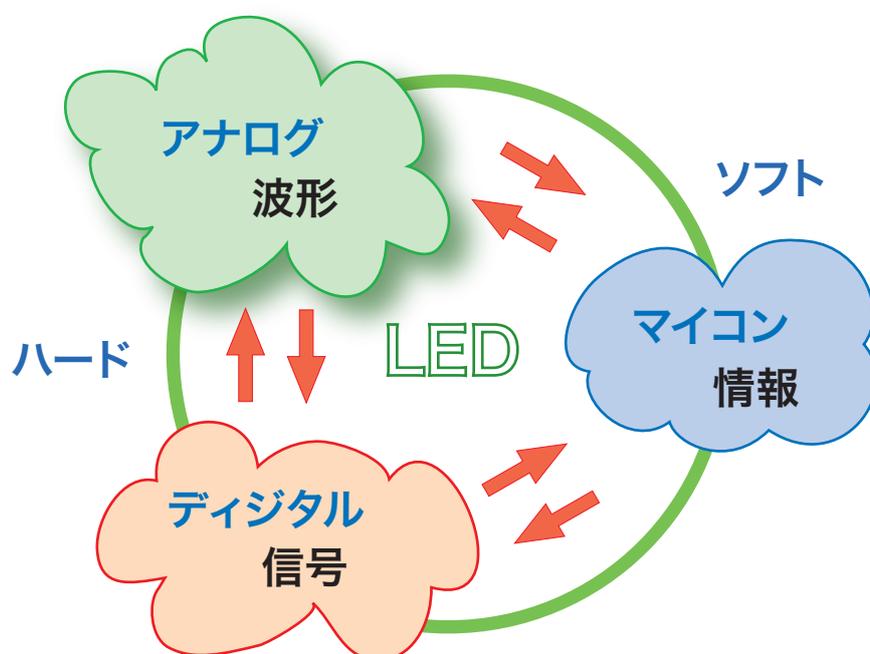


# LED を使いこなそう・実験ノート

## － アナログ編 －



2012

徳島大学開放実践センター  
公開講座

川上 博

# はじめに

このノートは、公開講座「LED（発光ダイオード）を使いこなそう：アナログ編」の講義ノートです。一応、このノートを読めば他の資料なしで実験内容が理解できるように基礎的な事柄を解説しました。

この講座の具体的な実験内容は、趣味の電子工作+ $\alpha$ といったところですが、5つほどLEDに関連したテーマを決めて実験し、その実験に使用した電子回路を解説しました。説明には、使った回路の機能を数式やグラフを使って解析する方法をとりました。

そのため、数式やグラフは初めてという受講生の方にはチンプンカンプンかも知れません。でも、気になさらないでください。理解の形態や程度は様々です。そして、どんな分野にも「ときめきのドラマ」があるものです。それに気づけば、分からない部分は適当に読み飛ばせばいいのです。いつか「ああそういうことか」と科学のおもしろさと平凡さにときめくことでしょう。

このノートは5つの章と1つの付録からできています。簡単に紹介しておきましょう。

第1章 LEDの点灯 点灯の基本回路をつくる実験です。これは、LEDと抵抗の直列回路にほかなりません。発光ダイオードを使う時はいつも抵抗さんと一緒に基本というわけです。

第2章 LEDの消灯 電池とLEDの基本回路の間にスイッチを入れる実験です。スイッチは機械式のものトランジスタを使った電子式のものを実験します。

第3章 LEDの点滅 スwitchの入れたり、切ったりを繰り返すとよいのですが、これは回路で実現します。それが方形波発振器です。そのためにオペアンプを使います。時間的にリズムをつくることは直流回路だけではできません。そこで登場するのがキャパシタ（コンデンサともいう）です。キャパシタは電気の素「電荷」を蓄積する素子で、蓄積には時間がかかることを使ってリズムをつくることを学びます。

第4章 LEDの調光 調光とは「明るさを調整する」ことです。明るくするにはLEDにより多くの電流を流し、暗くするには電流を少なくするとよいのですが…。LEDの特性で折れ曲がり付近を使うのは動作点が変わりやすく調整が難しいことが予想できます。そこで、別の方法がこの章では提案されています。PWMの方法です。この方法は、点滅速度を早くして我々の目には点滅を分からなくしておいて、光っている短い時間と消えている短い時間の比率を変える方法です。

第5章 1.5VでLEDを点灯する 低い電圧の電池でLEDを点灯するには、電圧を高くする回路が必要です。そのためにコイル（インダクタという）を使います。実はインダクタも直流回路では使わなかった回路素子です。磁気エネルギーを蓄える素子です。この章ではスイッチとインダクタを組み合わせた昇圧回路を解析しました。

ということで、LEDを使いこなそう：アナログ編では、

LEDの基本点灯回路（LED + 抵抗） + 電源

の2つのどちらかを目的にしたがって色々変えて実験していることが分かります。そして、それらの各要素が電子回路の基礎となっているように選択してあります。ですから、この講座を終わった時点で他の電子回路をみたときに、ああこれはあれだな、と自分で考えることができるようになれば素晴らしいと思います。

付録には、電気回路・電子回路がはじめてという方に回路の解説を入れました。ただ、これは現時点では未完成です。式を幾何学的に説明する手法を考えたのですが、いかんせん満足のゆく程度まで話をまとめるにはまだまだ時間がかかりそうです。私の最も楽しい時間はこのような「話をつくる」ためにボーとしている時間なのですが、今回は本文に時間を取られて付録がおろそかになってしまいました。

あ、そうそう。この講座はアナログ編となっていますが、以上の内容からすると「デジタル回路のためのアナログ技術」解説となっています。つまり、すべてを情報伝達という観点でみると、連続波形を扱う本当のアナログ技術ではなく、どちらかといえば離散波形を扱う技術を解説しているからです。これはまた、秋冬講座「LEDを使いこなそう：デジタル編」への橋渡しともなっています。そしてその先には、「マイコンをはじめよう」といった講座も予定されています。興味に合わせて聴講いただければ幸いです。

最後に、みなさんはどんな動機でこの講座を受講されたのでしょうか。そして、その目的に対して何か受講して得ることがあったのでしょうか。この講座を長続きさせるためにも、ぜひご意見をお聞かせください。

それでは、よいご旅行を

2012年5月26日

$\pi$  と  $i$  を掛け合わせた数で  $e$  を累乗し、1 を足すと 0 となる。

私はもう一度博士のメモを見直した。果ての果てまで循環する数と、決して正体を見せない虚ろな数が、簡潔な軌跡を描き、一点に着地する。どこにも円は登場しないのに、予期せぬ宙から  $\pi$  が  $e$  の元に舞い下り、恥ずかしがり屋の  $i$  と握手する。彼らは身を寄せ合い、じっと息をひそめているのだが、一人の人間が1つだけ足し算をした途端、何の前触れもなく世界が転換する。すべてが0に抱き留められる。

オイラーの公式は暗闇に光る一筋の流星だった。暗黒の洞窟に刻まれた詩の一行だった。そこに込められた美しさに打たれながら、私はメモ用紙を定期入れに仕舞った。

小川洋子著：博士の愛した数式，新潮社，2003

# 目次

第 1 章	LED の点灯：基本回路をつくる	1
1.1	実験 A1：LED 点灯の基本回路	1
1.1.1	回路図	1
1.1.2	回路部品とブレッド・ボード	2
1.1.3	部品（回路素子）を配線する	2
1.2	LED の電気特性を実測する	4
1.2.1	LED の回路素子としての記法	4
1.3	基本回路の解析	6
1.3.1	2つの関係式	6
1.3.2	消費電力	8
1.4	LED の直列接続と並列接続	9
1.4.1	LED の直列接続	9
1.4.2	LED の並列接続	10
1.4.3	3つの端子をもつ点灯回路	11
1.4.4	ツェナーダイオードによる定電圧回路	12
1.4.5	ダイオード特性：簡単なまとめ	14
第 2 章	LED の消灯：スイッチとトランジスタ	15
2.1	実験 A2：スイッチを加えた LED 点灯回路	15
2.1.1	回路図	15
2.1.2	部品を配線する	16
2.2	特性でみたスイッチと抵抗	16
2.2.1	スイッチの特性と電源の特性	16
2.2.2	抵抗の特性	19
2.2.3	トランジスタの特性曲線	22
2.3	トランジスタ・スイッチ	24
2.3.1	トランジスタをスイッチとして使う	24
2.3.2	光センサーをスイッチに使う	26
2.3.3	定電圧回路：3端子レギュレータ	28

2.3.4	タイマ IC:555 を使った点灯, 消灯回路 . . . . .	30
第 3 章	LED の点滅: 光のリズムをつくる	33
3.1	実験 A3: 358 を使った点滅回路 . . . . .	33
3.1.1	回路図 . . . . .	33
3.1.2	部品を配線する . . . . .	34
3.2	オペアンプとヒステリシス回路 . . . . .	35
3.2.1	オペアンプの特性 . . . . .	35
3.2.2	単電源で動作するオペアンプの回路 . . . . .	37
3.2.3	コンパレータとヒステリシス回路: シュミット回路 . . . . .	38
3.3	キャパシタと抵抗でリズムをつくる . . . . .	42
3.3.1	キャパシタの充電と放電 . . . . .	42
3.3.2	時定数と半減期 . . . . .	44
3.4	RC 方形波発振回路 . . . . .	46
3.4.1	発振回路の解析 . . . . .	46
3.4.2	発振波形の性質 . . . . .	48
3.4.3	論理回路素子を使った方形波発振回路 . . . . .	49
3.4.4	タイマ IC:555 を使った方形波発振回路 . . . . .	50
第 4 章	LED の調光: 明るさを制御する	53
4.1	実験 A4: 555 を使った調光回路 . . . . .	53
4.1.1	回路図 . . . . .	53
4.1.2	回路部品 . . . . .	54
4.2	調光のしくみ: 発振 + PWM (パルス幅変調) . . . . .	54
4.2.1	タイマー IC 555 を使った方形波発振回路 . . . . .	54
4.2.2	パルス幅変調: PWM(Pulse Width Modulation) . . . . .	58
4.2.3	視覚の性質を使う . . . . .	59
4.3	オペアンプを使った調光回路 . . . . .	59
4.3.1	LM358 のアペアンプを 2 つ使った調光回路 . . . . .	59
第 5 章	1.5V の電池で青色 LED を点灯する	61
5.1	実験 A5: 1.5V で青色 LED を点灯する回路 . . . . .	61
5.1.1	回路図 . . . . .	61
5.1.2	回路部品 . . . . .	62
5.2	インダクタの過渡現象 . . . . .	63
5.2.1	インダクタと抵抗の回路 . . . . .	63
5.2.2	チョッパ回路の性質 . . . . .	65
5.3	電圧を高くする回路: ブーストコンバータ . . . . .	67
5.3.1	昇圧回路の荒っぽい解析 . . . . .	67

---

5.3.2	電荷ポンプ方式の昇圧回路 . . . . .	70
付録 A	おためし回路論 . . . . .	71
A.1	おためし回路論って何なの . . . . .	71
A.2	直流回路とは . . . . .	72
A.3	LED を使いこなそうでは何をするのか . . . . .	76
A.4	回路の法則—素子の性質— . . . . .	77
A.4.1	素子の電流と電圧の向き . . . . .	77
A.4.2	電流と電圧の単位 . . . . .	77
A.4.3	線形抵抗—オームの法則— . . . . .	77
A.4.4	電圧源と電流源 . . . . .	79
A.4.5	非線形抵抗 . . . . .	79
A.4.6	結合抵抗 . . . . .	80
A.5	回路の法則—接続の性質— . . . . .	80
A.5.1	回路と向きをついたグラフ . . . . .	80
A.5.2	キルヒホッフの電流則 . . . . .	81
A.5.3	キルヒホッフの電圧則 . . . . .	82
A.6	回路方程式 . . . . .	82
A.6.1	方程式の個数について . . . . .	82
A.7	回路解析 . . . . .	84



# 第 1 章

## LED の点灯：基本回路をつくる

この章では、最も簡単で、かつ基本となる LED の点灯回路を取りあげる。合わせて、LED の電気特性を測定し、グラフに表すことを考える。その後、基本回路の解析を行い、保護抵抗の値を決める方法を身につける。最後に、LED を複数個点灯する場合の接続方法について考える。

キーワード：LED 点灯の基本回路，LED の電気特性，保護抵抗，直列接続，並列接続

### 1.1 実験 A1：LED 点灯の基本回路

#### 1.1.1 回路図

この実験 A1 では、LED を 1 個点灯する回路をつくる。図 1.1(a) の回路がその実験回路である。LED と抵抗および電池が直列につながっている。抵抗は、LED に過度の電流が流れないように入れる保護抵抗である。図 1.1(b) は図 (a) の回路を少し具体的に書き直した回路を示している。上下に示した赤線 (+) と青線 (-) は電池の + 極と - 極がつながった電源の線を表してい

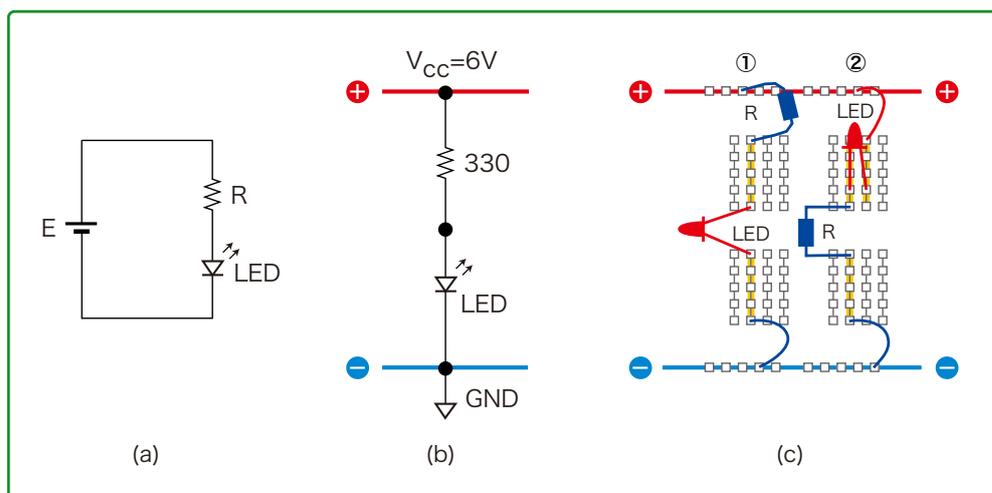


図 1.1 実験 A1. LED の点灯回路.

表 1.1 実験 A1 に使用する部品

部品名	規格	数量	メモ
LED	直径 5mm	6 個程度	色違いを 3 種類各 2 個程度 6[V] 電圧源用
抵抗	330Ω	3	
ブレッド・ボード	EIC-301	1	
ジャンパー線		数本	
電池	単 4 アルカリ乾電池	4 本	
電池ホルダー	単 4 電池 4 本用	1	

る\*1. 図 (c) では更に実際の配線に近い図を示した. この図には, 部品の配置や基板にある配線の穴などが書き込まれている. また, 配線①と②を比較すると, 部品の配置の順番が違っていてもよいことなども読み取れる.

### 1.1.2 回路部品とブレッド・ボード

#### 回路部品

この実験で使用する部品を表 1.1 に示した. 色々な LED について実験するには LED や抵抗はまとめて購入しておくとう便利である. ここでは必要最小限の個数を示した. また, 次節で行う LED の電気特性を測るためには保護抵抗として 100Ω ~ 1kΩ の抵抗を何種類か用意しておく必要がある.

#### ブレッド・ボード

実験で使う配線のための基板は, 図 1.2 に示したようなブレッド・ボードと呼ばれるボードである. 上下の部分に横長につながった直線上の穴は, それぞれ電源 (+) と (-) に使うとう便利である. 中央に 2 行ある穴の列は, 5 個ずつ 1 つのクリップ状金属でつながっていて, これらの穴に電子部品の端子線を差し込んで回路を組み立ててゆく. 大小いろいろなブレッドボードがあるので, 回路の規模に応じて適当なボードを使うとうよい.

### 1.1.3 部品 (回路素子) を配線する

具体的に回路を組み立ててみよう. 回路どおりに部品が接続できていれば, 配置はどのようになってもよい. 配線ミスが発見しやすく, 後で見て分かりやすい配線となるよう心がけよう. おおざっぱに配線の手順は次のようにすればいい.

1. 回路図を読む. ブレッドボード上の配線図を適当な紙に鉛筆で書き写しておく.

\*1 回路を配線する基板には, いろいろな回路部品に供給する電源の配線をわかり易く配線しておくとう便利である.

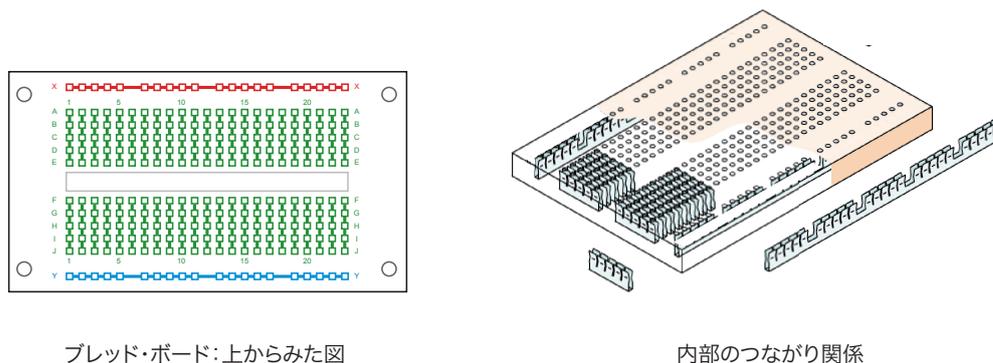


図 1.2 ブレッドボードの構造・つながり具合.

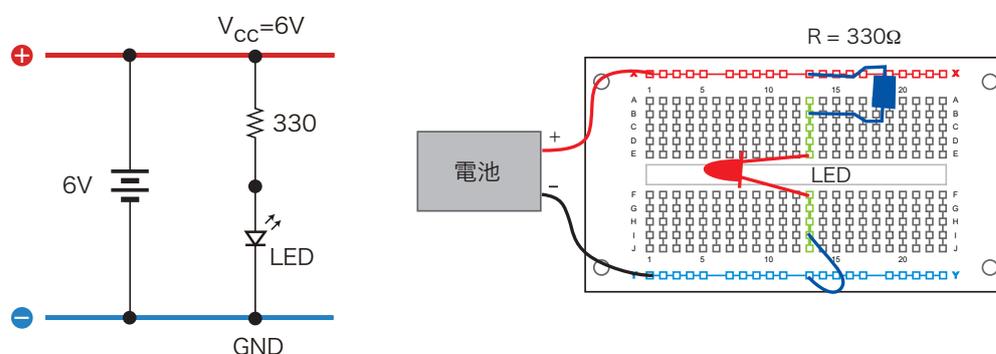


図 1.3 ブレッドボード上に配線する.

2. 部品をそろえる. 抵抗はカラーコード表を手元に置いておくと分かりやすい.
3. 配線する. 電源 + からのジャンパー線は赤色, - からの線は黒色など, 機能別に配線の色を違えておくと見分けが付きやすくなる. ボード上で配線が終わると, 配線図の対応する線を赤鉛筆で塗りつぶし, 配線済みであることが分かるようにする.
4. 信号が左から入力されて, 主回路で処理され右に出力されるよう, 部品の配置や配線を工夫しよう. 1. で回路図を写すとき部品をブレッドボード上でどう配置するかイメージしておき, 必要ならば回路図を書き直して入力から出力までの機能がわかりやすい回路図をつくり, その後配線に取りかかるといいであろう.
5. 配線が正しくできているかどうか確認する.
6. 電池をブレッドボードに配線する. 回路が目的どおり動作していることを確認する\*2. 電池の + 端子と - 端子を短絡させないように注意すること.

