

非線形 LC 回路*

徳島大・工・電子 川上 博

1976 年 10 月

1 はじめに

この報告では非線形 LC 回路が Hamiltonian 系となることを示したい。すなわち、有限個のインダクタおよびキャパシタからなる任意の回路においては、Kirchhoff の法則による状態変数の拘束の一部が

- (i) キャパシタ電圧 v_γ 間 (あるいはインダクタ電流 i_λ 間) の scleronomic constraints:

$$f(v_\gamma) = 0 \text{ (あるいは } f(i_\lambda) = 0 \text{)}$$

として、また

- (ii) キャパシタに蓄えられる電荷 q_γ (あるいはインダクタと鎖交する磁束 ϕ_λ) の保存則、すなわち運動の第一積分:

$$f(q_\gamma) = 0 \text{ (あるいは } f(\phi_\lambda) = 0 \text{)}$$

とみなされる結果、回路のダイナミクスはキャパシタに蓄えられる電荷 $q_\gamma \in R^\gamma$ とインダクタの鎖交磁束 $\phi_\lambda \in R^\lambda$ のつくる状態空間 $R^\gamma \times R^\lambda$ 内において、上述の (i) で定まる多様体上の更に (ii) で定まる積分多様体内で Hamiltonian 系として記述されることとなる。

結果は具体的な coordinates を用いて示した。以下この節では、記号の説明、Kirchhoff の法則を記述する際の座標系の取り方などについてよく知られた結果を述べる。記法は R.A. Rohrer[1] 第 14 章に従った。

回路は連結しているものとし、素子の総数 (枝の数) を b 、グラフとしてみたときの節点の数を n とする。

- キャパシタの総数: γ , インダクタの総数: λ , $b = \gamma + \lambda$

* この報告は、数理解析研究所講究録 284, 電気回路の力学系, 京都大学数理解析研究所, pp.48-63, 1976 年 10 月より抜粋し, 例題を 2007 年 7 月に加筆したものである。

- 枝電流： $i \in R^b$ ，枝電圧： $v \in R^b$ ，これらは適当に分割表現することがある．たとえば

$$i = \begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\lambda \end{bmatrix}, i_\gamma = \begin{bmatrix} i_C \\ i_S \end{bmatrix}, i_C = \begin{bmatrix} i_{C_1} \\ i_{C_2} \end{bmatrix}, \dots$$

2 Kirchhoff の法則

$$\begin{aligned} Qi &= 0 \\ Bv &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

適当な tree の選択を行うと，その tree から定まる座標系で

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} -F' & I \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

の形に表現できる．ここに，' は転置を表す．以下では，次の性質を持つ tree を使用する：

- (i) C-normal tree：キャパシタをできるだけ多く tree branches に含む tree をいう．
- (ii) L-normal tree：インダクタをできるだけ多く tree branches に含む tree をいう．

今1つの C-normal tree を選んで固定する．このとき，次の性質をもつ L-normal tree が存在する．

C-normal tree における tree inductors および link capacitors をそれぞれ L-normal tree の tree inductors および link capacitors に含む

そこで，C-normal tree, L-normal tree で上の性質を持つ pair を1組選んで，キャパシタ，インダクタを次表のように分割して考える．表中，たとえば n_{C_1} は C-normal tree の座標系では tree に含まれ，L-normal tree による座標系では links に含まれるキャパシタの個数を表す．これらの個数はもちろん具体的な tree の選択によらない．これらの trees を用いた Kirchhoff の法則の表現は

表1 2つの normal trees を選ぶ

C-normal tree	tree branches		cotree links	
capacitors	n_{C_1}	n_{C_2}		n_S
inductors		n_Γ	n_{L_1}	n_{L_2}
L-normal tree	cotree links	tree branches		cotree links

次式となる．

(i) C-normal tree を用いて $Q_C i = 0$, $B_C v = 0$ を具体的に表現する :

$$\begin{aligned}
\text{tree capacitors}(C_1) : & \quad i_{C_1} + F_{C_1 S} i_S + F_{C_1 L_2} i_{L_2} + F_{C_1 L_1} i_{L_1} = 0 \\
\text{tree capacitors}(C_2) : & \quad i_{C_2} + F_{C_2 S} i_S + F_{C_2 L_2} i_{L_2} + F_{C_2 L_1} i_{L_1} = 0 \\
\text{tree inductors}(\Gamma) : & \quad i_\Gamma + F_{\Gamma L_2} i_{L_2} + F_{\Gamma L_1} i_{L_1} = 0 \\
\text{link capacitors}(S) : & \quad v_S - F'_{C_1 S} v_{C_1} - F'_{C_2 S} v_{C_2} = 0 \\
\text{link inductors}(L_2) : & \quad v_{L_2} - F'_{C_1 L_2} v_{C_1} - F'_{C_2 L_2} v_{C_2} - F'_{\Gamma L_2} v_\Gamma = 0 \\
\text{link inductors}(L_1) : & \quad v_{L_1} - F'_{C_1 L_1} v_{C_1} - F'_{C_2 L_1} v_{C_2} - F'_{\Gamma L_1} v_\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

