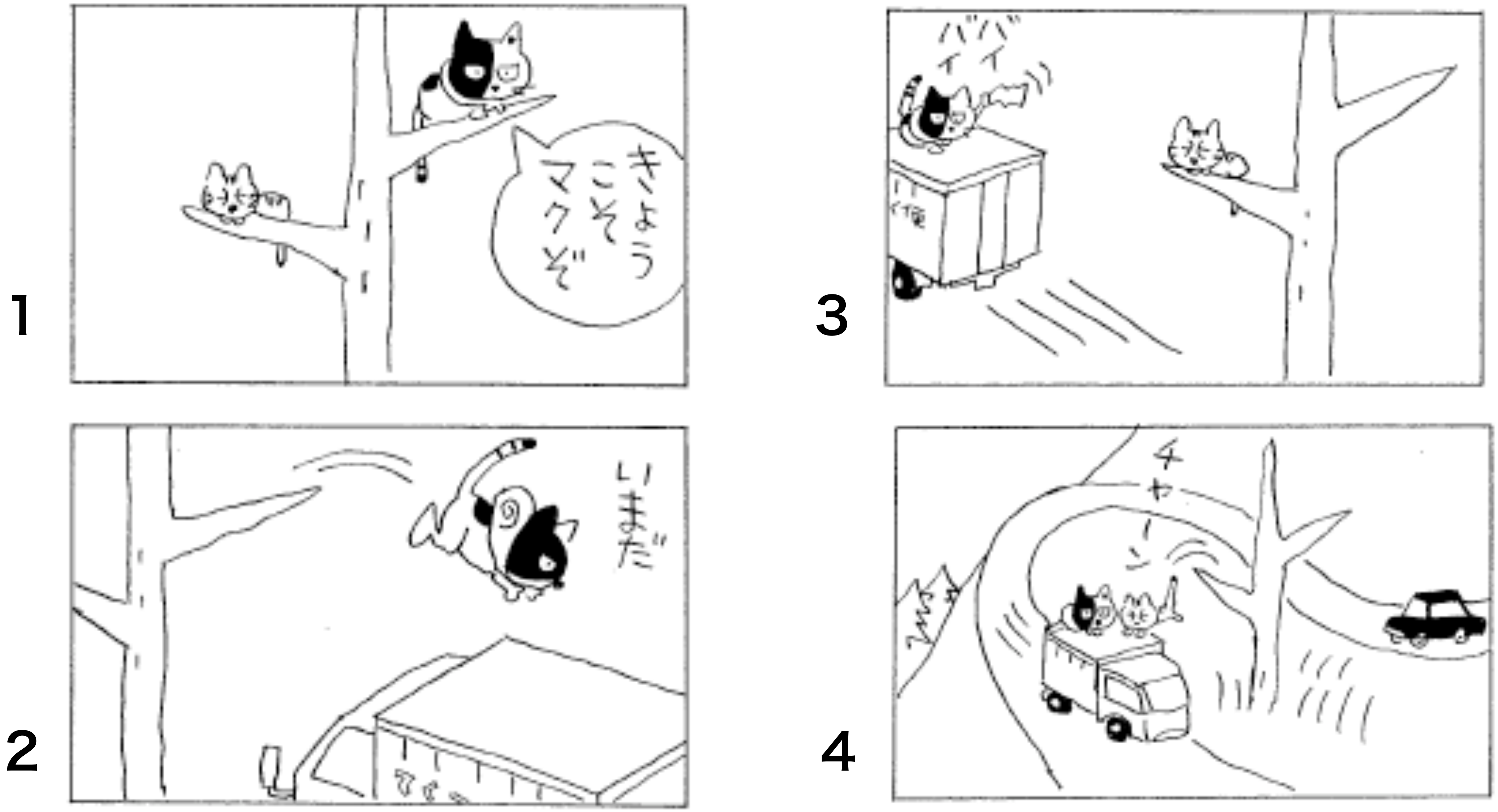


Alpazur oscillator



非線形：nonlinear

砂川しげひさ：ワガハイとチビ丸



recurrence