\*2 色々なチェックが必要かも知れないが, LED に流れる電流が仕様どおりであることをチェックするのが1番大切であろう. これには保護抵抗 330Ω の両端の電圧を測定し, これを抵抗値で割ればよい.

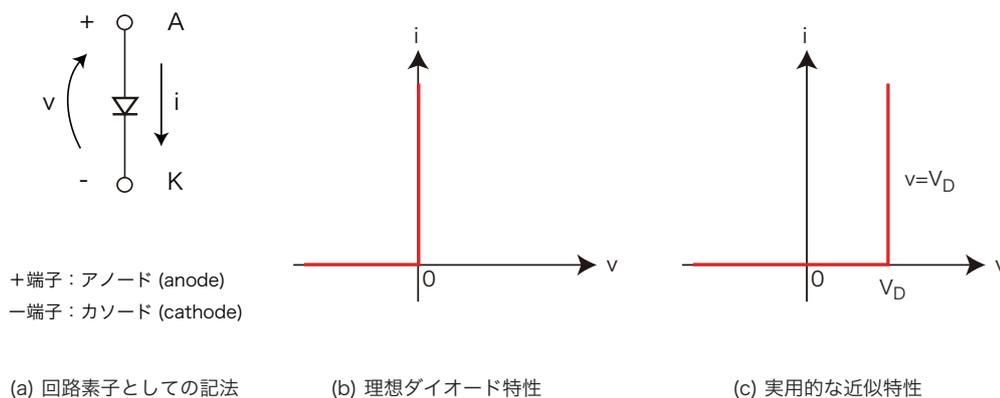


図 1.4 ダイオードの記法とその特性曲線.

## 1.2 LED の電気特性を実測する

### 1.2.1 LED の回路素子としての記法

発光ダイオード：LED(Light Emitting Diode) はダイオード (diode) と呼ばれている電子部品のひとつである。単体のダイオードは、他の素子と接続するため2本の導線（端子という）が出ており、これらの端子間に電圧を与えると電流が流れるようになっている。2つの端子は、それぞれアノード (anode) とカソード (cathode) と名付けられている。アノードが+となるようにアノード・カソード間に電圧を与える（順方向電圧を与えるという）と電流が流れる。しかし逆方向に電圧を与える（逆方向電圧を与えるという）と電流は流れない。この電気的性質がダイオードという名前の由来である。

ダイオードの回路素子としての記法は図 1.4(a) に示したように、中抜き矢印に直交した線分をつけた図を用いる。LED の場合はこの記法に更に光が放出されている意味合いで2本の小さい矢印を付した記法が使われている。たとえば、図 1.1 参照。このノートでは文脈からわかる場合は2本の小さい矢印を省略した場合もあるので注意してほしい。

また、ダイオードは抵抗に分類される素子のひとつでもある。一般に、回路素子としての抵抗とは「素子にかかる電圧  $v$  と素子を流れる電流  $i$  の間に関数関係が成り立つ素子」のことである。たとえば、通常の抵抗は特性曲線が原点を通る直線となる。すなわち、抵抗を流れる電流  $i$  と抵抗の両端にかかる電圧  $v$  の関係が、 $v = Ri$  のように比例の関係となる<sup>\*3</sup>。

一方、ダイオードの電気的性質は、ダイオードを流れる電流  $i$  とダイオードの両端にかかる電圧  $v$  の関係が線分をつなぎ合わせたような関数となる<sup>\*4</sup>。この関係式のことをダイオードの特性、または特性曲線という。この特性は、 $(v, i)$  で表される平面上のグラフとして表すと分かりやすい。

\*3 この関係をオームの法則という。

\*4 部分的には指数関数で表現できる部分もあるが電圧電流の広い範囲では折れ曲がった曲線にみえる。

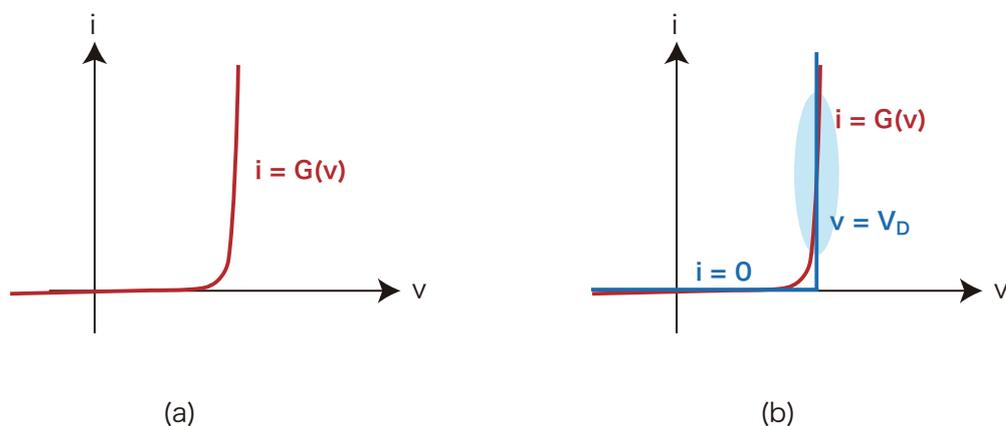


図 1.5 LED の特性曲線.

図 1.4(a) に示した電圧と電流を用いて,

- $v = 0$  ( $i > 0$  のとき);  $i = 0$  ( $v < 0$  のとき)

の性質をもつダイオードを理想ダイオードという. 図 1.4(b) 参照. LED を含む実際のダイオードの特性は, 理想ダイオードのそれを  $v$  軸方向に並行移動させた特性で近似できる場合が多い. 図 1.4(c) 参照. このことについて以下の小節で概説する.

### LED の電気特性

既に述べたように, LED の特性は, 概略  $i = 0$  の直線と  $v = V_D$  (一定) の直線を交点付近でないで折れ曲がった曲線となっている. 図 1.5 参照. このため, 電圧の大きさ (方向とっていい) によって電流が流れないことがある. この電流の流れに方向性が生ずることが LED の電気特性の特徴のひとつである.

さて, LED では順方向に電圧をかけていった場合に, 流れる電流が数 mA から数十 mA の部分でダイオードから光が放出されるようになる. これを利用するように作られたダイオードが発光ダイオード: LED (Light Emitting Diode) である.

したがって, 我々がこの講座全体を通じて利用する LED の特性は, この発光する直線部分である. すなわち, 点灯回路の設計には LED の曲線全体を知る必要はなく, 発光部分の直線で近似できる狭い範囲の特性のみが分かれば十分である. 図 1.5(b) の青色で着色した部分を参照.

### 特性の実測

ここではデジタルマルチメータのみを用いて LED の特性曲線を実測してみよう. この方法により LED の点灯回路に必要な特性の部分を実測的に求めることができる.

1. まず, 使用する抵抗の値をマルチメータで測定しておく. ここでは次の 4 個の抵抗:  $R_1 = 100\Omega$ ,  $R_2 = 200\Omega$ ,  $R_3 = 330\Omega$ ,  $R_4 = 680\Omega$  を用いた. 手元に用意したそれぞれの抵抗を 3 桁まで測ってみると,  $R_1 = 99.7\Omega$ ,  $R_2 = 200\Omega$ ,  $R_3 = 328\Omega$ ,  $R_4 = 668\Omega$  で

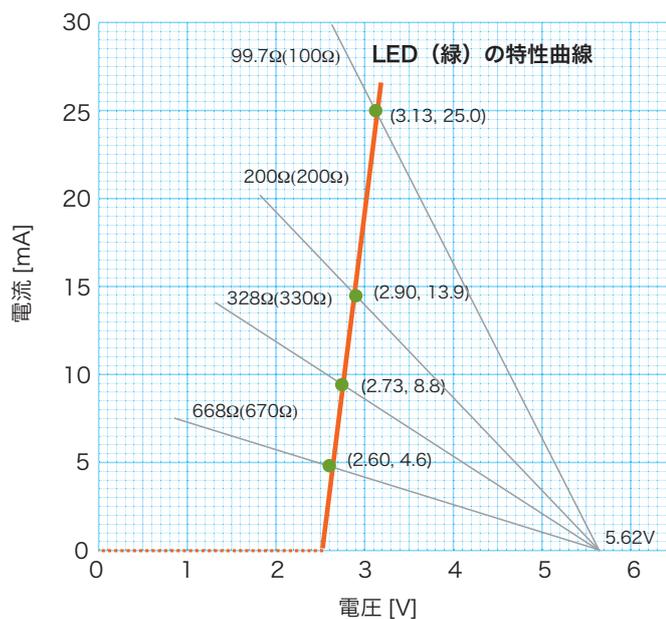


図 1.6 LED の特性曲線の実測.

あった.

2. 使用する 6V の電池の電圧も測っておく. この電圧を  $E[V]$  としよう. 用意した電池の場合, かなり使用したものであったので  $E = 5.62[V]$  であった.
3. 特性を求めたい LED と抵抗を直列に接続し, 電源につなぐ.
4. 抵抗  $R_k$  の電圧を測定し, これを  $V_{Rk}$  としよう. これより, 回路を流れる電流  $i_k$  は  $i_k = \frac{V_{Rk}}{R_k}$  となる. また, LED にかかる電圧  $v_k$  は,  $v_k = E - V_{Rk}$  となる. したがって, 抵抗  $R_k$  をつないだ場合の LED の両端の電圧と LED を流れる電流は, 電圧と電流の平面上の点  $(v_k, i_k)$  として求めることができる. これを 4 つの抵抗について求め, 直線で結べば特性の近似曲線が得られる. 図 1.6 に結果を示した. なお,  $i = 0$  の点線の部分は測定も何もしていないが折れ線近似特性ということで付加しておいた.

## 1.3 基本回路の解析

### 1.3.1 2つの関係式

それでは LED の基本点灯回路を解析しよう. 回路の解析とは, 回路を流れる電流や素子にかかる電圧を具体的に計算することをいう. 実際, 電池と LED を用意したとき, 抵抗値を幾らにすれば必要な電流を得ることができるかといった点が解析したい事項である.

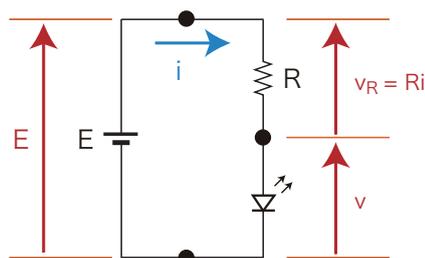


図 1.7 基本回路.

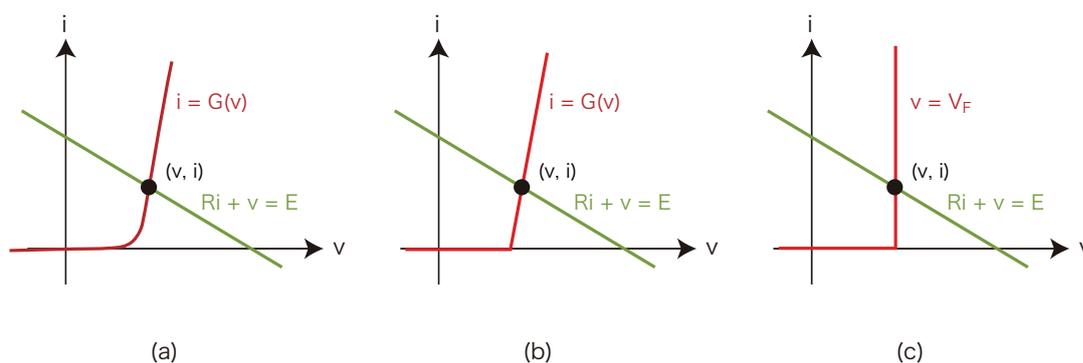


図 1.8 基本回路の動作点を見つける.

できるだけ厳密に解析するには

図 1.7 の点灯基本回路を考える. 図中に示した記号を用いて, 電圧の間に成り立つ関係式は次式となる<sup>\*5</sup>.

$$Ri + v = E \quad (1.1)$$

また, LED の特性を次式で表すことにする<sup>\*6</sup>.

$$i = G(v) \quad (1.2)$$

これら 2 つの関係式を何らかの方法で解くと, その解として回路の電圧, 電流を求めることができる. 図式的に解くには, 式 (1.1) と式 (1.2) をグラフで表わすと, この 2 つのグラフの交点が解を与える. 図 1.8(a) の点  $(v, i)$  がこの解である. この方法は最も分かりやすいので, このノートではこれからも多用することとしたい.

<sup>\*5</sup> この関係式はキルヒホフの電圧法則から導かれる. また, この式が表す直線は負荷線 (load line) と呼ばれている.

<sup>\*6</sup> LED を流れる電流が LED の電圧の関数として表されているとき, この素子は電圧制御型の抵抗であるという. 式 (1.2) は形式的に書いただけで, 実際に解がえられる部分はむしろ,  $v = f(i)$  と電流制御型の抵抗と考えた方が適切である. 特に, 特性を折れ線で近似した場合は, 折れ線の各部分の線分は電圧制御型あるいは電流制御型特性として関数表現できても全体は 1 つの関数で表現できない場合が一般的である. たとえば, 図 1.8(a), (b) の関数は電圧制御型として表現できるが, (c) の特性は  $v, i$  どちらの変数も独立変数として使うことができない.

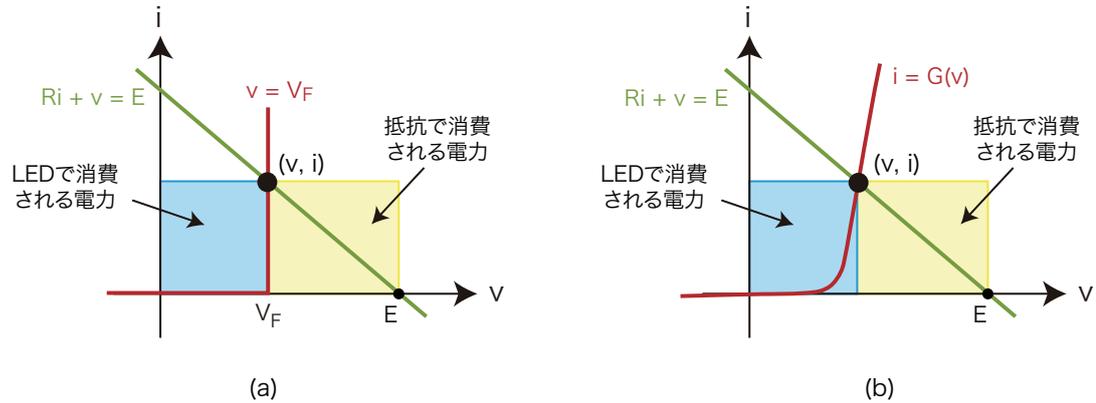


図 1.9 各素子の電力. (a) 折れ線近似特性の場合. (b) 一般の特性の場合.

直線で近似すると

我々が興味のある解が得られる LED の特性の部分は、 $i > 0$  の部分であるので、この部分を直線で近似した場合を考えよう。すると、得られる解はほぼ先ほど求めた解と同じとなる。つまり、特性を解が得られるであろう部分で直線と見なして解いてもよいということが分かる。図 1.8(b) 参照。

更に抵抗（傾き）を無視すると

それならば、もう少し大胆に近似して LED の特性を電池の特性と考えて解いてみよう。この場合は、式 (1.2) を

$$v = V_F \quad (i > 0) \quad (1.3)$$

と考えることである。LED にかかる電圧は式 (1.3) と解かれた形となっており、これを式 (1.1) に代入して

$$i = \frac{E - V_F}{R} \quad (1.4)$$

と求めることができる。図 1.8(c) 参照。

### 1.3.2 消費電力

ある回路素子で消費される電力 (power)  $p[W]$  は、素子を通る電流  $i$  と素子にかかる電圧  $v$  の積  $p = vi$  で定義される。ここでは、LED 点灯回路の電力について考えておこう。各素子の電力を近似解である式 (1.3) と式 (1.4) を使って計算してみよう。

電池から供給する電力 この電力を  $P_E$  とすれば、 $P_E = E \times i = E \frac{E - V_F}{R}$  となる。

LED で消費される電力 この電力を  $P_L$  とすれば、 $P_L = V_F \times i = V_F \frac{E - V_F}{R}$  となる。

保護抵抗で消費される電力 この電力を  $P_R$  とすれば、 $P_R = (E - V_F) \times i = (E - V_F) \frac{E - V_F}{R}$

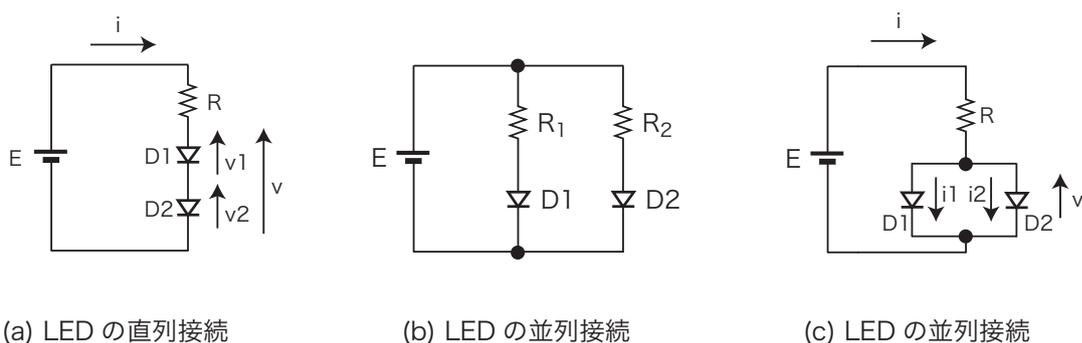


図 1.10 LED を 2 個点灯する直列回路と並列回路.

となる.