(ii) L-normal tree を用いて $Q_L i = 0$, $B_L v = 0$ を具体的に表現する :

$$\begin{aligned}
\text{tree inductors}(L_1) : & \quad i_{L_1} + N_{L_1 L_2} i_{L_2} + N_{L_1 S} i_S + N_{L_1 C_1} i_{C_1} = 0 \\
\text{tree inductors}(\Gamma) : & \quad i_\Gamma + N_{\Gamma L_2} i_{L_2} + N_{\Gamma S} i_S + N_{\Gamma C_1} i_{C_1} = 0 \\
\text{tree capacitors}(C_2) : & \quad i_{C_2} + N_{C_2 S} i_S + N_{C_2 C_1} i_{C_1} = 0 \\
\text{link inductors}(L_2) : & \quad v_{L_2} - N'_{L_1 L_2} v_{L_1} - N'_{\Gamma L_2} v_\Gamma = 0 \\
\text{link capacitors}(S) : & \quad v_S - N'_{L_1 S} v_{L_1} - N'_{\Gamma S} v_\Gamma - N'_{C_2 S} v_{C_2} = 0 \\
\text{link capacitors}(C_1) : & \quad v_{C_1} - N'_{L_1 C_1} v_{L_1} - N'_{\Gamma C_1} v_\Gamma - N'_{C_2 C_1} v_{C_2} = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

なお, 行列 Q , B については次の直交性の成り立つことに注意しよう .

$$\begin{aligned}
Q_C B'_L &= 0 \\
B_C Q'_L &= 0
\end{aligned} \tag{5}$$

これらの式を用いて, 次式の関係を得る .

$$\begin{aligned}
I - F_{C_1 L_1} N_{L_1 C_1} &= 0 \\
F_{C_1 L_2} - F_{C_1 L_1} N_{L_1 L_2} &= 0 \\
F'_{C_2 L_1} + F'_{C_1 L_1} N'_{C_2 C_1} &= 0 \\
N'_{\Gamma L_2} - F'_{\Gamma L_2} + N'_{L_1 L_2} F'_{\Gamma L_1} &= 0 \\
N_{C_2 S} - F_{C_2 S} + N_{C_2 C_1} F_{C_1 S} &= 0
\end{aligned} \tag{6}$$

以上の結果をまとめて Kirchhoff の法則を次のように表現する :

1. circuit dynamics:

$$\begin{aligned}
\text{tree capacitors}(C_1) : & \quad i_{C_1} + F_{C_1 S} i_S + F_{C_1 L_1} (i_{L_1} + N_{L_1 L_2} i_{L_2}) = 0 \\
\text{link inductors}(L_1) : & \quad v_{L_1} - F'_{\Gamma L_1} v_\Gamma - F'_{C_1 L_1} (v_{C_1} - N'_{C_2 C_1} v_{C_2}) = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

2. first integrals:

$$\begin{aligned} \text{tree capacitors}(C_2) : \quad & i_{C_2} + F_{C_2 S} i_S + N_{C_2 C_1} (i_{C_1} + F_{C_1 S} i_S) = 0 \\ \text{link inductors}(L_2) : \quad & v_{L_2} - F'_{\Gamma L_2} v_\Gamma - N'_{L_1 L_2} (v_{L_1} - F'_{\Gamma L_1} v_\Gamma) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

3. holonomic scleronomic constraints:

$$\begin{aligned} \text{tree inductors}(\Gamma) : \quad & i_\Gamma + F_{\Gamma L_2} i_{L_2} + F_{\Gamma L_1} i_{L_1} = 0 \\ \text{link capacitors}(S) : \quad & v_S - F'_{C_1 S} v_{C_1} - F'_{C_2 S} v_{C_2} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

3 非線形 LC 回路の回路方程式

3.1 キャパシタ特性

キャパシタの枝電圧を $v_C = (v_{C_1}, v_{C_2}, v_S) \in R^{n_C} = R^{n_{C_1}} \times R^{n_{C_2}} \times R^{n_S}$, 蓄積される電荷を $q_C = (q_{C_1}, q_{C_2}, q_S) \in R^{n_C} = R^{n_{C_1}} \times R^{n_{C_2}} \times R^{n_S}$ としたとき, キャパシタ特性 Λ_Q は $(v_C, q_C) \in R^{n_C} \times R^{n_C}$ 空間のなめらかな n_C 次元多様体である. 通常キャパシタ特性 Λ_Q は v_C, q_C のどちらを用いても global にパラメータづけできる. したがって diffeomorphisms:

$$\hat{v}_C : R^{n_C} \rightarrow R^{n_C}; \quad q_C \mapsto v_C = \hat{v}_C(q_C)$$