これらの関係式は、電圧と電流の平面で、式 (1.1) と式 (1.2) のグラフと合わせて考えると分かりやすい。この平面では点  $(v, i)$  が表す電力が、この点と原点を対角線とする長方形の面積で表される。図 1.8(a) 参照。なお、LED の特性曲線が一般の場合には図 1.8(b) となる。

ここで、関係式

$$\text{電池から供給する電力} = \text{LED で消費される電力} + \text{保護抵抗で消費される電力} \quad (1.5)$$

となっていることに注意しよう。また、LED から光エネルギーとして取り出されるエネルギーの流れは、LED で消費される電力の一部であることにも注意しよう。

## 1.4 LED の直列接続と並列接続

この節では LED を複数個点灯する回路を考える。2 個の LED を点灯する最も簡単な場合として、図 1.10 に示した直列回路や並列回路が考えられる<sup>\*7</sup>。この図 (b) の場合は、電源の電池に対してこれまで考えてきた基本回路が 2 つ並列に接続された回路なので、基本回路の解析法がそのまま適応できる。すなわち、2 つの LED を流れる電流は、2 つの抵抗  $R_1, R_2$  を調節することによって望む値に設定することができる。そこで、以下図 (a) と (c) の場合について考えてみよう。

### 1.4.1 LED の直列接続

図 1.10(a) の回路を考えよう。2 つの LED には同じ電流  $i$  が流れる。それぞれの LED にかかる電圧を図に示したように  $v_1, v_2$  としよう。また、これらの和を  $v$  とおく。すなわち、

$$v = v_1 + v_2 \quad (1.6)$$

<sup>\*7</sup> 2 個の場合を考えておくと一般個数の場合も同様に考察できるので、実は有限個数の点灯回路を考えたことになっている。

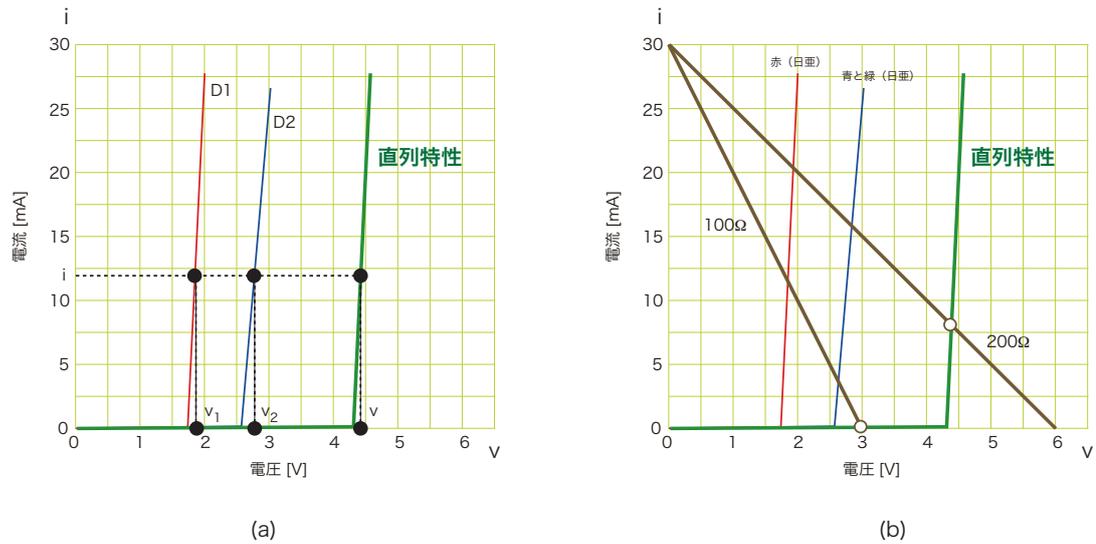


図 1.11 直列特性の求め方 (a) と回路の動作点の求め方 (b).

と置く．ここで  $(v, i)$  の関係をグラフでみてみよう．2つの LED の特性は横軸方向に足し合わされて新しいグラフ（直列特性とも呼んでおく）を描くことができる．これは回路全体からみると2つの直列 LED を1つの合成された LED とみなすことである．図 1.11(a) 参照．

さて，回路の電圧方程式は

$$E = Ri + v_1 + v_2 = Ri + v \quad (1.7)$$

となる．そこで式 (1.7) の直線を描くと直列特性との交点として回路の動作点\*8が求められる．この結果から，電池の電圧は直列特性の折れ点の電圧よりも大きくなければ LED は点灯しないということが分かる．たとえば，図 1.11(b) より，電池の電圧が 3[V] の場合，LED は点灯しない．

#### 1.4.2 LED の並列接続

図 1.10(c) の回路を考えよう．この回路では2つの LED に同じ電圧  $v$  が引加される．他方，電流は2つの LED に分かれて流れるので次の関係式が成り立つ．

$$i = i_1 + i_2 = G_1(v) + G_2(v) \quad (1.8)$$

ここに， $G_1, G_2$  はそれぞれの LED の特性とする．この関係をグラフでみると電圧  $v$  のとき，2つの特性を縦に足し合わせた特性となる．これを並列特性と呼ぶことにしよう．ただ，折れ線近似ではこのグラフの足し合わせが図上で表しにくいので作図は省略してある．図 1.12 参照．

さて，回路の電圧方程式は

$$E = Ri + v = R(i_1 + i_2) + v \quad (1.9)$$

\*8 回路方程式の解は，もとの回路で考えると電流電圧がその値で動作していることに対応するので動作点ともいう．

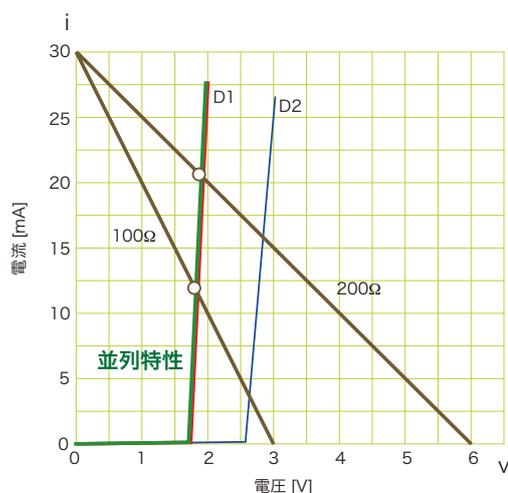


図 1.12 並列特性と回路の動作点.

となる。このグラフを並列特性と合わせて描き交点を求めると動作点が決定できる。図 1.12 参照。

この図から分かることとして、2つの LED に流れる電流は一般に著しく異なるであろうということである。たとえば、図 1.12 の場合、D2 の LED は  $i_2 = 0$  となって、6[V] あるいは 3[V] いずれの電源を用いても点灯しない。

このことから、この並列回路は抵抗が1つですむという点で消費電力を減らすことはできるものの、2つの LED を同じように点灯することが極めて難しい。このため、この回路の利用は制限されたものとなる。通常は、図 1.10(b) の回路を用いるとよい。

### 1.4.3 3つの端子をもつ点灯回路

直列回路と並列回路を組み合わせるといろいろな点灯回路をつくることができる。ここでは、1つの例として図 1.13 の回路を考えることにしよう。端子 A, B, C は、電源電圧  $V_{CC}$  をつなぐか、開放のままにしておくか、あるいは接地するかのいずれかにするものとする。各端子を適当に接続するとどの LED が点灯するであろうか。

この問題を、図に示した具体的な接続例でみてみよう。この例では端子 A を電源につなぎ、端子 B を開放して、端子 C を接地している。次の結果をみる。

- 端子 A から端子 C に至る回路で LED が導通する道は、 $A - R - D_1 - D_3 - R - C$  と  $A - R - D_5 - R - C$  であり、2つの LED  $D_1$  と  $D_3$  が直列につながり、これに並列に  $D_5$  がつながった LED のみの回路ができている。
- 他の LED はすべて逆方向に電圧がかかるので開放状態と考えてよい。
- 具体的に、 $V_{CC} = 3[V]$ 、 $R = 200\Omega$  で、LED の特性がツェナーダイオードに示した場合を考えよう。
- LED の特性から折れ点の電圧が 2.5[V] なので、電池の電圧  $V_{CC}$  が 3[V] 場合、直列 LED

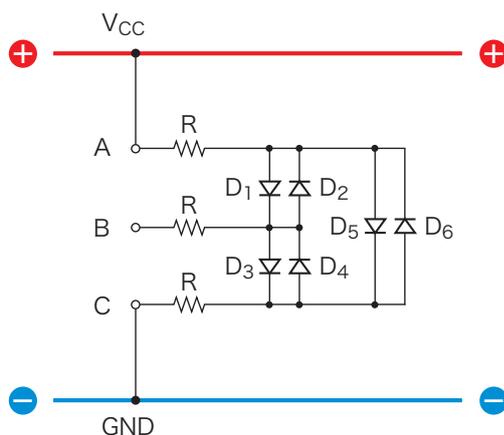


図 1.13 3つの端子 A, B, C のある LED の点灯回路.

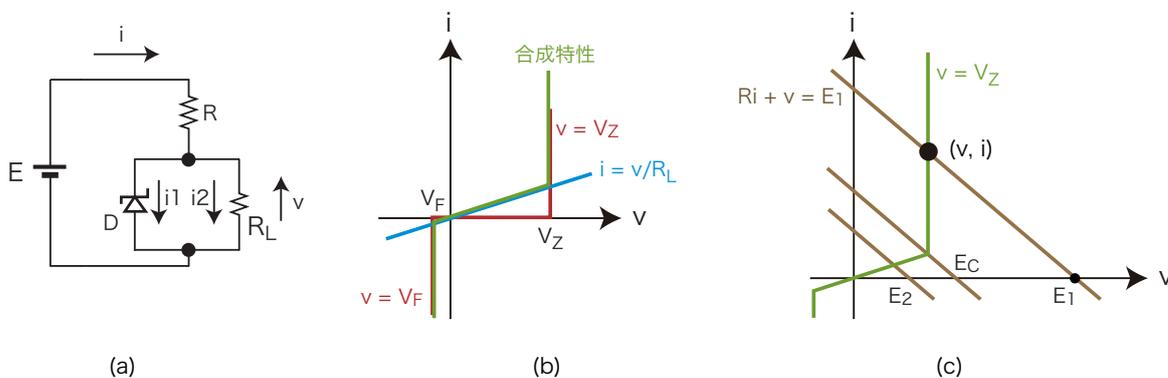


図 1.14 ツェナーダイオードによる定電圧回路 (a). ツェナーダイオードと抵抗の合成特性 (b). 動作点解析 (c).

の  $D_1$  と  $D_3$  は点灯できない.

- $D_5$  は保護抵抗  $2R = 400\Omega$  のもとで点灯する.

このことから、この接続では  $D_5$  のみが点灯することが分かる.

#### 1.4.4 ツェナーダイオードによる定電圧回路

一般にダイオードは、電圧を逆にかけると最初電流はほとんど流れないが、逆電圧が大きくなるとある電圧  $-V_Z$ <sup>\*9</sup> で急に電流が流れるようになる。この電流が流れる部分は定電圧性を示すのでこれを利用するために設定されたダイオードがツェナーダイオードである。図 1.14(a) のダイオードの記号、および (b) の赤い特性を参照。

さて、図 1.14(a) の回路を解析しよう。この回路は定電圧回路として知られている。このノー

<sup>\*9</sup> この電圧はツェナー電圧、ツェナー降伏電圧、アバランシュ降伏電圧などと呼ばれている。逆に電圧をかけるので符号は + で扱うことが多い。

トでここで取り上げる理由は、ツェナーダイオードと普通の線形抵抗が並列接続された抵抗の合成抵抗を求めることにある\*<sup>10</sup>。まず、ダイオードはアノードが-にカソードが+に電圧がかかるように接続されている\*<sup>11</sup>。負荷抵抗  $R_L$  とダイオードの合成抵抗は図 (b) の緑の折れ線となる。これは、式 (1.8) にしたがって赤のダイオード特性と青の抵抗を足し合わせるとつくることができる。

図 1.14(a) の回路に示した変数を使って、次式はいつも成り立っている。

$$E = Ri + v \quad (1.10)$$

したがって、この直線と合成抵抗の折れ線の交点が動作点といえる。図 1.14(c) 参照。ここでは  $v > 0$  の場合をみておこう。合成抵抗の折れ曲がった点より式 (1.10) の直線が上に位置する場合とそうでない場合に分けて考えるとよい。この折れ曲がり点は、2つの直線

$$\begin{aligned} i &= \frac{v}{R_L} \\ v &= V_Z \end{aligned} \quad (1.11)$$

の交点である。この交点はしたがって、

$$(v, i) = \left( V_Z, \frac{V_Z}{R_L} \right) \quad (1.12)$$

となり、その時の電池の電圧  $E_c$  は

$$E_c = \left( 1 + \frac{R}{R_L} \right) V_Z \quad (1.13)$$

となる。

$E \geq E_c$  の場合

この場合にツェナーダイオードにかかる電圧は常に  $v = V_Z$  (一定) であり、動作点は

$$(v, i) = \left( V_Z, \frac{E - V_Z}{R_L} \right) \quad (1.14)$$

となる。負荷抵抗  $R_L$  にかかる電圧も  $V_Z$  なので、定電圧で負荷に電源を提供している状態を表している。このための条件が  $E \geq E_c$  といえる。

$E \leq E_c$  の場合

この場合、 $v \leq V_Z$  であり、ツェナーダイオードには電流が流れない。したがって、回路は電池に直列に抵抗  $R$  と  $R_L$  がつながった回路となる。したがって動作点は

$$(v, i) = \left( \frac{R_L}{R + R_L} E, \frac{E}{R + R_L} \right) \quad (1.15)$$

となる。

\*<sup>10</sup> 1.4.2 で取り上げた並列接続の場合の合成抵抗を求める問題の演習となっている。

\*<sup>11</sup> 逆バイアスに接続するということもある。

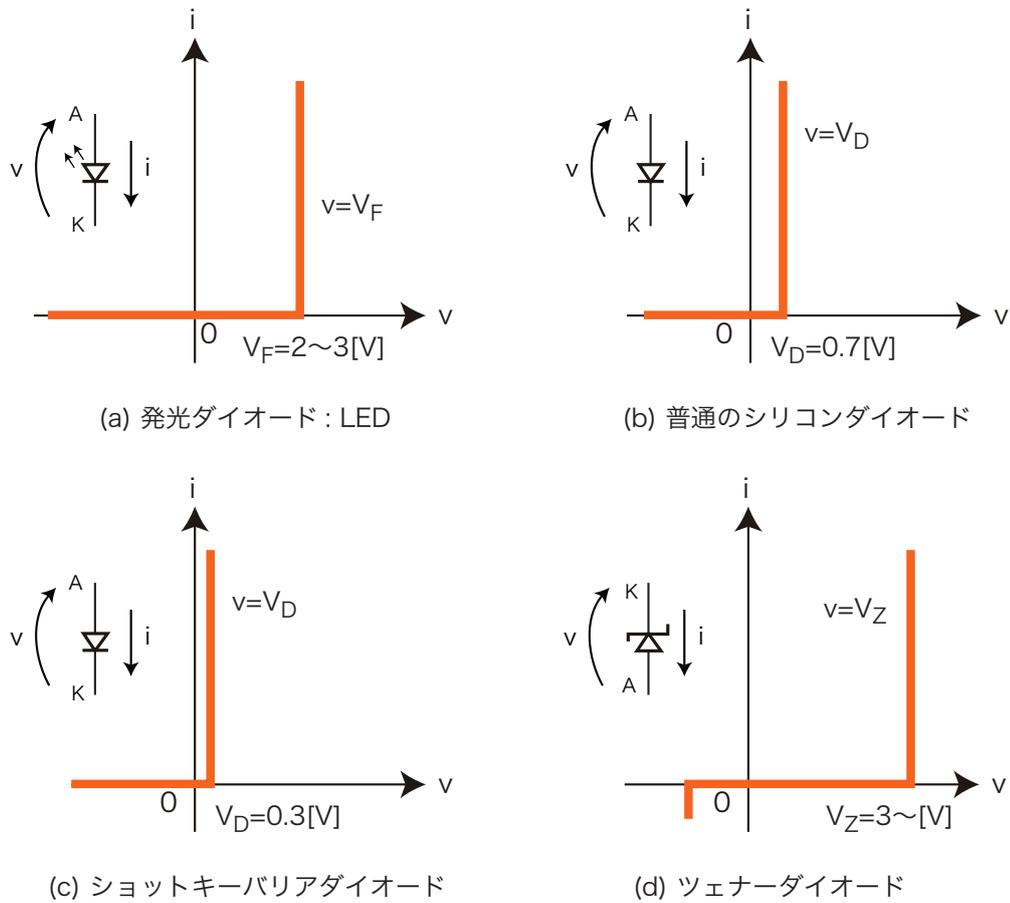


図 1.15 代表的なダイオードとその折れ線近似特性.

### 1.4.5 ダイオード特性：簡単なまとめ

図 1.15 に 4 つの代表的なダイオードの特性をまとめておいた。

LED：発光ダイオード 順方向電圧  $V_F$  は、赤、橙、黄色 LED が 2.0[V] 前後、緑、青、白色で 2[V] から 3.7[V] 程度である。

普通のダイオード シリコンのダイオードで順方向電圧  $V_D$  は、0.7[V] 程度である。

ショットキーバリアダイオード 順方向電圧が小さくなるように設計されている。 $V_D=0.3[V]$  程度である。

ツェナーダイオード 逆向きに電圧をかけて使う。ツェナー電圧  $V_Z$  には色々な値のものがある。

## 第2章

# LED の消灯：スイッチとトランジスタ

この章では、LED の点灯回路にスイッチを加えた回路をとりあげる。機械的なスイッチをトランジスタを用いた電子スイッチで置き換えることも考える。トランジスタのスイッチとしての特性をグラフを使って理解し、回路設計に役立てる。

キーワード：スイッチの特性、トランジスタの近似特性、いろいろな抵抗の電気特性

### 2.1 実験 A2：スイッチを加えた LED 点灯回路

#### 2.1.1 回路図

この実験 A2 では、実験 A1 の LED 点灯回路にスイッチを加えた回路をつくる。図 2.1(a) の回路がその実験回路である。

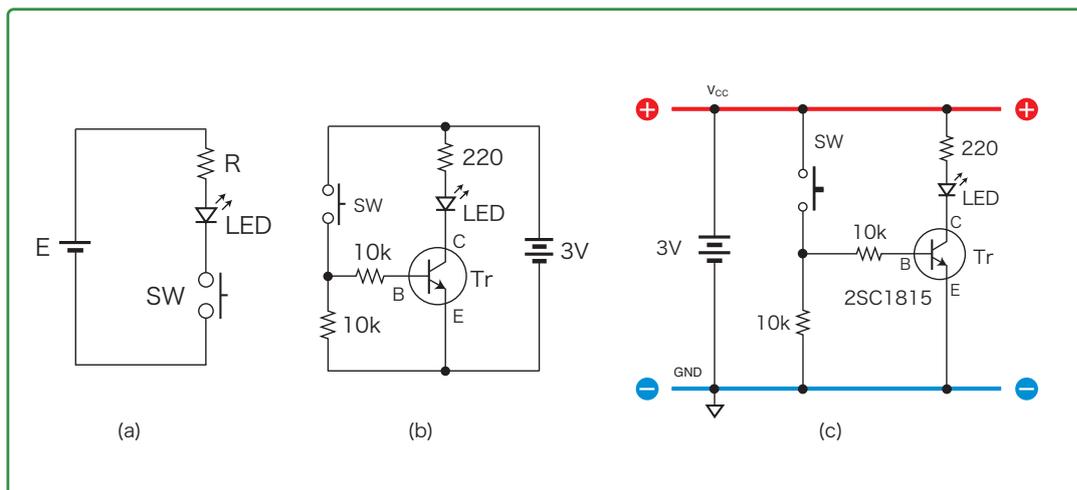


図 2.1 実験 A2. スwitchを加えた LED の点灯回路.

スイッチ SW をおした時に回路が閉じて LED が点灯する。また、図 2.1(b)(c) は図 (a) の回路のスイッチをトランジスタで置き換え、電子式スイッチとした回路を示している。この回路もスイッチ SW を閉じるとトランジスタ Tr のベース端子 B につながる 10kΩ の抵抗に電流が流

れ、コレクタ端子 C とエミッタ端子 E が導通して LED が点灯する。

## 2.1.2 部品を配線する

### 回路部品

この実験で使用する部品を表 2.1 に示した。

表 2.1 実験 A2 に使用する部品

部品名	規格	数量	メモ
LED	直径 5mm	1	色は何でも可
抵抗	220Ω	1	
抵抗	10kΩ	2	
トランジスタ	2SC1815	1	
トグルスイッチ		1	
ブレッド・ボード	EIC-301	1	
ジャンパー線		数本	
電池	単 4 アルカリ乾電池	2 本	3[V] 電圧源用
電池ホルダー	単 4 電池 2 本用	1	

### 部品を配線する

この実験で新しく使用する部品は、タクトスイッチとトランジスタである。これらの端子のつながり具合や名称を図 2.2(a)(b) に示した。

部品をブレッドボードに配線した回路の配線例を図 2.3 に示した。

## 2.2 特性でみたスイッチと抵抗

### 2.2.1 スwitchの特性と電源の特性

#### スイッチの特性

スイッチの特性をスイッチを流れる電流  $i$  とスイッチを横切ってスイッチにかかる電圧  $v$  の関係でみてみよう。図 2.4(a), (b) 参照。つぎの性質が読み取れる。

- スwitchが閉じたとき (スイッチが ON のとき) : 電流は自由に流れ、電圧は 0 なので、 $v = 0$  の直線で表される。
- スwitchが開いたとき (スイッチが OFF のとき) : 電圧は何でもよく、電流は流れない。すなわち、 $i = 0$  の直線で表される。

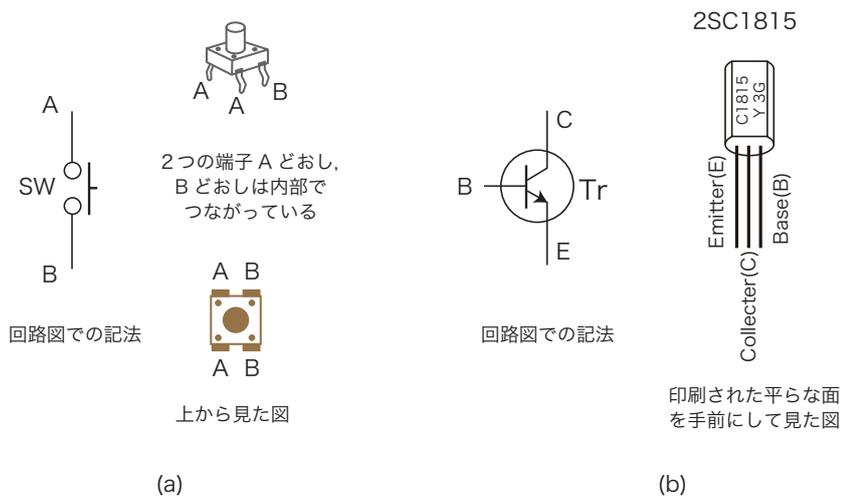


図 2.2 押しボタンスイッチ (a) とトランジスタ (b).

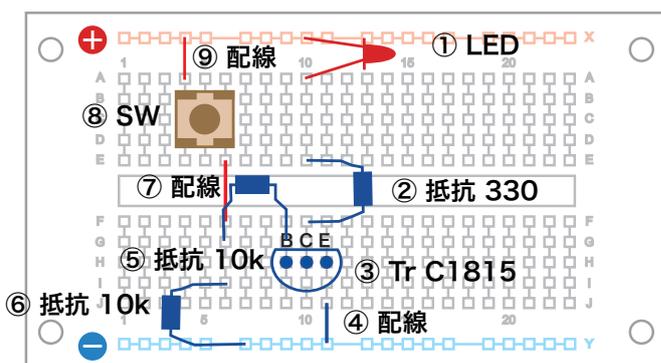


図 2.3 ブレッドボードに配線した回路の配線例.

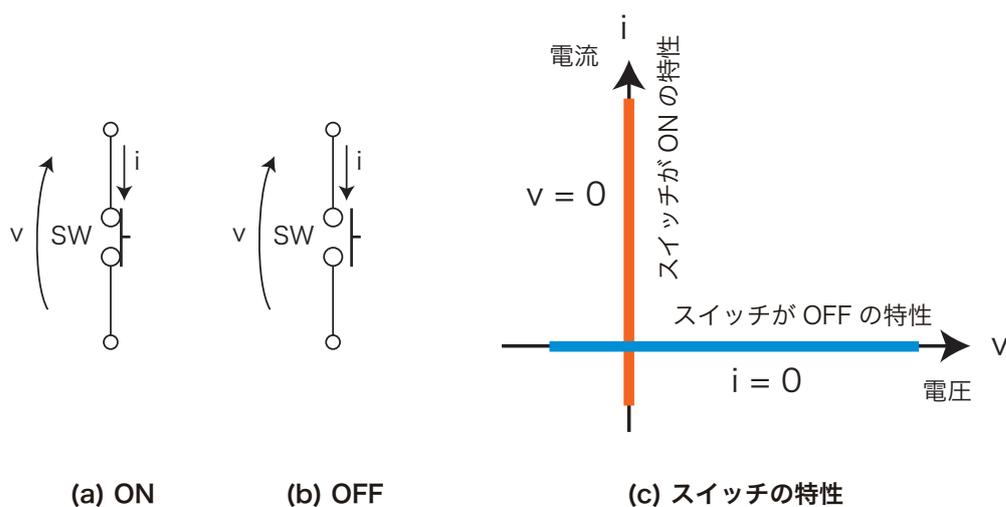


図 2.4 スイッチの特性.

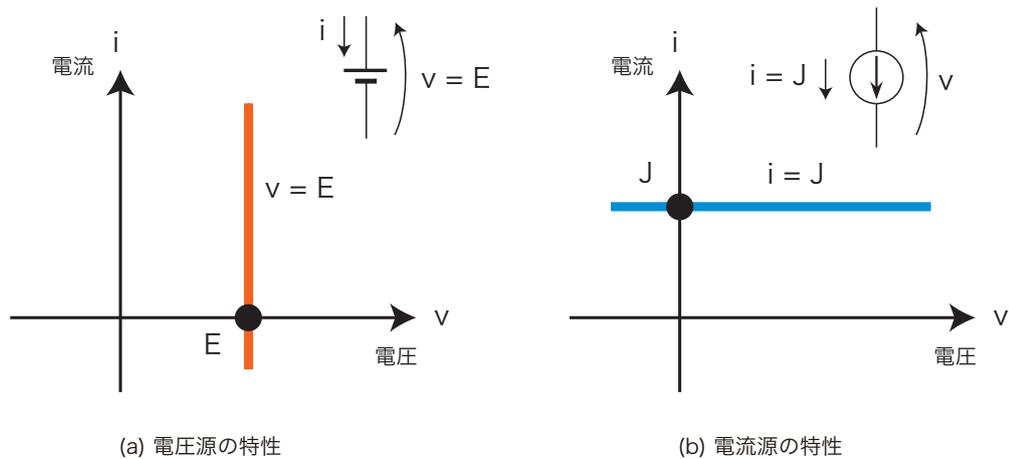


図 2.5 電圧源と電流源の特性.

これらの関係を  $(v, i)$  平面に図示すると、図 2.4(c) となる。スイッチの特性を表すには、 $v$  軸と  $i$  軸の 2 つの座標軸を用いなければならない。この場合、関係式は簡単であるが、1 つの式では書けないことに注意しよう。

スイッチで消費される電力  $p$  は、特性から電圧  $v = 0$  あるいは電流  $i = 0$  なので

$$p = vi = 0 \quad (2.1)$$

となる。すなわち、スイッチでは電力の消費はない。しかし、「スイッチを誰が作動させるのか」は問題である。人や機械で動かす（制御する）場合、電気回路以外の制御部でエネルギーの消費があるであろう。トランジスタ・スイッチを使うと電気回路でスイッチを制御できるようになる。これはトランジスタ・スイッチを使う 1 つの利点といえる。

#### 電圧源の特性

まず、電池の特性についてみておこう。電池を含む一般に電圧源と呼ばれる素子の特性は

$$v = E \text{ (一定)}, \quad i \text{ は任意} \quad (2.2)$$

で与えられる。図 2.5(a) 参照。

#### 電流源の特性

同様に、電流源の特性をみておこう。この素子の特性は

$$i = J \text{ (一定)}, \quad v \text{ は任意} \quad (2.3)$$

で与えられる。図 2.5(b) 参照。

#### 理想ダイオードと折れ線特性

ここで、ダイオードの特性を改めてみておこう。

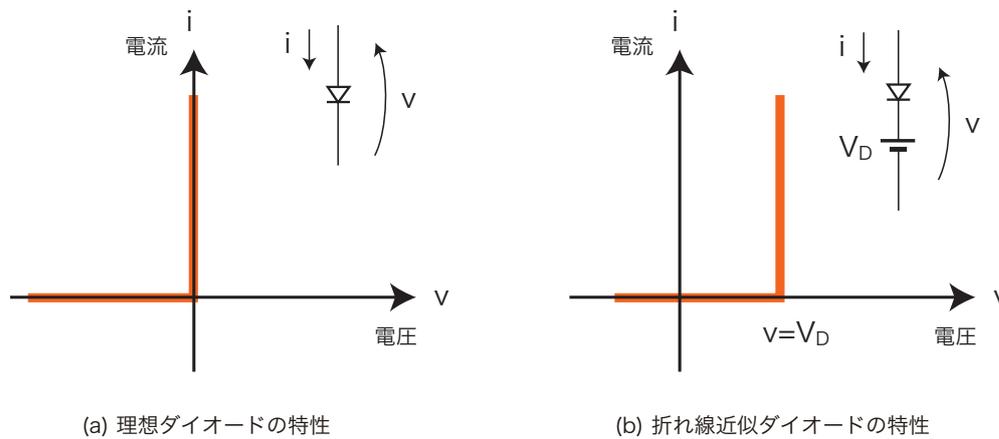


図 2.6 ダイオード特性：理想ダイオードと折れ線特性.

- 理想ダイオード：

$$i = 0, v \leq 0; v = 0, i \geq 0 \quad (2.4)$$

- 折れ線近似のダイオード特性：

$$i = 0, v \leq V_D; v = V_D, i \geq 0 \quad (2.5)$$

これらの特性を図 2.6 に示した。スイッチや2つの電源（電圧源と電流源）の特性と比較してこれらの特性をみるとおもしろい。

### 2.2.2 抵抗の特性

遅くなってしまったが改めて抵抗特性について考えておこう。抵抗とは端子電圧と電流の間に関数関係のある素子のことである。2端子素子と  $N$  端子素子 ( $N \geq 3$ ) に分けて考えよう。

#### 2端子素子としての抵抗特性

まず、これまでにみてきた2端子抵抗の場合をみてみよう。端子間電圧と素子を流れる電流の間に関数関係のあることを表現するには次の2つの方法が考えられる。

- 電圧  $v$  を独立変数にとり、電流  $i$  を従属変数と考える場合。この場合の特性は

$$i = G(v) \quad (2.6)$$

と表すことができる。特に、関数  $G(v) = Gv$  の場合、この特性は線形であるという。すなわち、電圧と電流は比例の関係になる。一般の場合は  $(v, i)$  平面内の曲線で表され、特性は非線形であるという..

- 電流  $i$  を独立変数にとり、電圧  $v$  を従属変数と考える場合。この場合の特性は

$$v = R(i) \quad (2.7)$$

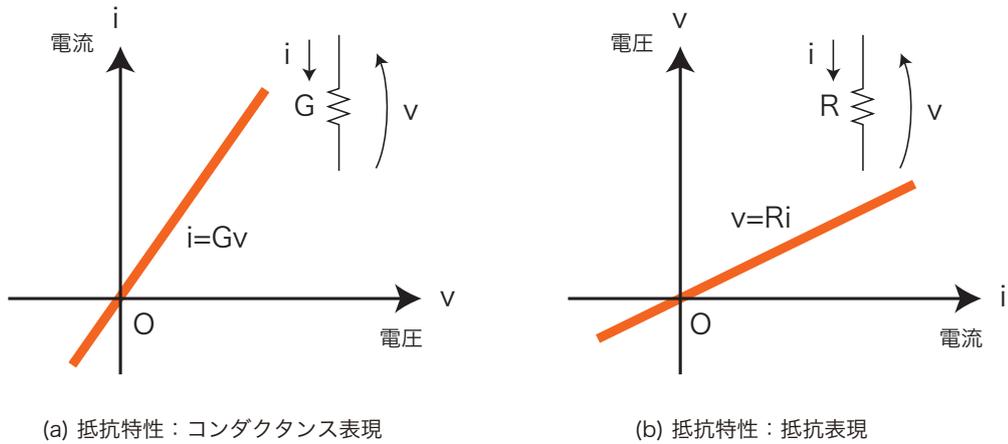


図 2.7 抵抗特性：線形抵抗の場合.

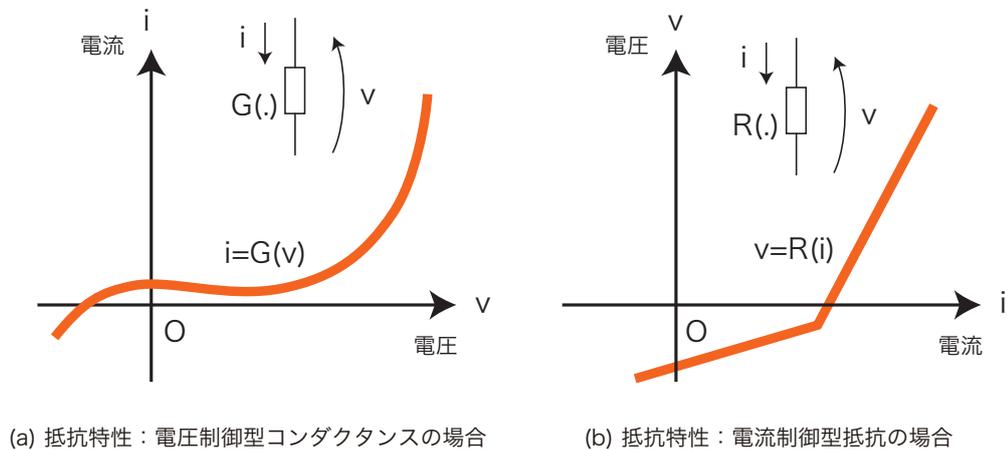


図 2.8 抵抗特性：非線形抵抗の場合.

と表すことができる。特に、線形抵抗  $R(i) = Ri$  の場合は電流と電圧は比例の関係になる。この関係をオームの法則という。一般の非線形の場合は  $(v, i)$  平面内の曲線で表される。部分的に直線をつなぎ合わせた折れ線特性の場合も非線形特性と考える。したがって、ダイオード特性は、なめらかな曲線あるいは区分的に直線いずれの場合も非線形特性となる。このことが回路解析を難しく、また分かりにくくしている。

### $N$ 端子素子としての抵抗特性

差し当たり必要な  $N = 3$  の場合について考えよう。3端子素子とは、図 2.9(a) に示したように、3つの端子  $A, B, C$  がある回路素子のことである。

この素子には、3つの端子があるので、3つの電流  $i_A, i_B, i_C$  と基準点から測った3つの電圧  $v_A, v_B, v_C$  の6つの変数がある。ただし、図 2.9(a) では電圧の基準点を時計回りに端子を変更して測った電圧  $v_{BA}, v_{CB}, v_{AC}$  を使ってある。ここで、電圧の添字の順序に注意してほ

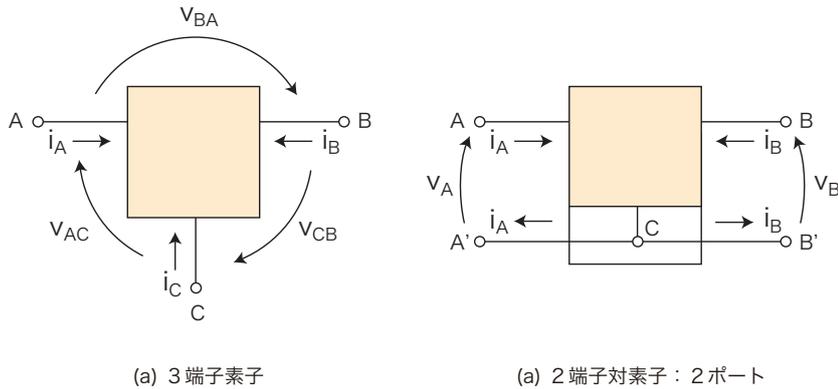


図 2.9 3 端子素子と等価な 2 端子対素子.

しい。端子  $A$  を基準として端子  $B$  の電圧という場合  $v_{BA}$  と書く。したがって、端子  $B$  を基準として端子  $A$  の電圧という逆の場合は  $v_{AB}$  と書く。この場合向きが反転するので  $v_{AB} = -v_{BA}$  である。

さて、3 端子素子が回路素子であることから、いかなる場合も次の 2 つの関係式が成り立っていないなければならない。

1. キルヒホフの電流法則を満たすこと。すなわち、流れ込む電流の総和は零である：

$$i_A + i_B + i_C = 0 \quad (2.8)$$

2. キルヒホフの電圧法則を満たすこと。すなわち、端子電圧の総和は零である：

$$v_{BA} + v_{CB} + v_{AC} = 0 \quad (2.9)$$

この 2 つの関係式を使うと、6 つあった変数を 2 つ消去できる。したがって、3 端子素子を記述するのに必要な変数の数は 4 つということになる。

なお、電気回路ではしばしば「端子対素子」を考えることがある。3 端子素子は 2 端子対素子と考えることができる。図 2.9(b) 参照。端子対素子は、端子 2 つを対にしてまとめて電流電圧を定義した素子のことである。対になった端子をポートと考えることから、端子対素子はポート素子とも呼ばれている。各ポートに図のように電流と電圧を定義すると、これらの電流と電圧は自動的にキルヒホフの 2 つの法則が満たされる。したがって、2 ポートは 4 つの変数を使って定義される。

以上の議論を基にして、3 端子抵抗素子あるいは 2 ポート抵抗素子を定義しよう。抵抗素子は電流と電圧の間に関係式を定めるとよい。そこで、図 2.9(a) に示した 3 端子素子では、変数  $i_A, i_B, v_{AC}, v_{CB}$  を 4 つの変数に選んだとしよう。このとき、これらの変数に関して 2 つの関係式を与えると抵抗素子が定義できたことになる：

$$\begin{aligned} f_1(i_A, i_B, v_{AC}, v_{CB}) &= 0 \\ f_2(i_A, i_B, v_{AC}, v_{CB}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

同様に、図 2.9(b) の 2 ポートにも 2 つの関係式を定義すると 2 ポート抵抗素子が定義できる：

$$\begin{aligned} f_1(i_A, i_B, v_A, v_B) &= 0 \\ f_2(i_A, i_B, v_A, v_B) &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

なお、多くの場合、2 つの変数を独立変数を選んで解いた形の定義式が用いられる。たとえば、式 (2.10) で変数  $i_B, v_{BC}$  を独立変数を選んで特性を

$$\begin{aligned} v_{AC} &= h_1(i_B, v_{BC}) \\ i_C &= h_2(i_B, v_{BC}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

で定義すると 1 つの 3 端子抵抗素子となる。なお、この表現では独立変数に電流と電圧が混じって使われているので 3 端子素子のハイブリッド表現という。また、端子  $C$  を基準にしている点にも注意しよう\*1。

### 2.2.3 トランジスタの特性曲線

トランジスタ (transistor) とは、トランス・レジスタ (trans resistor) を詰めて作られた合成語と言われている。この名のとおり 3 端子抵抗素子である。また、トランジスタには材料である半導体の構造の組み合わせにより色々な種類がある。大別して

- バイポーラトランジスタ (bipolar transistor)
- 電界効果型トランジスタ (field effect transistor:FET)

がある。また、バイポーラトランジスタには次の 2 種類の型がある。

- NPN 型：p 型半導体を 2 つの n 型半導体でサンドウィッチ状にはさんだ構造のトランジスタで、高周波用の 2SC 登録番号と低周波用の 2SD 登録番号の 2 つの型番号で分類されている。
- PNP 型：同様に n 型半導体を 2 つの p 型半導体でサンドウィッチ状にはさんだ構造のトランジスタで、高周波用の 2SA 登録番号と低周波用の 2SB 登録番号の 2 つの型番号で分類されている。

これらのバイポーラトランジスタの記号と使う変数の名称を図 2.10 に示した。以下、簡単のため NPN 型のバイポーラトランジスタについて、その特性をみることにしよう。

#### NPN バイポーラトランジスタの特性

図 2.10(a) の記号と変数を使って、NPN 型のトランジスタ特性は図 2.11 の特性で近似的に説明できる。

この図から、次の性質が読み取れる：

---

\*1  $v_{CB}$  を使わず  $v_{BC}$  を使っている。

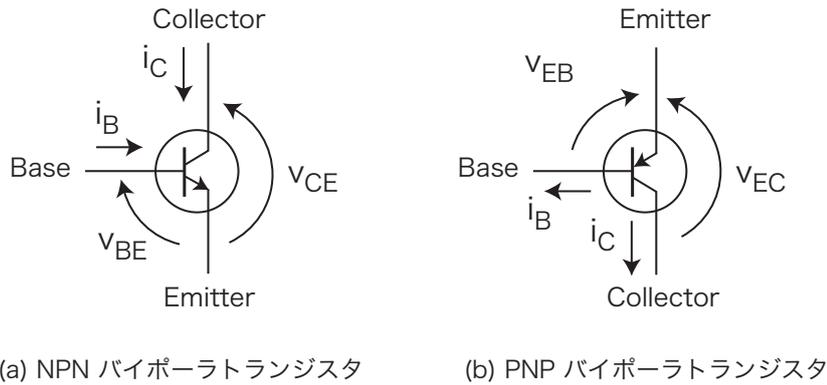


図 2.10 バイポーラトランジスタの記号と使用変数.