あるいは

$$\hat{q}_C : R^{n_C} \rightarrow R^{n_C}; \quad v_C \mapsto q_C = \hat{q}_C(v_C)$$

のいずれかでキャパシタ特性を表すこととする. 前者の表現を電荷制御型, 後者のそれを電圧制御型キャパシタと呼ぶ. 特に, \hat{q}_C (あるいは \hat{v}_C) の Jacobi 行列 $\frac{\partial \hat{q}_C}{\partial v_C}$ (あるいは $\frac{\partial \hat{v}_C}{\partial q_C}$) が各点で対称正定値行列になるのが自然なキャパシタの特性である.

キャパシタを流れる電流 $i_C \in R^{n_C}$ は単に電荷 q_C の時間的变化:

$$i_C = \frac{dq_C}{dt} = \dot{q}_C \quad (10)$$

で定義される. これは, Λ_Q の動作点での接ベクトルと考えられる.

3.2 インダクタ特性

キャパシタ特性と同様に定義できる. インダクタを流れる電流を $i_L = (i_{L_1}, i_{L_2}, i_\Gamma) \in R^{n_L} = R^{n_{L_1}} \times R^{n_{L_2}} \times R^{n_\Gamma}$, 鎖交磁束を $\phi_L = (\phi_{L_1}, \phi_{L_2}, \phi_\Gamma) \in R^{n_L} = R^{n_{L_1}} \times R^{n_{L_2}} \times R^{n_\Gamma}$ としたとき, インダクタ特性 Λ_Φ は $(i_L, \phi_L) \in R^{n_L} \times R^{n_L}$ 空間のなめらかな n_L 次元多様体である.

キャパシタ特性と同様に, diffeomorphisms:

$$\hat{i}_L : R^{n_L} \rightarrow R^{n_L}; \quad \phi_L \mapsto i_L = \hat{i}_L(\phi_L)$$

あるいは

$$\hat{\phi}_L : R^{n_L} \rightarrow R^{n_L}; \quad \phi_L \mapsto \phi_L = \hat{\phi}_L(i_L)$$

のいずれかでインダクタ特性を表すこととする．前者の表現を磁束制御型，後者のそれを電流制御型インダクタと呼ぶ．特に， $\hat{\phi}_L$ （あるいは \hat{i}_L ）の Jacobi 行列 $\frac{\partial \hat{\phi}_L}{\partial i_L}$ （あるいは $\frac{\partial \hat{i}_L}{\partial \phi_L}$ ）が各点で対称正定値行列になるのが自然なインダクタの特性である．

インダクタ電圧 $v_L \in R^{n_L}$ は鎖交磁束 ϕ_L の時間的変化：

$$v_L = \frac{d\phi_L}{dt} = \dot{\phi}_L \quad (11)$$

で定義される．

3.3 この報告で扱うキャパシタ特性とインダクタ特性

この報告ではキャパシタ特性，インダクタ特性として次のような簡単な場合を考える^{*1}．

(i) キャパシタは電荷制御型である：

$$v_{C_1} = \hat{v}_{C_1}(q_{C_1}), \quad v_{C_2} = \hat{v}_{C_2}(q_{C_2}), \quad v_S = \hat{v}_S(q_S) \quad (12)$$

また， $\hat{v}_{C_1} : R^{n_{C_1}} \rightarrow R^{n_{C_1}}$ ， $\hat{v}_{C_2} : R^{n_{C_2}} \rightarrow R^{n_{C_2}}$ ， $\hat{v}_S : R^{n_S} \rightarrow R^{n_S}$ の各 Jacobi 行列は各点で対称正定値^{*2}と仮定する．

(ii) インダクタ特性は磁束制御型である：

$$i_{L_1} = \hat{i}_{L_1}(\phi_{L_1}), \quad i_{L_2} = \hat{i}_{L_2}(\phi_{L_2}), \quad i_\Gamma = \hat{i}_\Gamma(\phi_\Gamma) \quad (13)$$

また， $\hat{i}_{L_1} : R^{n_{L_1}} \rightarrow R^{n_{L_1}}$ ， $\hat{i}_{L_2} : R^{n_{L_2}} \rightarrow R^{n_{L_2}}$ ， $\hat{i}_\Gamma : R^{n_\Gamma} \rightarrow R^{n_\Gamma}$ の各 Jacobi 行列は各点で対称正定値と仮定する．

3.4 回路の状態変数

次の状態変数を定義しておく：

$$\begin{aligned} q_1 &= q_{C_1} + F_{C_1 S} q_S \\ q_2 &= q_{C_2} + F_{C_2 S} q_S \\ \phi_1 &= \phi_{L_1} - F'_{\Gamma L_1} \phi_\Gamma \\ \phi_2 &= \phi_{L_2} - F'_{\Gamma L_2} \phi_\Gamma \end{aligned} \quad (14)$$

^{*1} キャパシタ，インダクタの特性をこのように使用する tree に依存する特性と考えるのは自然ではない．ここでは考え方を述べる意味でこのようにした．

^{*2} キャパシタ特性，インダクタ特性で Jacobi 行列の対称正定値性の仮定は，キャパシタ，インダクタのエネルギー関数をうまく定義できる条件となる．

$$\begin{aligned}
q_0 &= q_2 + N_{C_2 C_1} q_1 \\
\phi_0 &= \phi_2 - N'_{L_1 L_2} \phi_1
\end{aligned} \tag{15}$$

これらの変数を用いて Kirchhoff の法則は次のように書き直すことができる .

1. circuit dynamics:

$$\begin{aligned}
\text{tree capacitors}(C_1) : \quad \dot{q}_1 &= -F_{C_1 L_1} (i_{L_1} + N_{L_1 L_2} i_{L_2}) \\
\text{link inductors}(L_1) : \quad \dot{\phi}_1 &= F'_{C_1 L_1} (v_{C_1} - N'_{C_2 C_1} v_{C_2})
\end{aligned} \tag{16}$$

2. first integrals:

$$\begin{aligned}
\text{tree capacitors}(C_2) : \quad \dot{q}_0 &= \dot{q}_2 + N_{C_2 C_1} \dot{q}_1 = 0 \\
\text{link inductors}(L_2) : \quad \dot{\phi}_0 &= \dot{\phi}_2 - N'_{L_1 L_2} \dot{\phi}_1 = 0
\end{aligned} \tag{17}$$

3. holonomic scleronomic constraints:

$$\begin{aligned}
\text{tree inductors}(\Gamma) : \quad \hat{i}_\Gamma(\phi_\Gamma) + F_{\Gamma L_2} \hat{i}_{L_2}(\phi_{L_2}) + F_{\Gamma L_1} \hat{i}_{L_1}(\phi_{L_1}) &= 0 \\
\text{link capacitors}(S) : \quad \hat{v}_S(q_S) - F'_{C_1 S} \hat{v}_{C_1}(q_{C_1}) - F'_{C_2 S} \hat{v}_{C_2}(q_{C_2}) &= 0
\end{aligned} \tag{18}$$

3.5 Hamiltonian の計算

キャパシタに蓄えられるエネルギー $W_E(q_C)$ は次のように計算できる .

$$\begin{aligned}
W_E : R^{\gamma} &\rightarrow R; \quad q_C \mapsto W_E(q_C) \\
W_E(q_C) &= \int^{q_C} \langle v_C, dq_C \rangle = \int \langle v_{C_1}, dq_{C_1} \rangle + \langle v_{C_2}, dq_{C_2} \rangle + \langle v_S, dq_S \rangle \\
&= \int \langle v_{C_1}, dq_1 \rangle + \langle v_{C_2}, dq_2 \rangle + \langle v_S - F'_{C_1 S} v_{C_1} - F'_{C_2 S} v_{C_2}, dq_S \rangle \\
&= \int^{q_1} \langle v_{C_1} - N'_{C_2 C_1} v_{C_2}, dq_1 \rangle
\end{aligned} \tag{20}$$

同様にインダクタに蓄えられるエネルギー $W_M : R^\lambda \rightarrow R$ は

$$\begin{aligned}
W_M(\phi_L) &= \int^{\phi_L} \langle i_L, d\phi_L \rangle = \int \langle i_{L_1}, d\phi_{L_1} \rangle + \langle i_{L_2}, d\phi_{L_2} \rangle + \langle i_\Gamma, d\phi_\Gamma \rangle \\
&= \int \langle i_{L_1}, d\phi_1 \rangle + \langle i_{L_2}, d\phi_2 \rangle + \langle i_\Gamma + F_{\Gamma L_2} i_{L_2} + F_{\Gamma L_1} i_{L_1}, d\phi_\Gamma \rangle \\
&= \int^{\phi_1} \langle i_{L_1} + N_{L_1 L_2} i_{L_2}, d\phi_1 \rangle
\end{aligned} \tag{21}$$

したがって回路の全エネルギー $H : R^\gamma \times R^\lambda \rightarrow R$ を次式で定義し，これを回路の Hamiltonian と呼ぶことにする．

$$\begin{aligned} H(q_C, \phi_L) &= W_E(q_C) + W_M(\phi_L) = H(q_1, \phi_1) \\ &= \int^{(q_1, \phi_1)} \left\langle v_{C_1} - N'_{C_2 C_1} v_{C_2}, dq_1 \right\rangle + \left\langle i_{L_1} + N'_{L_1 L_2} i_{L_2}, d\phi_1 \right\rangle \end{aligned} \quad (22)$$