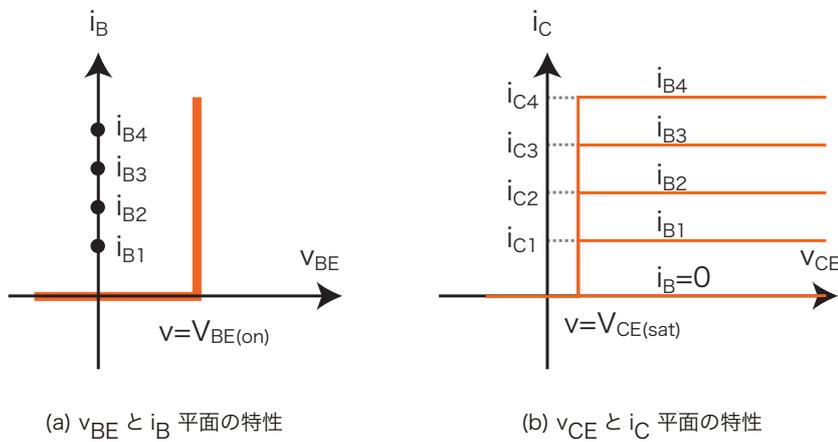


図 2.11 バイポーラトランジスタの特性.

- $(v_{BE}, i_B)$  平面の特性はダイオード特性である.  $v_{BE} = V_{BE(on)}$  でこのダイオードは ON になる. また, 変数  $(v_{CE}, i_C)$  の影響は受けないことにも注意しよう.
  - $(v_{CE}, i_C)$  平面では,  $i_C$  は  $v_{CE}$  と  $i_B$  の関数となっている. まず,  $i_B = 0$  では  $i_C = 0$  である. 次に,  $i_B > 0$  を固定すると, たとえば図中の  $i_{B4}$ , 特性曲線は次の 3 つの線分をつなぎ合わせた区分線形曲線となっている:
    - $v_{CE} < V_{CE(sat)}$  では  $i_C = 0$  の直線. すなわち, 電流の流れていない開放状態. この状態はカットオフの状態と呼ばれている.
    - $v_{CE} = V_{CE(sat)}$  で垂直の 0 から  $i_{C4}$  までの線分. すなわち, 電圧が  $v_{CE(sat)}$  の電圧源. この状態は飽和状態と呼ばれている.
    - $v_{CE} > V_{CE(sat)}$  では  $i_C = i_{C4}$  の直線. すなわち, 電流が  $i_{C4}$  の電流源. この状態はアクティブな状態と呼ばれている.
- 特に, 最後のアクティブな状態の電流源は, 図からも分かるように  $i_B$  と  $i_C$  が

$$i_C = \beta i_B \quad (2.13)$$

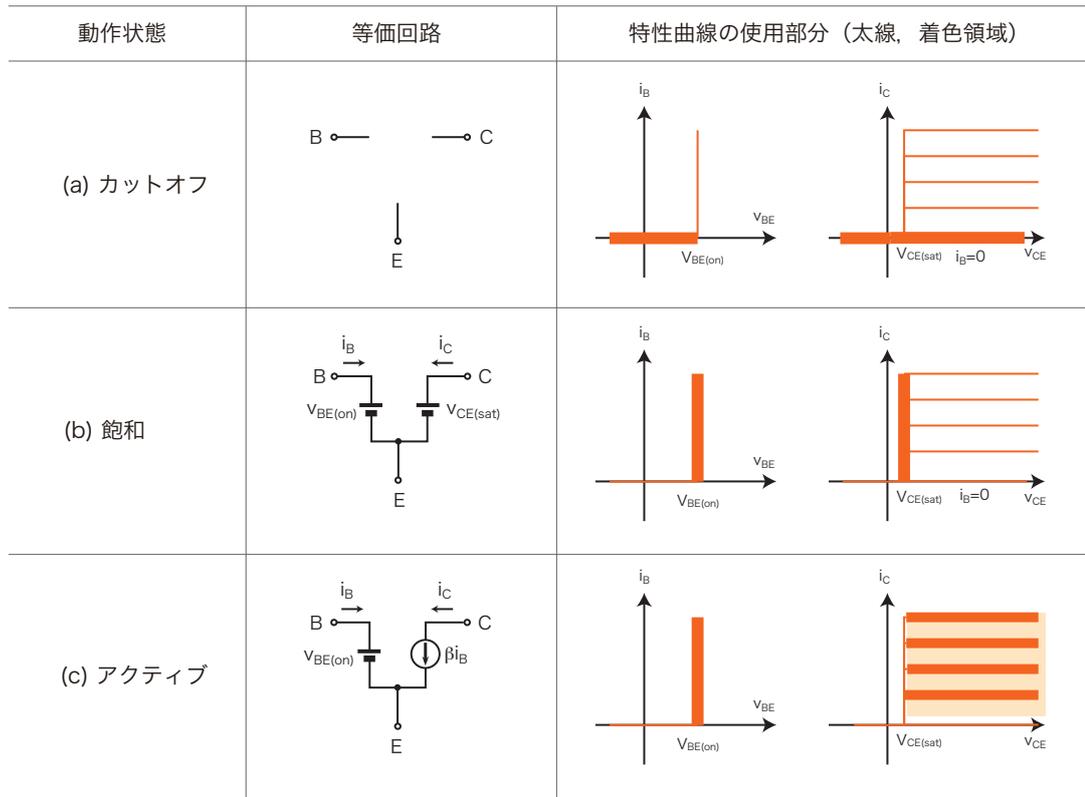


図 2.12 トランジスタ特性の3つの動作状態と等価回路。

の式で表される比例の関係にある。すなわち、コレクタ電流はベース電流の  $\beta$  倍となる\*<sup>2</sup>。

最後に、これら3つの状態の等価回路を描くと図 2.12 となる。

## 2.3 トランジスタ・スイッチ

### 2.3.1 トランジスタをスイッチとして使う

準備ができたので、この章の実験 A2 の回路の解析をしてみよう。前小節でみたように、トランジスタのカットオフの状態と飽和の状態は、それぞれスイッチの OFF の状態と ON の状態にうまく対応している\*<sup>3</sup>。

そこで図 2.1(b) の回路を考えよう。押しボタンスイッチの機能としては2つの状態：

1. スイッチ SW が OFF のとき、 $v_{BE} = 0$  であり、ベース電流は流れないのでトランジスタはカットオフの状態である。

\*<sup>2</sup>  $\beta$  は  $h_{FE}$  とも呼ばれている。通常、 $\beta = h_{FE} = 70 \sim 400$  程度の値である。

\*<sup>3</sup> 飽和の状態では  $v_{CE(sat)}$  の値があることがスイッチとは異なるが、この値は通常 0.2[V] 程度であるので無視するとスイッチの特性と同等となる。

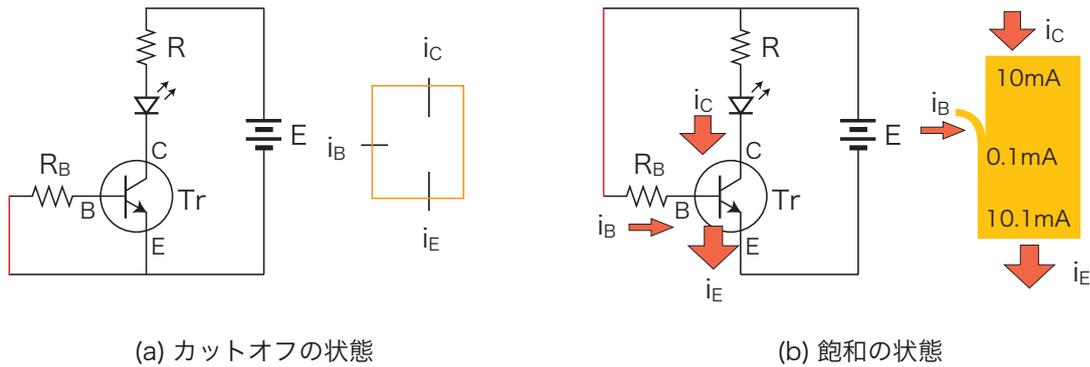


図 2.13 トランジスタのスイッチの特性.

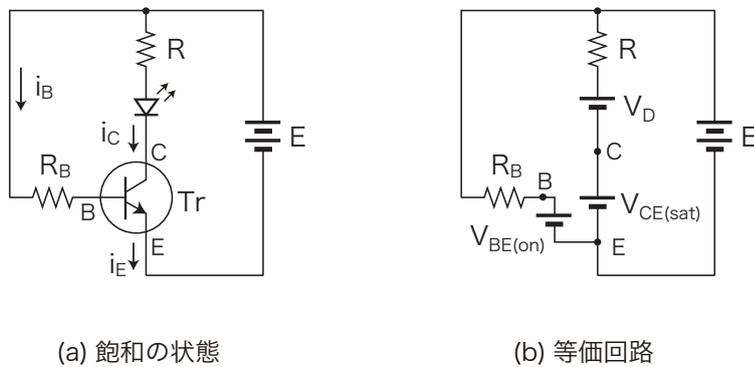


図 2.14 飽和状態の回路図とその等価回路.

2. スイッチ SW が ON のとき、ベース電流が流れトランジスタは飽和の状態となる。

を実現したい。図 2.13 参照。

トランジスタがカットオフの場合は解析する必要もないので、以下では飽和状態の場合を検討しよう。図 2.14 に飽和状態の場合の等価回路を示した。また、この時の特性曲線と負荷線を図 2.15 に示した。これらの図を参考にして、次の結果が導かれる。

1. 図 2.14(b) の等価回路の LED とトランジスタを含む枝から次式が成り立つ。

$$Ri_C + V_D + V_{CE(sat)} = E \tag{2.14}$$

この式から、流れる電流を与えると次式で抵抗  $R$  を定めることができる。

$$R = \frac{E - V_D - V_{CE(sat)}}{i_C} \tag{2.15}$$

一つの具体的な例として、 $E = 3[V]$ ,  $V_{BE(on)} = 0.2[V]$ ,  $V_D = 2.0[V]$  とし、 $i_C = 10[mA]$  を考えると  $R = (3 - 2.0 - 0.2)/10 = 0.8/10 = 0.08k\Omega = 80\Omega$  となる。

2. 同様に、ベース側の枝から

$$R_B i_B + V_{BE(on)} = E \tag{2.16}$$

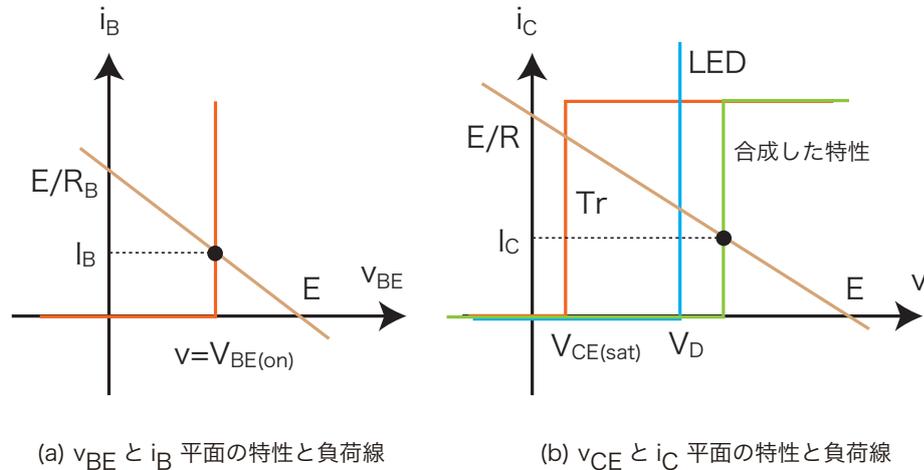


図 2.15 特性曲線と負荷線.

を得る. この式を使って  $R_B$  を求める. その際,  $i_C = \beta i_B$  の関係があるので,  $i_B \geq \frac{i_C}{\beta}$  となるように  $R_B$  の値を十分余裕をもって選ぶとよい. 具体例として,  $E = 3[V]$ ,  $v_{BE(on)} = 0.7[V]$ ,  $\beta = 100$  とすると, まず  $i_B = i_C/\beta = 10/100 = 0.1[mA]$  以上としなければならない. そこで  $R_B = (3.0 - 0.7)/0.1 = 2.3/0.1 = 23k\Omega$  を得る.  $\beta$  の値を適当に与えたので, 十分に大きな電流を流すことを考えて,  $R_B = 10k\Omega$  程度とすればよいであろう.

### 2.3.2 光センサーをスイッチに使う

この章のまとめとして, スイッチを光センサーで置き換えた回路の実験をしておこう. その前にトランジスタを使った点灯・消灯回路を整理しておく.

#### NPN トランジスタを使った点灯・消灯回路

押しボタンスイッチを挿入する位置により, 押した場合に点灯する回路と押した場合に消灯する回路をつくることができる. 図 2.16 参照.

#### PNP トランジスタを使った点灯・消灯回路

この場合は解析しなかったが, NPN の場合とほぼ並行して同じ議論ができる. 電流の方向が逆になることに注意すると電圧の掛け方も逆になるなど相互に関係を比較して考えると分かりやすい. 結果を図 2.17 に示した.

#### CdS を使った点灯・消灯回路.

さて, 光センサーである CdS をスイッチに使った「暗くなったら点灯する」回路を実験してみよう. これにはスイッチを押したら消灯する回路のスイッチを CdS に置き換えるとよい. 結果は図 2.18 に示した回路となる.

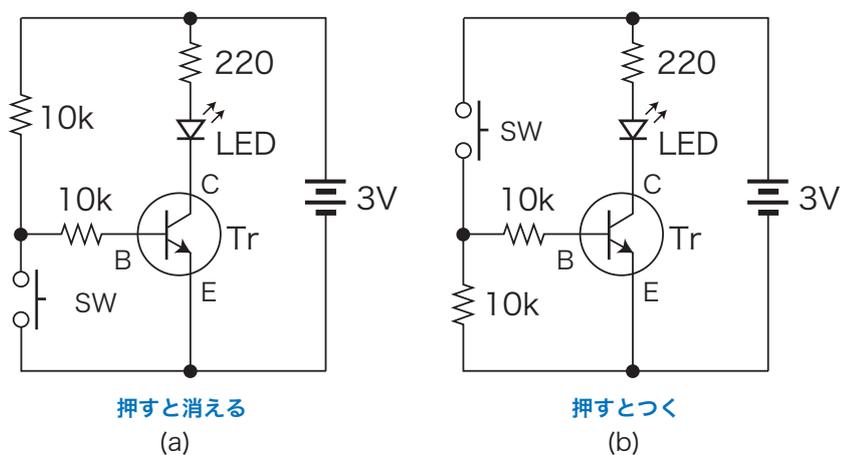


図 2.16 NPN トランジスタを用いた点灯・消灯回路.

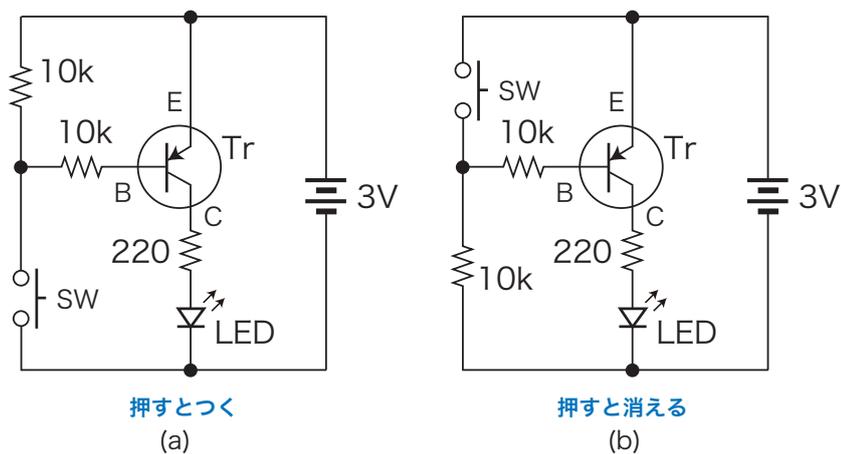


図 2.17 PNP トランジスタを用いた点灯・消灯回路.

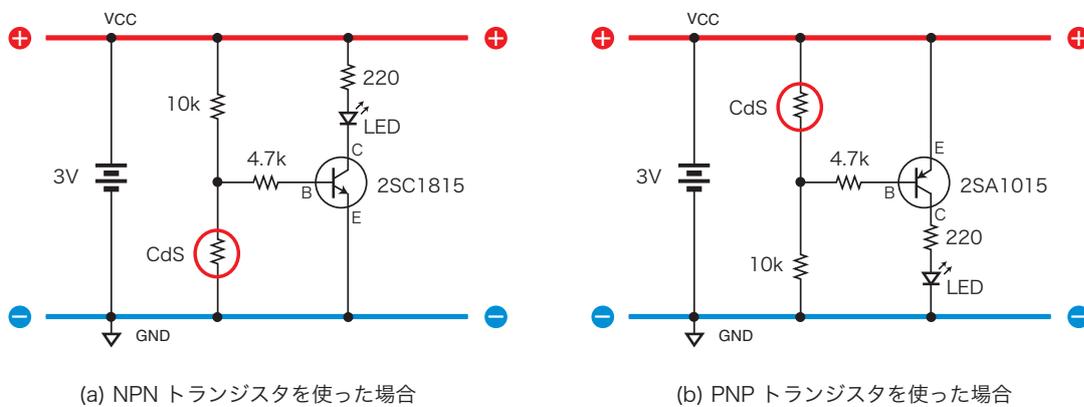


図 2.18 暗くなったら点灯する回路の例.