このことから

$$\begin{aligned} v_{C_1} - N'_{C_2 C_1} v_{C_2} &= H_{q_1} \\ i_{L_1} + N'_{L_1 L_2} i_{L_2} &= H_{\phi_1} \end{aligned} \quad (23)$$

ここに，

$$\begin{aligned} H_{q_1} &= D_1 H(q_1, \phi_1) = \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ H_{\phi_1} &= D_2 H(q_1, \phi_1) = \frac{\partial H}{\partial \phi_1} \end{aligned} \quad (24)$$

を表す*3．

3.6 回路方程式

まず tree capacitors (C_1) の個数 n_{C_1} が，link inductors(L_1) の個数 n_{L_1} に等しいことをみておこう．次式が成り立つ：

$$n_{C_1} = n_{L_1} \quad (25)$$

証明 Kirchhoff の法則を記述するための tree の定め方から明らかなように tree capacitors(C_1) に属するキャパシタのみで cutset はつくらない．すなわち

$$\text{rank } F_{C_1 L_1} \geq n_{C_1} \Rightarrow n_{L_1} \geq n_{C_1} \quad (26)$$

同様に link inductors(L_1) に属するインダクタのみで loop をつくることはない．すなわち

$$\text{rank } F'_{C_1 L_1} \geq n_{L_1} \Rightarrow n_{C_1} \geq n_{L_1} \quad (27)$$

合わせて式 (25) を得る．

小節 3.4, 3.5 より LC 回路の回路方程式は次式となる．

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{\phi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -F_{C_1 L_1} \\ F'_{C_1 L_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{q_1} \\ H_{\phi_1} \end{bmatrix} \quad (28)$$

ここに，行列 $F_{C_1 L_1}$ は $m \times m$ ($m = n_{C_1} = n_{L_1}$) の正則行列である．

*3 関数の微分は転置しないと式 (23) の両辺を等号にできない．ここでは記法を簡単にするため転置記号を省略した．

Q, B の直交性に関する式 (6) の第 1 式から

$$F_{C_1 L_1} N_{L_1 C_1} = I \quad (29)$$

また, 上でみたように行列 $F_{C_1 L_1}$ は正則だから, $F_{C_1 L_1}^{-1} = N_{L_1 C_1}$. そこで変数変換:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ F_{C_1 L_1}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ N_{L_1 C_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

を行うと,

$$\begin{bmatrix} H_{q_1} \\ H_{\phi_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & N'_{L_1 C_1} \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_u \\ H_v \end{bmatrix} \quad (31)$$

したがって, 式 (28) は Hamilton の正準形となる:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_u \\ H_v \end{bmatrix} \quad (32)$$

3.7 回路方程式: Mixed potential を用いた表現

ここではキャパシタ, インダクタの特性をそれぞれ電圧制御型, 電流制御型であると仮定する. この場合, 次に示すように Mixed potential 関数 P が定義できて, P による回路方程式の記述が可能となる.

$R^\gamma \times R^\lambda$ 上の 1 形式 $\zeta = \langle i_\gamma, dv_\gamma \rangle - \langle v_\lambda, di_\lambda \rangle$ を考える. 計算すると

$$\begin{aligned} \zeta &= \langle i_\gamma, dv_\gamma \rangle - \langle v_\lambda, di_\lambda \rangle \\ &= \langle i_{C_1} + F_{C_1 S} i_S, dv_{C_1} \rangle + \langle i_{C_2} + F_{C_2 S} i_S, dv_{C_2} \rangle \\ &\quad - \langle v_{L_1} - F'_{\Gamma L_1} v_\Gamma, di_{L_1} \rangle - \langle v_{L_2} - F'_{\Gamma L_2} v_\Gamma, di_{L_2} \rangle \\ &= -d \left[\langle F_{C_1 L_1} (i_{L_1} + N_{L_1 L_2} i_{L_2}), (v_{C_1} - N'_{C_2 C_1} v_{C_2}) \rangle \right] \end{aligned} \quad (33)$$

そこで混合ポテンシャル関数

$$P : R^\gamma \times R^\lambda \rightarrow R; \quad (v_C, i_L) \mapsto P(v_C, i_L) \quad (34)$$

を

$$P(v_C, i_L) = \int \zeta = - \langle F_{C_1 L_1} (i_{L_1} + N_{L_1 L_2} i_{L_2}), (v_{C_1} - N'_{C_2 C_1} v_{C_2}) \rangle \quad (35)$$

で定義できる.

$i_C = (i_{C_1}, i_{C_2}), v_L = (v_{L_1}, v_{L_2})$ において

$$\begin{aligned} i_C + F_{CS} i_S &= \frac{d}{dt} [\hat{q}_C(v_C) + F_{CS} \hat{q}_S(v_S)] = C(v_C) \frac{dv_C}{dt} \\ v_L - F'_{\Gamma L} v_\Gamma &= \frac{d}{dt} [\hat{\phi}_L(i_L) - F'_{\Gamma L} \hat{\phi}_\Gamma(i_\Gamma)] = L(i_L) \frac{di_L}{dt} \end{aligned} \quad (36)$$

ここで

$$\begin{aligned} C(v_C) &= \frac{\partial \hat{q}_C}{\partial v_C} + F_{CS} \frac{\partial \hat{q}_S}{\partial v_S} F'_{CS} \\ L(i_L) &= \frac{\partial \hat{\phi}_L}{\partial i_L} + F'_{\Gamma L} \frac{\partial \hat{\phi}_\Gamma}{\partial i_\Gamma} F_{\Gamma L} \end{aligned} \quad (37)$$

とおいた．3.4 と Kirchhoff の法則から P を使った回路方程式は次式となる．

$$\begin{bmatrix} C(v_C) & 0 \\ 0 & -L(i_L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{v_C} \\ P_{i_L} \end{bmatrix} \quad (38)$$

ここでは回路の第一積分を特に取り出さずに表現した．したがって，回路方程式 (38) の階数は $n_C + n_L = (n_{C_1} + n_{C_2}) + (n_{L_1} + n_{L_2})$ である．

4 回路例

4.1 簡単な 2 自由度系

4.1.1 2つの LC 回路の結合系

図 1 のような簡単な回路を考えよう．この場合は拘束条件も第一積分もなく回路方程式は Kirchhoff の法則と素子特性からただちに求められる．

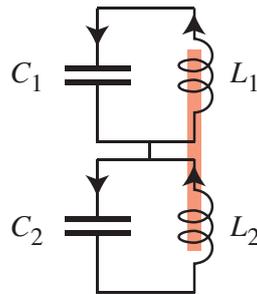


図 1 2自由度 LC 回路．

Kirchhoff の法則は

$$\begin{aligned} i_{C_1} - i_{L_1} &= 0 & i_{C_2} - i_{L_2} &= 0 \\ v_{C_1} + v_{L_1} &= 0 & v_{C_2} + v_{L_2} &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

キャパシタ特性を

$$v_{C_1} = g_1(q_{C_1}), \quad v_{C_2} = g_2(q_{C_2}) \quad (40)$$

インダクタ特性を

$$i_{L_1} = f_1(\phi_{L_1}), \quad i_{L_2} = f_2(\phi_{L_2}) \quad (41)$$

と仮定すると，系のエネルギー関数 $H(q_C, \phi_L)$ は

$$H(q_C, \phi_L) = \int g_1 dq_{C_1} + g_2 dq_{C_2} + f_1 d\phi_{L_1} + f_2 d\phi_{L_2} \quad (42)$$

となる．したがって回路方程式は次式となる．

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_{C_1} \\ q_{C_2} \\ \phi_{L_1} \\ \phi_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{q_{C_1}} \\ H_{q_{C_2}} \\ H_{\phi_{L_1}} \\ H_{\phi_{L_2}} \end{bmatrix} \quad (43)$$

4.1.2 接続関係で結合した LC 回路

図 2 の回路を考えよう．2 自由度の回路のトポロジーはこの接続と前小節の 2 つに限られることが簡単な試行で分かる．回路方程式は Kirchhoff の法則と素子特性からただちに求められる．

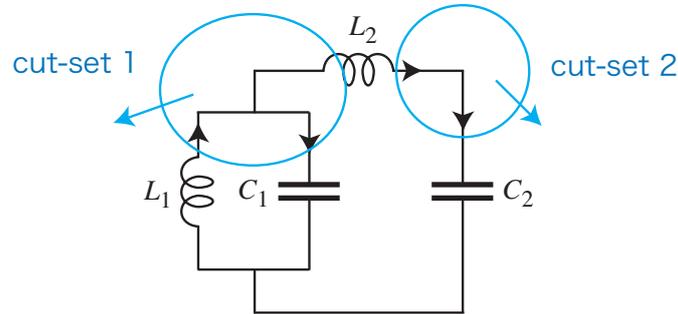


図 2 2 自由度 LC 回路その 2 .