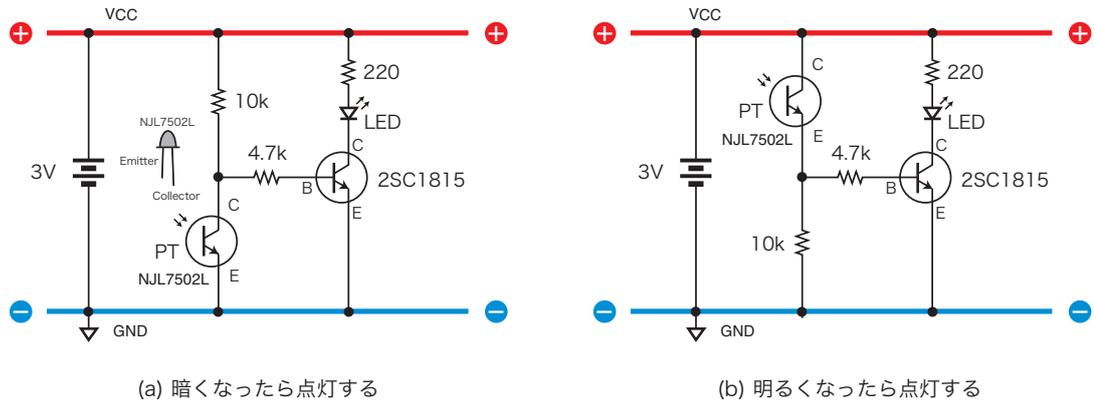


図 2.19 フォトトランジスタを使った点灯回路の例.

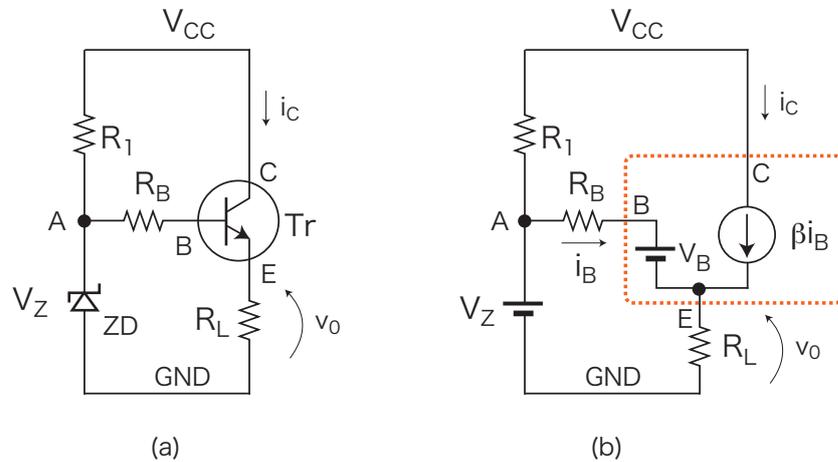


図 2.20 定電圧回路の例 (a). その等価回路 (b).

フォトトランジスタ：NJL7502L を使った点灯回路.

最後に、光センサー CdS をフォトトランジスタ：NJL7502L で置き換えた点灯回路を実験してみよう。点灯条件により図 2.19 に示した回路となる。

### 2.3.3 定電圧回路：3端子レギュレータ

ツェナーダイオードの定電圧特性とトランジスタをアクティブ領域で使用することによって、負荷抵抗にかかる電圧を定電圧に保つ回路の例を図 2.20(a) に示した。定電圧に保つという意味は、負荷抵抗にかかる電圧  $V_0$  が電源電圧  $V_{CC}$  やその他回路に使われている抵抗値の変動に対して変わらないということである。

まず、抵抗  $R_1$  と直列にツェナーダイオードがつながれている。電源電圧  $V_{CC}$  がツェナー電

圧  $V_Z$  より高いと点 A の電圧は  $V_Z$  に保たれる\*4.

そこで、トランジスタがアクティブ領域で動作すると仮定しよう。このとき、トランジスタのコレクタ電流  $i_C$  は、ベース電流  $i_B$  の  $\beta$  倍で動作する電流源  $i_C = \beta i_B$  と考えてよい。ここで  $\beta$  は十分大きな倍率であるとしよう： $\beta = 100 \sim 300$ 。

等価回路の GND, 点 A, B, E GND のループに電圧則を適用して、次式を得る。

$$V_Z = V_{B(on)} + R_B i_B + (1 + \beta) R_L i_B \quad (2.17)$$

したがって、ベース電流は次式となる。

$$i_B = \frac{V_Z - V_{B(on)}}{R_B + (1 + \beta) R_L} \quad (2.18)$$

そこで、負荷抵抗  $R_L$  にかかる電圧  $V_0$  は次式となる。

$$V_0 = (1 + \beta) R_L i_B = \frac{(1 + \beta) R_L}{R_B + (1 + \beta) R_L} (V_Z - V_{B(on)}) \quad (2.19)$$

$\beta$  が十分大きいことより、

$$\frac{(1 + \beta) R_L}{R_B + (1 + \beta) R_L} \rightarrow 1, \quad \beta \rightarrow \infty$$

したがって、このとき出力電圧  $V_0$  は次式で近似される。

$$V_0 = V_Z - V_{B(on)} \quad (2.20)$$

この式には、 $V_{CC}$  や抵抗値は含まれていない。つまり、定電圧性が保たれる。

なお、この回路はトランジスタのエミッタに負荷抵抗がつながれ、コレクタが固定電圧  $V_{CC}$  で動作している。このような回路はコレクタ接地あるいはエミッタフォロアの回路と呼ばれている。

エミッタフォロアの回路は、入力電圧がそのまま出力電圧となる回路である\*5。式 (2.20) 参照。違いは入力からみた抵抗値と出力の抵抗値の違いにある。いま、入力電圧を  $V_{in}$  とし、 $V_{in} = V_Z - V_{BE(on)}$  と置こう。このとき、式 (2.18) は次式となる。

$$i_B = \frac{V_{in}}{R_B + (1 + \beta) R_L} \quad (2.21)$$

したがって、 $i_C$  は、 $R_B \ll R_L$  を仮定して次式となる。

$$i_C = \beta i_B = \frac{\beta}{R_B + (1 + \beta) R_L} V_{in} \approx \frac{V_{in}}{R_L} \quad (2.22)$$

このことはまた、この回路のコレクタ電流が  $R_L$  のみに依存する定電流性をもつことを示している。

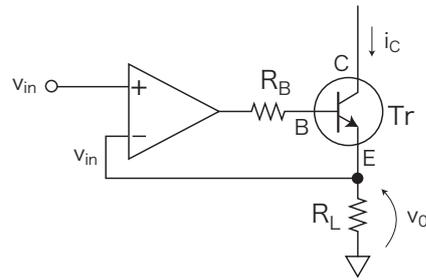


図 2.21 オペアンプを使った定電流回路.

### オペアンプを使った定電流回路

オペアンプの解析は第3章のテーマであるが、上述の定電流性との比較で見ておくと分かりやすいのでここで示しておく。必要となった時点で読み返すといいであろう。図 2.21 に示した回路を考える。基準電圧  $v_{in}$  がオペアンプの + 入力に加えられている。- 入力の電圧も  $v_{in}$  となる。トランジスタがアクティブ領域で動作しているとすると、トランジスタのエミッタ電流  $i_E$  は次式となる。

$$i_E = i_C + i_B = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) i_C = \frac{v_{in}}{R_L} \Leftrightarrow i_E \simeq i_C \quad \text{if } \beta \gg 1 \quad (2.23)$$

したがって、 $\beta$  が十分大きい場合には、コレクタ電流  $i_C$  は入力電圧  $v_{in}$  と負荷抵抗  $R_L$  のみに依存する。

### 2.3.4 タイマ IC:555 を使った点灯，消灯回路

タイマ IC:555 の機能については第4章で説明する。ここではスイッチと組み合わせて点灯あるいは消灯する回路を示す。

#### 点灯スイッチと消灯スイッチのある回路

この回路では、スイッチ A を押すと 555 の 3 番ピンの出力に電圧が現われ LED が点灯する。また、スイッチ B を押すと出力電圧はゼロとなり、LED は消灯する。タイマの回路の機能としては、出力電圧が出ている ON の状態とゼロの OFF の状態がいずれも安定に動作し、2つのスイッチでこれらの状態を切り換えている。このような回路は、双安定な回路と呼ばれることがある。

#### スイッチを押すとしばらくの間のみ点灯する回路

この回路では、スイッチ A を押すと 555 の 3 番ピンの出力に電圧が現われ、しばらくの間のみ LED が点灯する。タイマの回路の機能としては、出力電圧が出ている ON の状態が不安定

\*4 抵抗  $R_B$  に流れる電流が  $R_L$  の電流より十分に小さくなるようこれらの抵抗を選んでおこう。

\*5 ここでは  $V_{BE(on)} \approx 0.6[V] \approx 0[V]$  と見なして省略した。

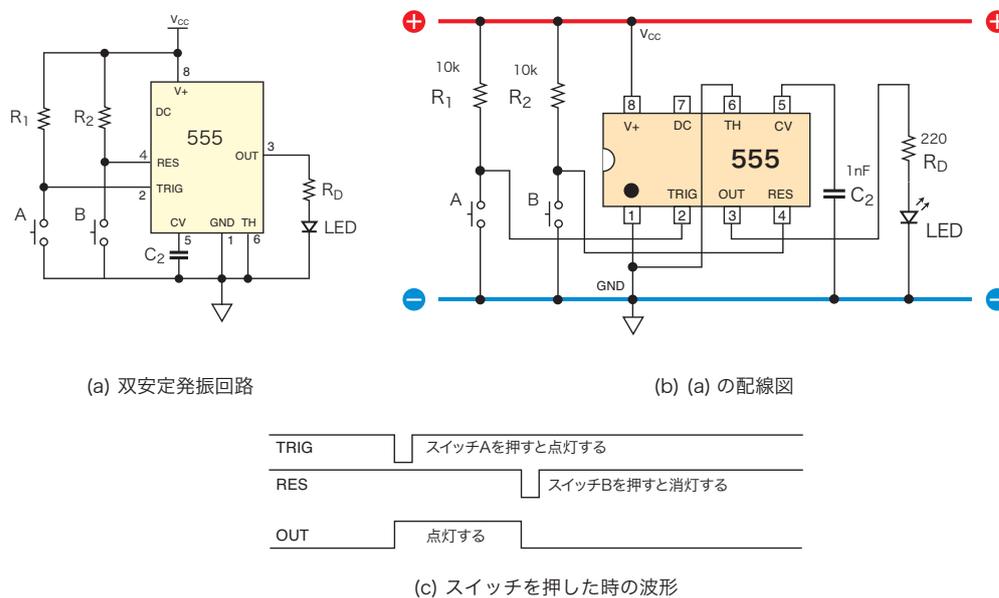


図 2.22 555 を使った双安定回路 (a). その配線図 (b). 動作波形 (c).

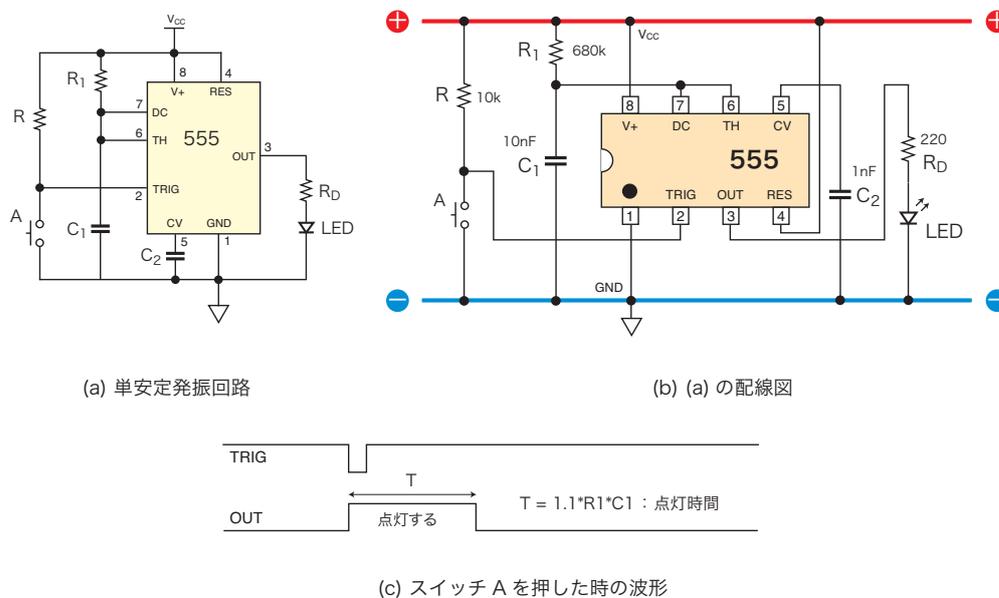


図 2.23 555 を使った単安定回路 (a). その配線図 (b). 動作波形 (c).

で、ゼロの OFF の状態が安定な状態となっている。スイッチ A を押すと、強制的に不安定な ON の状態になるが  $T$  時間後には OFF の状態に戻ってしまう。このような回路は、単安定な回路と呼ばれることがある。

## 第3章

# LED の点滅：光のリズムをつくる

この章では、LED を点滅させる、すなわち光のリズムを作り出す回路の実験をしよう。リズムをつくる回路は一般に発振回路と呼ばれている。ここでは、オペアンプ、抵抗とキャパシタを使った最も簡単な方形波発振器をつくる。

キーワード：オペアンプ、キャパシタと抵抗からなる回路、RC 方形波発振回路

### 3.1 実験 A3：358 を使った点滅回路

#### 3.1.1 回路図

この実験 A3 では、LED の点滅回路をつくる。図 3.1(a) が回路図、(b) が配線図である。

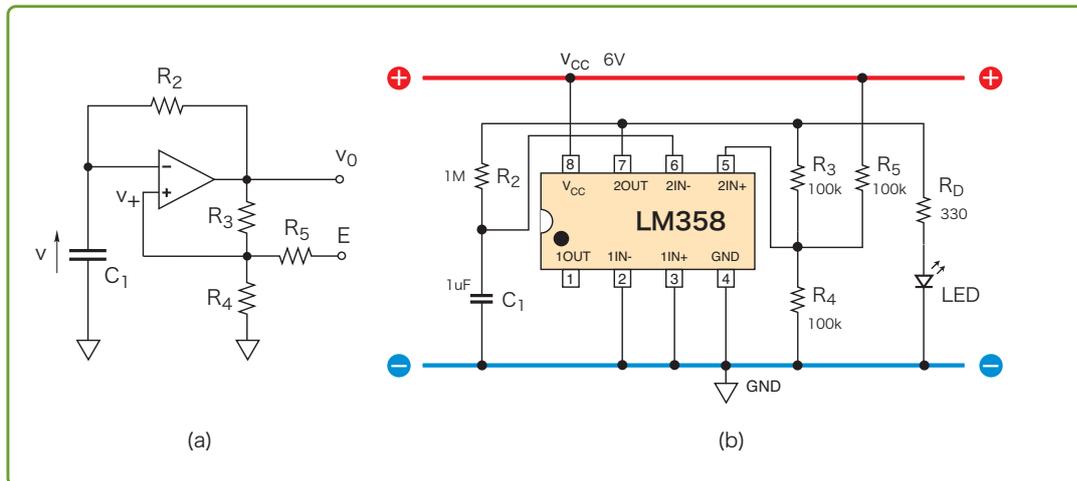


図 3.1 実験 A3. LED の点滅回路.

図 (a) に三角形で描かれた 3 端子素子が、オペアンプ (演算増幅器:operational amplifier) で + と - のマークの付いた端子が 2 つの入力端子、電圧  $v_0$  の付された端子が出力端子である。演算増幅器は、その名のとおり電圧や電流を加えたり、引き算したりあるいは定数倍したりといったアナログ電気信号の演算ができる素子である。また、この回路で初めてキャパシタ (コンデン

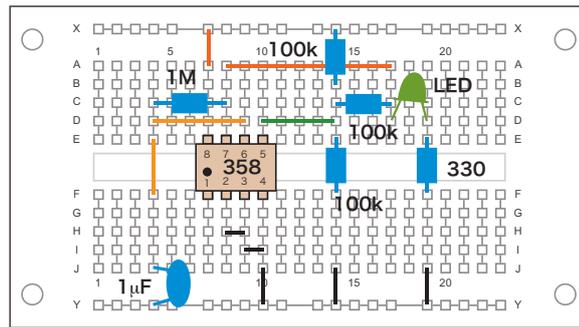


図 3.2 ブレッドボード上の配線図.

サー) を使用する。キャパシタは電荷を蓄える素子である。ここでは、抵抗  $R_2$  とキャパシタ  $C_1$  の直列回路とオペアンプを使って電荷の充電と放電のリズムを作り出す。

### 3.1.2 部品を配線する

#### 回路部品

この実験で使用する部品を表 3.1 に示した。

表 3.1 実験 A3 に使用する部品

部品名	規格	数量	メモ
LED	直径 5mm	1	色は何でも可
抵抗	330Ω	1	
抵抗	100kΩ	3	
抵抗	1MΩ	1	
コンデンサ	1μF	1	
オペアンプ	LM358	1	
ブレッド・ボード	EIC-301	1	
ジャンパー線		数本	
電池	単 4 アルカリ乾電池	4 本	6[V] 電圧源用
電池ホルダー	単 4 電池 4 本用	1	

#### 部品を配線する

部品をブレッドボードに配線した回路の配線例を図 3.2 に示した。8 ピンの DIP 素子 LM358 がオペアンプの IC で、オペアンプが 2 個は入っている。ここでは 1 つしか使わないので、未使用のオペアンプの入力端子は GND に接続してある。また、オペアンプの電源は 4 番ピンが

GND, 8番ピンが  $V_{CC}$  である. 通常, オペアンプは + と - の2つの電源を使用するが, ここでは1つの電源のみで動かしている.

## 3.2 オペアンプとヒステリシス回路

### 3.2.1 オペアンプの特性

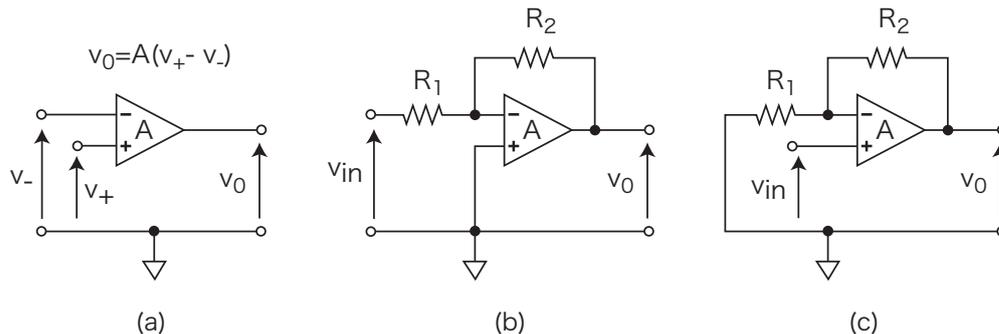


図 3.3 オペアンプと増幅回路の例.

演算増幅器：オペアンプ (operational amplifier) は, アナログ信号に数学演算を施す目的で作られた素子である. 中味は多数のトランジスタ, 抵抗やダイオードからなる複雑な回路である. 外部からみると3端子素子と考えることができ, 簡単に使うことができるようになっている. 図 3.3(a) 参照. 入力電圧  $v_-$  と  $v_+$  を与えるための入力端子が2つと出力電圧  $v_0$  を取り出す端子がこれら3つの端子である.