Kirchhoff の法則は

$$\begin{aligned} i_{C_1} - i_{L_1} + i_{L_2} &= 0 & i_{C_2} - i_{L_2} &= 0 \\ v_{C_1} + v_{L_1} &= 0 & -v_{C_1} + v_{C_2} + v_{L_2} &= 0 \end{aligned} \quad (44)$$

キャパシタ特性を

$$v_{C_1} = g_1(q_{C_1}), \quad v_{C_2} = g_2(q_{C_2}) \quad (45)$$

インダクタ特性を

$$i_{L_1} = f_1(\phi_{L_1}), \quad i_{L_2} = f_2(\phi_{L_2}) \quad (46)$$

と仮定すると，系のエネルギー関数 $H(q_C, \phi_L)$ は

$$H(q_C, \phi_L) = \int g_1 dq_{C_1} + g_2 dq_{C_2} + f_1 d\phi_{L_1} + f_2 d\phi_{L_2} \quad (47)$$

となる．したがって回路方程式は次式となる．

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_{C_1} \\ q_{C_2} \\ \phi_{L_1} \\ \phi_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1 & -1 \\ & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \\ 1 & -1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{q_{e1}} \\ H_{q_{e2}} \\ H_{\phi_{L1}} \\ H_{\phi_{L2}} \end{bmatrix} \quad (48)$$

4.2 3自由度系

4.2.1 3自由度系

図3は標準型とも考えられる，3自由回路である．3つのLC回路を1点で結合した自明な3自由回路を除けば，可能な3自由回路はこの図の5つである．

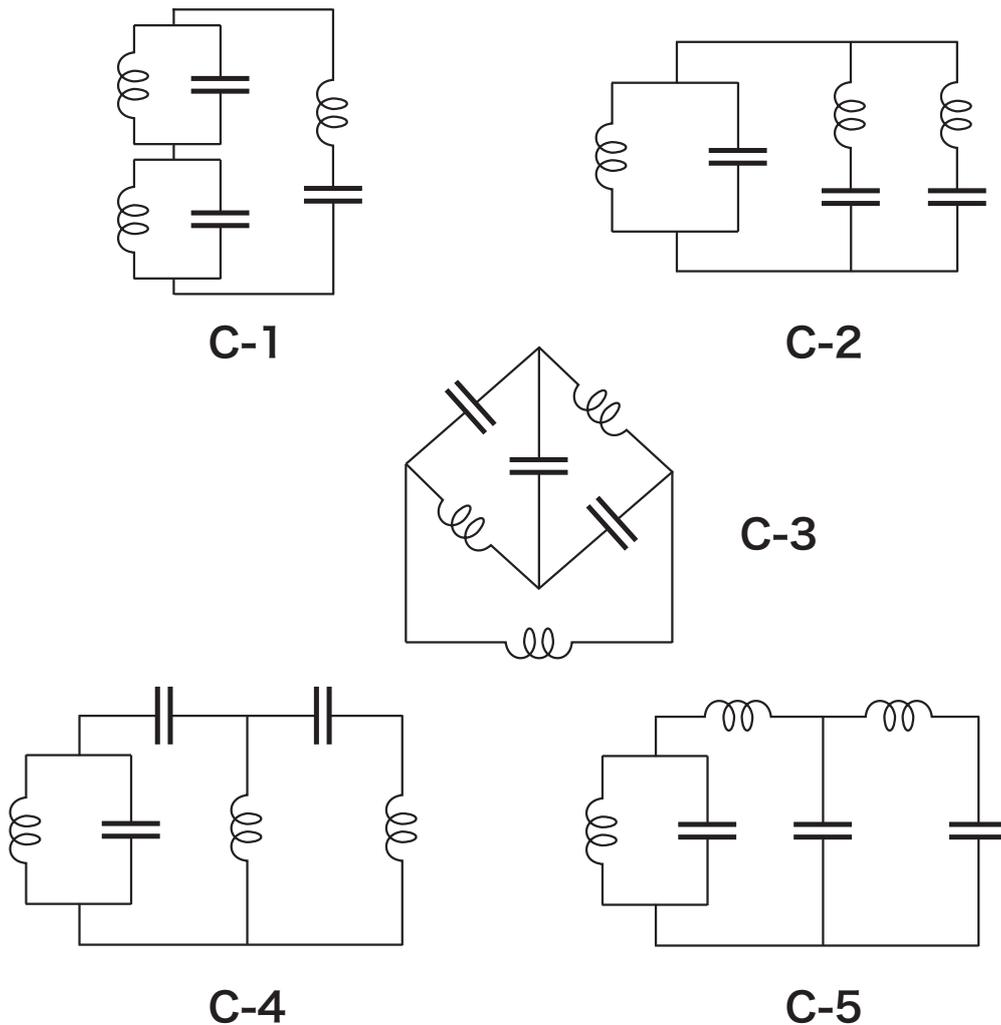


図3 3自由度LC回路．

4.2.2 C-5 の 3 自由回路

図 4 のような 3 自由回路を考えよう．この場合も拘束条件および第一積分のない回路である．回路方程式は Kirchhoff の法則と素子特性からただちに求められる． C -normal tree による Kirchhoff

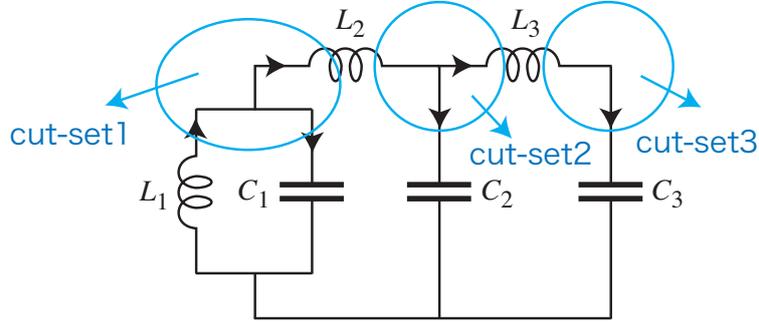


図 4 3 自由度 LC 回路 .

の法則は次式となる .

$$\begin{aligned}
 i_{C_1} - i_{L_1} + i_{L_2} &= 0 \\
 i_{C_2} - i_{L_2} + i_{L_3} &= 0 \\
 i_{C_3} - i_{L_3} &= 0 \\
 v_{L_1} + v_{C_1} &= 0 \\
 v_{L_2} - v_{C_1} + v_{C_2} &= 0 \\
 v_{L_3} - v_{C_2} + v_{C_3} &= 0
 \end{aligned} \tag{49}$$

したがって ,

$$F_{C_1 L_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

となる . また , L -normal tree より

$$N_{L_1 C_1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = F_{C_1 L_1}^{-1}$$

を得る .

キャパシタ特性を

$$v_{C_k} = g_k(q_{C_1}, q_{C_2}, q_{C_3}), \quad k = 1, 2, 3 \tag{50}$$

インダクタ特性を

$$i_{L_k} = f_k(\phi_{L_1}, \phi_{L_2}, \phi_{L_3}), \quad k = 1, 2, 3 \quad (51)$$

と仮定する（これらの関数の Jacobi 行列は対称正定値とする）と，系のエネルギー関数 $H(q_C, \phi_L)$ は

$$H(q_C, \phi_L) = \int g_1 dq_{C_1} + g_2 dq_{C_2} + g_3 dq_{C_3} + f_1 d\phi_{L_1} + f_2 d\phi_{L_2} + f_3 d\phi_{L_3} \quad (52)$$

から求められる．この積分は Jacobi 行列の対称性から積分路に依存せずに計算できる．

したがって回路方程式は次式となる．

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_{C_1} \\ q_{C_2} \\ q_{C_3} \\ \phi_{L_1} \\ \phi_{L_2} \\ \phi_{L_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ -1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & -1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{q_{C_1}} \\ H_{q_{C_2}} \\ H_{q_{C_3}} \\ H_{\phi_{L_1}} \\ H_{\phi_{L_2}} \\ H_{\phi_{L_3}} \end{bmatrix} \quad (53)$$

4.2.3 C-5 以外の 3 自由回路の回路方程式

同様な計算を行うと次の回路方程式を得る．図 3 の C-1 回路については

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_{C_1} \\ q_{C_2} \\ q_{C_3} \\ \phi_{L_1} \\ \phi_{L_2} \\ \phi_{L_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ -1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{q_{C_1}} \\ H_{q_{C_2}} \\ H_{q_{C_3}} \\ H_{\phi_{L_1}} \\ H_{\phi_{L_2}} \\ H_{\phi_{L_3}} \end{bmatrix} \quad (54)$$

図 3 の C-2 回路については

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_{C_1} \\ q_{C_2} \\ q_{C_3} \\ \phi_{L_1} \\ \phi_{L_2} \\ \phi_{L_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ -1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & -1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & -1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{q_{C_1}} \\ H_{q_{C_2}} \\ H_{q_{C_3}} \\ H_{\phi_{L_1}} \\ H_{\phi_{L_2}} \\ H_{\phi_{L_3}} \end{bmatrix} \quad (55)$$

図 3 の C-3 回路については

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_{C_1} \\ q_{C_2} \\ q_{C_3} \\ \phi_{L_1} \\ \phi_{L_2} \\ \phi_{L_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ -1 & -1 & 0 & & & \\ -1 & -1 & -1 & & & \\ 0 & -1 & -1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{q_{C_1}} \\ H_{q_{C_2}} \\ H_{q_{C_3}} \\ H_{\phi_{L_1}} \\ H_{\phi_{L_2}} \\ H_{\phi_{L_3}} \end{bmatrix} \quad (56)$$