なお, 図には描いていないが電源電圧として正負2つの電源端子があり, 通常はこれらの端子に  $+5[V]$  と  $-5[V]$  のように2つの直流電圧を与えて使う. 2つの電源を使うのがやっかいだということであれば, 1つの電源  $+5[V]$  と - 端子を GND として使ってもよい. このような1つの電源で使うことを単電源で使うという. 最近は単電源用のオペアンプ (single-supply op amp) が容易に手に入るようになっている. 図 3.1(b) の配線図にある LM358 もその1つである.

2つの電源でオペアンプを動かす使い方の利点としては, 入力端子に与える電圧の正負に関係なく少数の抵抗を付加するだけで増幅器をつくることができることである. 他方, 単電源で使用する場合は, 入力端子を適切な電圧にするため, 電源から適当な電圧を分圧して加えるなどレベル調整が必要である. この点回路が少し複雑となる.

#### 理想的なオペアンプ特性

図 3.3(a) のオペアンプの入力電圧  $v_-$ ,  $v_+$  と出力電圧  $v_0$  の関係は次式で与えられるように設計されている.

$$v_0 = A(v_+ - v_-) \quad (3.1)$$

ここに,  $A$  は増幅率 (gain) を表し,  $A = 10^4 \sim 10^5$  と極めて大きい. したがって, そのままでは使うことができないので, 適当なフィードバック回路を付加してこの増幅率が陽に見えない回

路を構成する。

オペアンプは増幅率を大きく設計してあることに加えて、

1. 入力からみた抵抗が非常に大きくなるように設計されている。このため、入力端子へ流れ込む電流は0と仮定しても問題ない。
2. 出力からみた抵抗は十分小さくなるように設計されている。このため、負荷抵抗をつないでも端子電圧は変わらない。

等の性質を持っている。特性として

- 増幅率無限大： $A = \infty$ ，入力抵抗無限大： $Z_{in} = \infty$ ，かつ出力抵抗0： $Z_{out} = 0$

をもつオペアンプを理想的なオペアンプという。理想的なオペアンプ特性を考えると、解析が極めて簡単になり、オペアンプを含んだ回路の振る舞いが理解しやすくなる。

### 反転増幅器

図3.3(b)の回路の入力電圧  $v_{in}$  と出力電圧  $v_0$  の関係を求めてみよう。+端子の電圧はGNDに接続されているので0である。-端子の電圧を  $v_-$  と置いて

$$\begin{aligned} \frac{v_{in} - v_-}{R_1} + \frac{v_0 - v_-}{R_2} &= 0 \\ v_0 = A(0 - v_-) &= -Av_- \end{aligned} \quad (3.2)$$

を得る。この第1式は入力端子-での電流の式から、第2式は式(3.1)から導かれる。第2式を第1式に代入して整理すると次式を得る。

$$v_0 = -\frac{R_2}{R_1} \frac{v_{in}}{\left[1 + \frac{1}{A} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]} \simeq -\frac{R_2}{R_1} v_{in} \quad (3.3)$$

ここで最後の関係式は  $A$  が大きいことを使って  $1/A = 0$  と近似した。この式より

1. 出力電圧  $v_0$  は入力電圧  $v_{in}$  を  $-\frac{R_2}{R_1}$  倍した電圧となる。したがって、まず-倍されるので信号の符号が変わる。これが反転の意味である。
2.  $\frac{R_2}{R_1}$  倍される。これが増幅器 ( $R_2 > R_1$  の時) の意味である。また、この増幅率はオペアンプの増幅率  $A$  に関係しない。

ということがわかる。

なお、入出力関係は次のようにして簡単に導くことができる。 $A \simeq \infty$  の関係と式(3.1)で  $v_0$  が有限であることから、 $v_+ = v_-$  が導かれる。この回路では  $v_+ = 0$  なので、 $v_- = 0$  の関係\*1を仮定できる。したがって、-入力端子での電流の満たす式から次式を得る。

$$\frac{v_{in}}{R_1} + \frac{v_0}{R_2} = 0 \quad (3.4)$$

\*1 -端子は接地してないのに+端子が接地されていることから、あたかも接地されているように  $v_- = 0$  の性質が導かれている。この性質の端子を仮想接地 (virtual ground) の端子とすることがある。

これより

$$v_0 = -\frac{R_2}{R_1}v_{in} \quad (3.5)$$

を得る.

### 非反転増幅器

同様に、図 3.3(c) の回路の入力電圧  $v_{in}$  と出力電圧  $v_0$  の関係を求めてみよう。+ 端子の電圧が  $v_{in}$  なので、- 端子の電圧も  $v_{in}$  となる。そこで、- 入力端子での電流の満たす式は

$$\frac{-v_{in}}{R_1} + \frac{v_0 - v_{in}}{R_2} = 0 \quad (3.6)$$

整理して次式を得る.

$$v_0 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v_{in} \quad (3.7)$$

この回路では信号の符号は変わらないことから、いささか持つて回ったような言い方であるが非反転増幅器と呼ばれている。増幅率は常に 1 よりも大きい。

特に、 $R_1 = \infty, R_2 = 0$  とすると

$$v_0 = v_{in} \quad (3.8)$$

となる。この回路はボルテージフォロア (voltage follower) と呼ばれ、オペアンプの入力抵抗と出力抵抗の性質を生かしたバッファ回路\*2としてよく利用される。

### 3.2.2 単電源で動作するオペアンプの回路

図 3.4(a) の回路は、基本的な反転増幅回路である。入力電圧  $v_{in}$ 、基準電圧  $v_{ref}$  と出力電圧  $v_0$  の関係は次式となる。

$$v_0 = -\frac{R_2}{R_1}v_{in} + \alpha\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v_{ref}; \text{ where } \alpha = \frac{R_4}{(R_3 + R_4)} \quad (3.9)$$

図 (b) は入力電圧が 2 つの場合の反転増幅回路である。次の関係式が得られる。

$$v_0 = -\frac{R_3}{R_1}v_{in1} - \frac{R_3}{R_2}v_{in2} + \alpha\left(1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2}\right)v_{ref}; \text{ where } \alpha = \frac{R_5}{(R_4 + R_5)} \quad (3.10)$$

基本的な反転増幅回路の入力電圧の端子と基準電圧の端子を入れ替えると、図 (c) の非反転増幅回路が得られる。この回路の入出力関係式は次式となる。

$$v_0 = \alpha\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v_{in} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{R_4}{(R_3 + R_4)}v_{in}; \text{ where } \alpha = \frac{R_4}{(R_3 + R_4)} \quad (3.11)$$

最後の図 (d) はボルテージフォロア回路である。図 (c) の回路で  $R_1 = \infty, R_2 = 0$  とした回路である。従って

$$v_0 = \alpha v_{in} = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)}v_{in}; \text{ where } \alpha = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} \quad (3.12)$$

の関係式が成り立つ。

\*2 センサー回路などで電流を流すとその端子の電圧が変わってしまうような端子から信号を取り出すとき、ボルテージフォロア回路を使うとうまく信号を取り出すことができる。

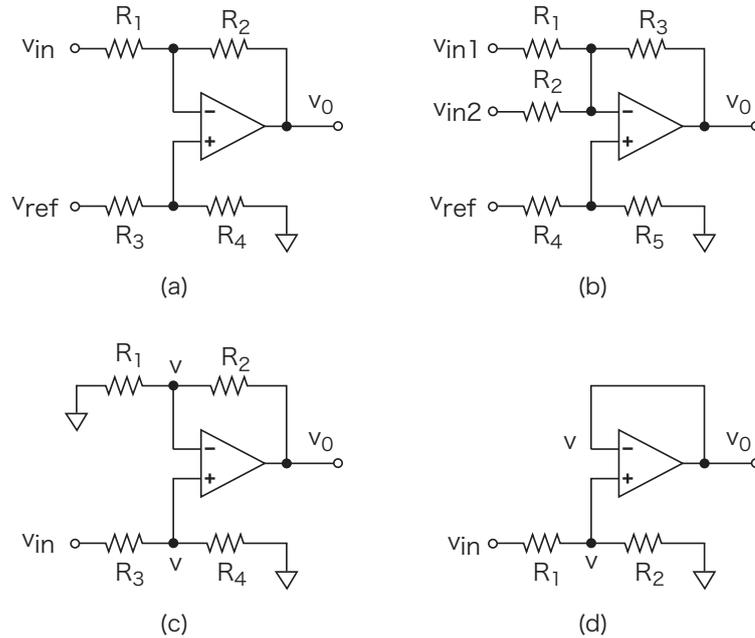


図 3.4 単電源で動作するオペアンプの回路. (a) 基本的な反転増幅回路. (b) 2入力反転増幅回路. (c) 非反転増幅回路. (d) ボルテージフォロア回路.

### 3.2.3 コンパレータとヒステリシス回路：シュミット回路

ここでは、以下単電源  $v_{CC} = E$  を使った回路で説明する。また、この小節ではオペアンプの増幅率が十分大きいことを利用した議論となっている。すなわち、式 (3.1) より  $v_+ - v_- > 0$  なる入力があると、これが  $A$  倍されるので、出力は直ちに極めて大きくなる。しかし、電源電圧  $E$  以上にはなれないので  $v_0$  は電源電圧よりすこし小さな適当な値で飽和する。同様に、 $v_+ - v_- < 0$  となる入力で  $v_0$  は零電圧付近で飽和する。このように入力電圧の差の正負により、出力電圧が  $E$  と  $0$  の2値で切り替えるような使い方を目的で設計されたオペアンプをコンパレータ (comparator) という<sup>\*3</sup>。もちろん、通常のオペアンプをコンパレータとして使用できる。

#### コンパレータとしての動作

図 3.5(a) の回路を考えよう。入力電圧  $v_{in}$  を  $0$  から電源電圧  $E$  まで変えると、出力電圧  $v_0$  は図で示した特性曲線となる。同様に、図 3.5(b) の回路と特性は同図に示した特性となる。図 3.6 には、2個のコンパレータを直列に接続した場合の出力特性を示している。4種類の異なる組み合わせに関して異なる出力特性が得られることが分かる。これらの特性は、それぞれの接続につき3種類の出力状態が得られることにも注意しよう。

<sup>\*3</sup> 飽和電圧が電源電圧近くの値であり、もう一方の飽和電圧が零電圧に近い値になるよう設計されたオペアンプをレールツーレール (rail to rail) のオペアンプという。

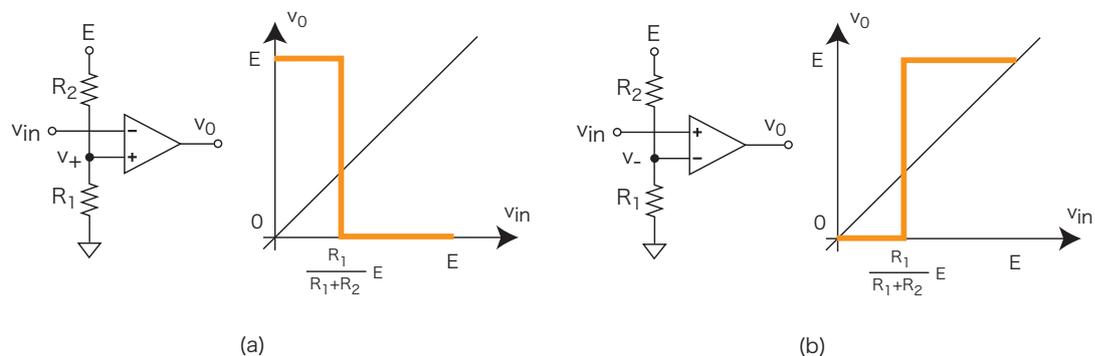


図 3.5 入力端子を変えた場合のコンパレータ特性.

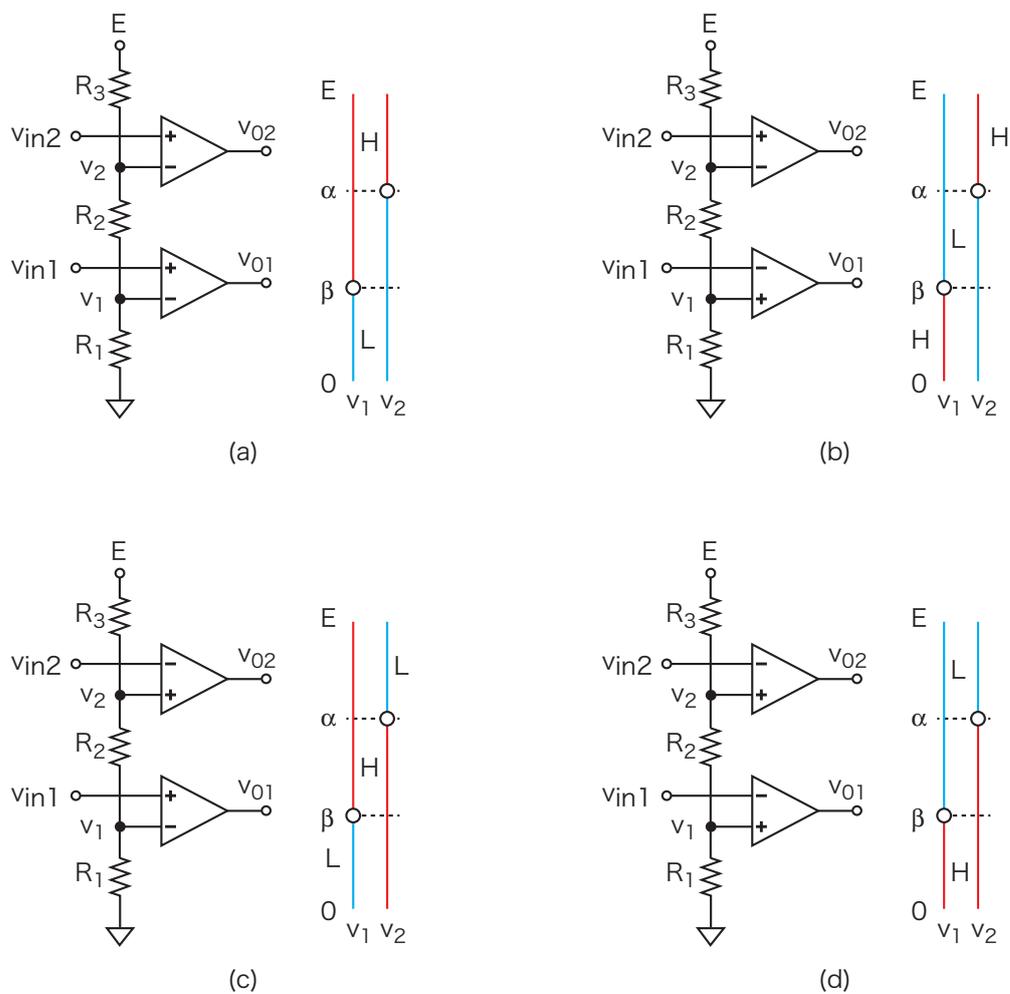


図 3.6 2個のコンパレータの直列特性.

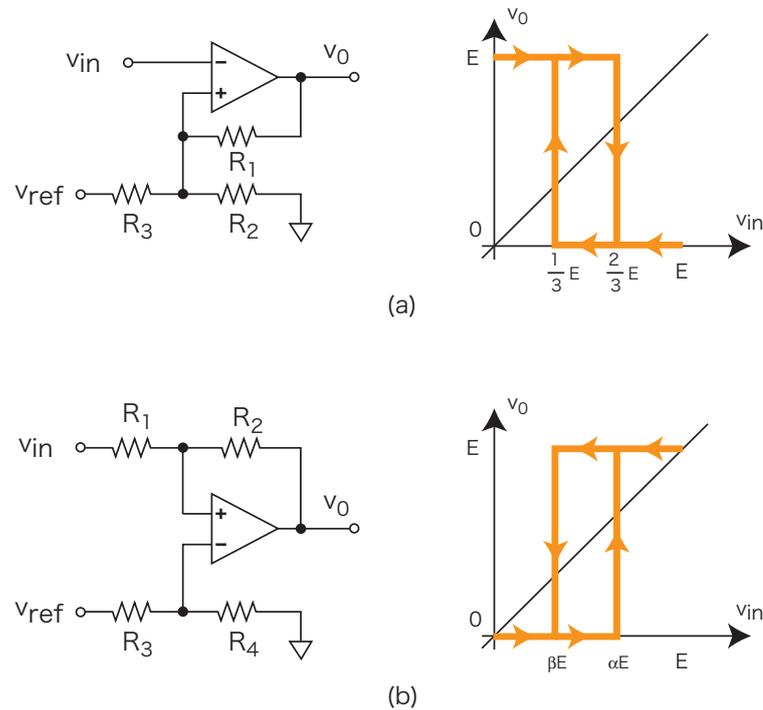


図 3.7 フィードバックのあるコンパレータ特性。

### ヒステリシス回路：シュミット回路

オペアンプの出力  $v_0$  からのフィードバック効果を付加した回路が図 3.7 の回路である。図 (a) の回路の特性を Z 型特性，図 (b) の特性を S 型特性と呼ぶことにしよう。

### Z 型特性のヒステリシス回路

ここでは、簡単のため抵抗の値をすべて同じ  $R$  にしてある。 $v_{in}$  を 0 から  $E$  まで変えてゆくと出力電圧  $v_0$  は次のように変化する。

1.  $v_{in}$  が小さいと  $v_+ > v_{in}$  が成り立つので、 $v_0 = E$  となっている。したがって、 $v_+ = \frac{2}{3}E$  となっている。この状態は  $v_{in} = \frac{2}{3}E$  になるまで変わらない。
2.  $v_{in} = \frac{2}{3}E$  を過ぎると、 $v_+ < v_{in}$  となるので  $v_0 = 0$  と変化する。この条件は  $v_{in} = E$  まで続く。
3.  $v_{in} = E$  から  $v_{in}$  を小さくしてみよう。最初は  $v_0 = 0$  となっているので、 $v_+ = \frac{1}{3}E$  となっている。したがって、 $v_{in} = \frac{1}{3}E$  で入力符号が変化し、出力が  $v_0 = E$  に変化する。

このことから、この回路は「 $v_{in}$  を小さい値から大きくしてゆく場合と、大きな値から小さくしてゆく場合で、出力電圧の値が異なる」という性質を持っている。入力電圧が  $\frac{1}{3}E < v_{in} < \frac{2}{3}E$  では、出力は  $v_0 = E$  または  $v_0 = 0$  の 2 つあり、どちらの値を取るかは過去の変化の履歴によ

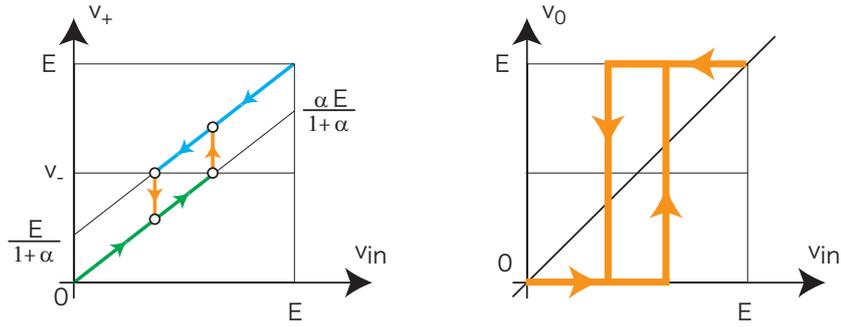


図 3.8 S 型特性のコンパレータ特性.

る. このことから, この回路はヒステリシスを持つ回路として知られ, 発見者シュミット氏の名前を付けてシュミット回路とも呼ばれている. ここで,  $\frac{2}{3}E - \frac{1}{3}E = \frac{1}{3}E$  をヒステリシスの幅という.

### S 型特性のヒステリシス回路

図 3.7 (b) の回路を考えよう.  $v_{ref} = E, R_3 = R_4$  の場合, すなわち  $v_- = E/2$  の場合を考える.

#### 1. $v_{in}, v_0, v_+$ の関係式

$$\frac{v_{in} - v_+}{R_1} + \frac{v_0 - v_+}{R_1} = 0$$

$$v_+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_{in} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_0 \tag{3.13}$$

関係式を簡単にするために,  $R_2 = \alpha R_1$  の場合を仮定すると式 (3.13) は次式となる.

$$v_+ = \frac{\alpha}{1 + \alpha} v_{in} + \frac{1}{1 + \alpha} v_0 \tag{3.14}$$

#### 2. コンパレータ特性:

$$v_+ > E/2 \text{ のとき, } v_0 = E,$$

$$v_+ < E/2 \text{ のとき, } v_0 = 0$$

これを式 (3.14) に代入して次式を得る.

$$v_+ > E/2 \text{ のとき, } v_+ = \frac{\alpha}{1 + \alpha} v_{in} + \frac{1}{1 + \alpha} E \tag{3.15}$$

$$v_+ < E/2 \text{ のとき, } v_+ = \frac{\alpha}{1 + \alpha} v_{in} \tag{3.16}$$

これらの関係式を図示すると, 図 3.8 となる.

### 3.3 キャパシタと抵抗でリズムをつくる

#### 3.3.1 キャパシタの充電と放電

キャパシタの特性

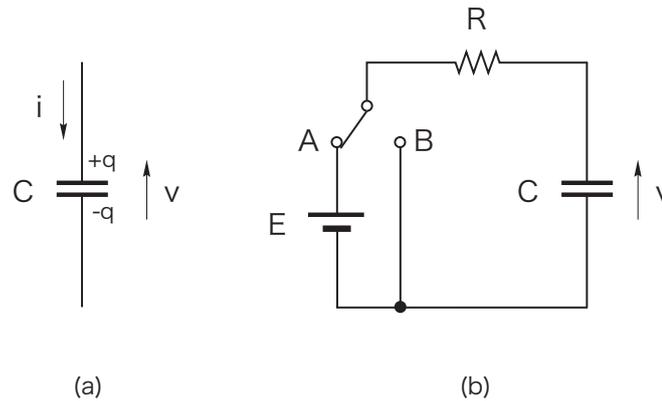


図 3.9 キャパシタと RC 回路.

キャパシタ（コンデンサとも言われている）は回路の基本素子の1つであり，電荷を蓄える素子である．図 3.9(a) 参照．電荷を蓄えるビーカーのような入れ物がキャパシタで，ビーカーに溜まった水の量を電荷と考え  $q(t)$ ，ビーカーの底面積を  $C$ ，溜まった水の高さを  $v(t)$  とおくと

$$q(t) = Cv(t) \quad (3.17)$$

の関係が成り立つ．ここに， $q(t)$  や  $v(t)$  は電荷や電圧が時刻とともに変化する時刻  $t$  の関数であることを表している．また，比例定数  $C$  は，キャパシタンス（容量）と呼ばれ，[Farad] で測られる．溜まった水の量＝底面積 × 高さであると思えばよい．電流は電荷の時間的変化として定義されているので，キャパシタの電圧と電流の関係は次式となる．

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (3.18)$$

抵抗特性と違って，「電流」と「電圧の微分」が比例の関係になっている．逆に，この特性がキャパシタの定義であると考えてもよい．

キャパシタの充電

図 3.9(b) の回路でスイッチが電池側 A に倒されている場合を考えよう．このときは，電池からキャパシタを充電することとなる．時間的に電圧や電流がどのように変化するかみてみよう．まず，回路方程式として次式を得る．キャパシタの電圧を  $v$  とすると，流れる電流は式 (3.18)

から  $i = C\dot{v}$  である\*4から、キルヒホフの電圧法則から次式を得る。

$$RC \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = E \quad (3.19)$$

回路方程式が線形微分方程式となっていることに注意しよう。未知関数であるキャパシタの電圧  $v(t)$  を求める必要がある。この方程式を解くのは難しくない。解は、指数関数と定数の和として表されることがわかる。すなわち

$$v(t) = Ae^{\lambda t} + B \quad (3.20)$$

と置いて、式 (3.19) に代入して  $e^{\lambda t}$  の係数と定数を比較すると2つの関係式

$$RC\lambda + 1 = 0, \quad B = E \quad (3.21)$$

を得る。これを式 (3.20) に代入して、一般解

$$v(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t} + E \quad (3.22)$$

が得られる。定数  $A$  はこの過程では定まらない。これは微分方程式の解の性質である。 $A$  を決定するには、ある時刻  $t = t_0$  において  $v(t)$  の値  $v(t_0) = v_0$  を与える必要がある。そうすると

$$v(t_0) = v_0 = Ae^{-\frac{1}{RC}t_0} + E \Rightarrow A = (v_0 - E)e^{\frac{t_0}{RC}} \quad (3.23)$$

となり、これを式 (3.22) に代入して整理すると、ただ1つの解

$$v(t) = (v_0 - E)e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)} + E \quad (3.24)$$

を得る。時刻  $t = t_0 = 0$  でキャパシタには電荷が溜まっていなかった状態を考えると  $v_0 = 0$  なので、解は

$$v(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right) \quad (3.25)$$

となる。これがキャパシタの充電過程といえる。

### キャパシタの放電

同様に、図 3.9(b) の回路でスイッチが B に倒された、放電過程を考えよう。回路方程式は

$$RC \frac{dv(t)}{dt} + v = 0 \quad (3.26)$$

となる。一般解は

$$v(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t} \quad (3.27)$$

となる。初期値\*5を  $t = 0$  で  $v(0) = V_0$  と仮定すると、解

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (3.28)$$

\*4 時間微分はしばしばドットで表す： $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ 。

\*5 ある時刻で従属変数の値を指定することを初期値を与えるという。また、微分方程式が時間の関数を陽に含まない場合（方程式は自律系であるという）、時間的にずらしても方程式は変わらないので、初期値は一般性を失うことなく  $t = 0$  で与えることができる。

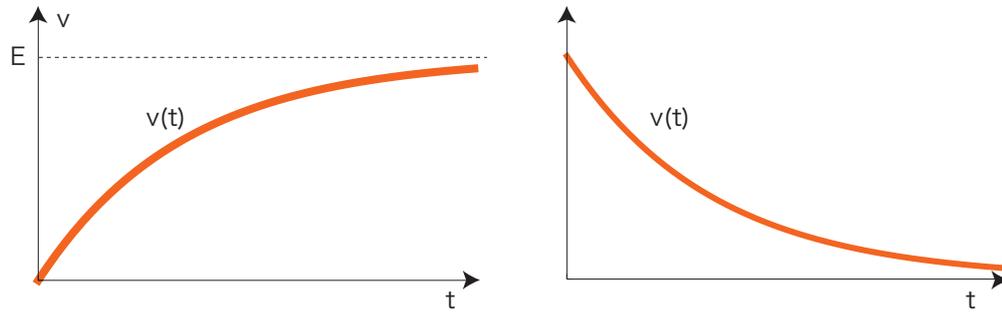


図 3.10 キャパシタの充電過程 (a) と放電過程 (b).

を得る。これがキャパシタの放電過程である。電圧，したがって電流は指数関数的に減衰する。以上の充電過程：式 (3.25) と放電過程：式 (3.28) を図 3.10(a), (b) に示した。いずれの曲線も指数関数  $e^{-\frac{1}{RC}t}$  のグラフであり，それぞれ時間の経過とともに  $v = E$ ，あるいは  $v = 0$  に漸近している。

### 3.3.2 時定数と半減期

ここで指数関数について，すこし復習しておこう。実変数  $t$  の指数関数は

$$e^t = \exp(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \quad (3.29)$$

で定義される。ここに  $e$  は自然対数の底であり，

$$e = 2.718281828 \cdots$$

の値を持つ定数（無理数）である。

今  $a$  を実数パラメータとする関数

$$x(t) = e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} \quad (3.30)$$

を考えよう。

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{(at)^k}{k!} \right\} = a \frac{(at)^{k-1}}{(k-1)!}$$

であるから

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} e^{at} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} = a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} = ax(t)$$

したがって

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \quad (3.31)$$

の関係を得る。このことから  $x(t) = e^{at}$  は次の性質を持っている。

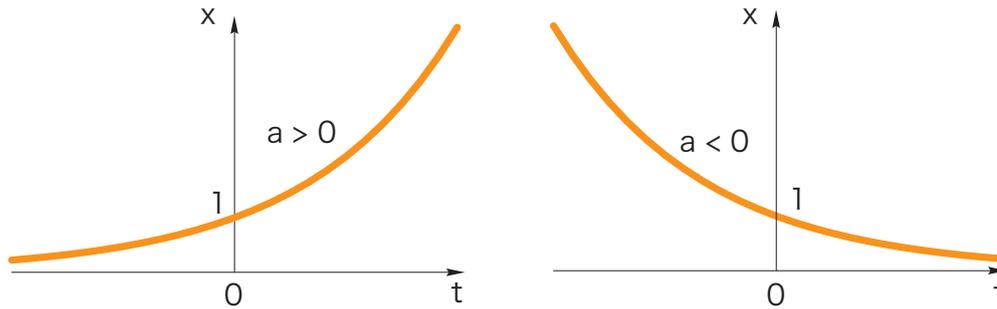


図 3.11  $x(t) = e^{at}$  のグラフ.  $a = 0$  のグラフは省略した.

1. 微分しても関数  $x(t)$  は変化しない.
2. 微分演算 (左辺) が  $a$  倍の掛け算 (右辺) に等しい. したがって, この関数の場合, 微分演算を定数倍の演算に置き換えることができる. すなわち, 微分という解析的な演算が代数的な掛け算となる.

次に  $t \rightarrow \infty$  での  $x(t)$  の振る舞いをみておこう. 明らかに次の性質がある.

1.  $a > 0$  ならば  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} = \infty$
2.  $a = 0$  ならば  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} = 1$
3.  $a < 0$  ならば  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} = 0$

これらのグラフを図 3.11 に示しておいた.

さて, 指数関数  $x(t) = Ke^{-at}$  を考える. ここに  $K$  は実定数,  $a > 0$  とする. この関数の時定数と半減期を求めよう. 関数の値が  $1/e$  となる時間間隔のことを**時定数** (time constant), また  $1/2$  となる時間間隔のことを**半減期** (half value period) という. これらの値は時刻に無関係に一定な時間間隔となる. このことをみておこう.

今  $t_0$  を任意の時刻,  $T_e$  を時定数,  $T_h$  を半減期としよう. 上述の定義から

$$\frac{x(t_0 + T_e)}{x(t_0)} = \frac{1}{e} \quad (3.32)$$

$$\frac{x(t_0 + T_h)}{x(t_0)} = \frac{1}{2} \quad (3.33)$$

が成り立つ. 式 (3.32), (3.33) に  $x(t) = Ke^{-at}$  を代入して整理すると  $aT_e = 1$ ,  $e^{aT_h} = 2$  を得る. これより

$$T_e = \frac{1}{a} \quad (3.34)$$

$$T_h = \frac{\ln 2}{a} = (\ln 2) T_e = 0.693 \dots \times T_e \quad (3.35)$$

となる. このことから  $T_e, T_h$  は  $t_0$  に依存せず,  $a$  のみで決まることが分かる.

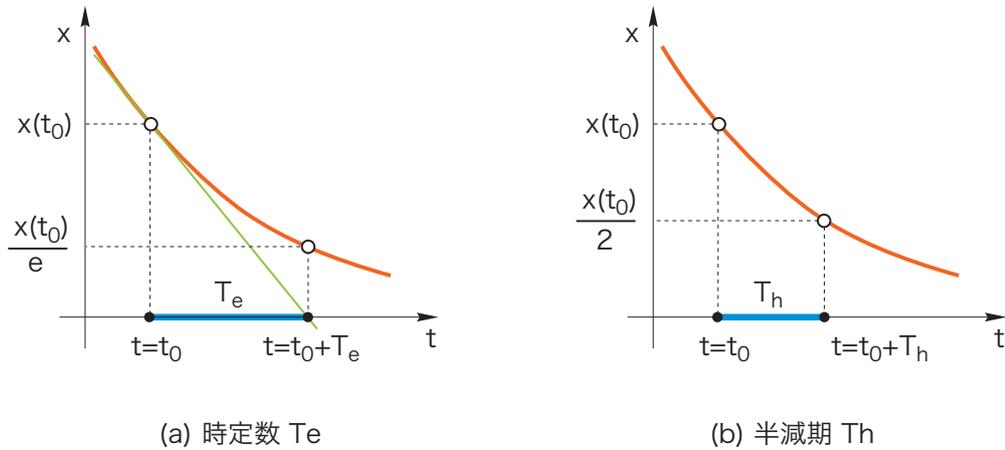


図 3.12 時定数  $T_e$  , 半減期  $T_h$  と関数のグラフとの関係.

なお、時定数は  $t = t_0$  において関数に引いた接線が 0 (時間軸) を横切るまでにかかる時間と考えることもできる、図 3.12 参照. この場合、接線の方程式は

$$y(t) = -aKe^{-at_0}(t - t_0) + Ke^{-at_0}$$

であるから

$$y(t_0 + T_e) = 0 = -aKe^{-at_0}T_e + Ke^{-at_0}$$

これより式 (3.34) が求められる. 回路ではもっぱら時定数が用いられる.

## 3.4 RC 方形波発振回路

### 3.4.1 発振回路の解析

図 3.13 に示した RC 方形波発振回路を考える. 図中の記号を用いて回路方程式は次式となる.

$$\begin{aligned}
 R_2C_1 \frac{dv}{dt} + v &= v_0 \\
 v_+ &= \frac{\frac{v_0}{R_3} + \frac{E}{R_5}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} \\
 v_0 &= E \quad (v_+ > v \text{ のとき}) \\
 v_0 &= 0 \quad (v_+ < v \text{ のとき})
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

この回路は、演算増幅器が単電源 (その電圧を  $E$  とする) で動作していると仮定し、演算増幅器の出力  $v_0$  は  $E$  または 0 のいずれかの値を取るものとする. そうすると、 $v_+$  は

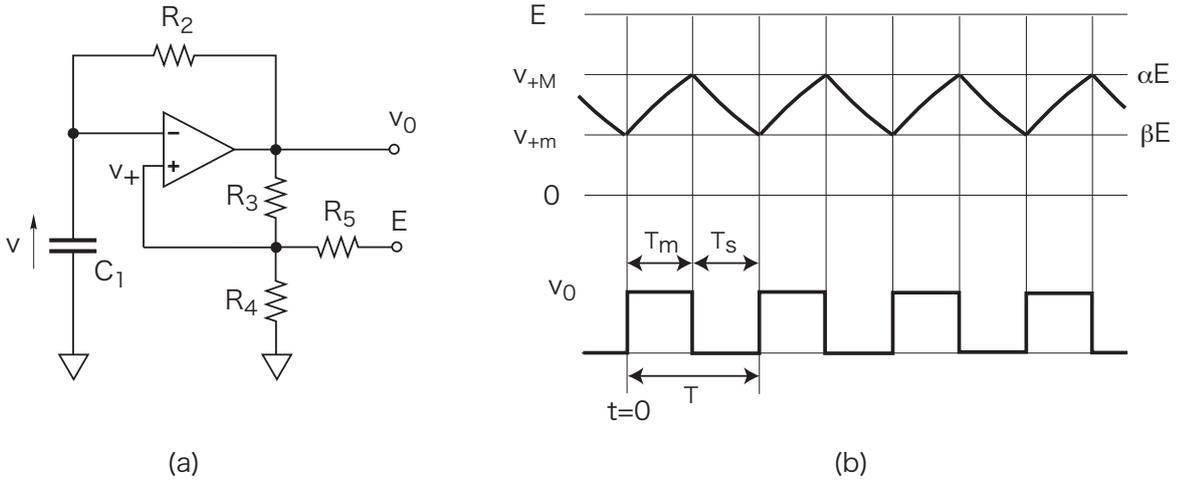


図 3.13 RC 方形波発振回路と発振波形.

1.  $v_0 = E$  の時

$$v_{+M} = \frac{\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) E}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} = \alpha E \quad (3.37)$$

ここに,

$$\alpha = \frac{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} \quad (3.38)$$

と置いた.

2.  $v_0 = 0$  の時

$$v_{+m} = \frac{\frac{E}{R_5}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} = \beta E \quad (3.39)$$

ここに,

$$\beta = \frac{\frac{1}{R_5}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} \quad (3.40)$$

と置いた.

また, キャパシタ電圧  $v$  は, 式 (3.36) より

1.  $v_0 = E$  の時

$$v(t) = Ae^{-\frac{t}{R_2 C_1}} + E \quad (3.41)$$

2.  $v_0 = 0$  の時

$$v(t) = Ae^{-\frac{t}{R_2 C_1}} \quad (3.42)$$

と変化する。この運動と  $v_+$  の値が演算増幅器の入力で比較され、出力の切り替えが行われる。その結果、演算増幅器の出力として図 3.13(b) に示した方形波が得られる。この方形波の周期  $T$  は

$$T = T_m + T_s = R_2 C_1 \ln \frac{1-\beta}{1-\alpha} + R_2 C_1 \ln \frac{\alpha}{\beta} = R_2 C_1 \ln \frac{(1-\beta)\alpha}{(1-\alpha)\beta} \quad (3.43)$$

となる。この式は次のようにして求めることができる。まず解 (3.41) を使って、 $t = 0$  で  $v(0) = \beta E$  を出発し、時刻  $t = T_m$  で  $v(T_m) = \alpha E$  となる式から  $T_m$  が求められる。同様に、解 (3.42) より、 $T_s$  を求めることができる。

### 3.4.2 発振波形の性質

一般の場合の公式を求めることができたので、ここで具体的な回路の波形についてその性質を調べておこう。まず、図 3.15(a) に示した RC 方形波発振回路を考える。 $v_+$  の電圧を与える抵抗をすべて  $R$  としたことから  $\alpha = 2/3$ 、 $\beta = 1/3$  となる。したがって、式 (3.43) から、

$$T_m = T_s = R_1 C \ln 2 \quad (3.44)$$

となる。ここでオペアンプの出力電圧  $v_0$  が  $v_0 = E$  の状態のときを、ON の状態、 $v_0 = 0$  の状態のときを、OFF の状態と呼ぶことにすると、 $T_m$  期間が ON の状態、 $T_s$  期間が OFF の状態となっている。この例では、ON の期間と OFF の期間が同じ長さである。

#### 方形波の周期と周波数

式 (3.44) から方形波の周期は次式となる。

$$T = T_s + T_m = 2T_m = R_1 C \times 2 \ln 2 \quad (3.45)$$

また、発振周波数  $f$  は

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{R_1 C \times 2 \ln 2} \quad (3.46)$$

となる。抵抗  $R_1$  をパラメータとして発振周波数とキャパシタの容量を変えたノモグラフを図 3.14 に示した。

#### デューティー比

ここでデューティー比 (duty cycle) と呼ばれる % 量  $D$  を定義しよう。方形波について

$$D = \frac{T_{ON}}{\text{周期}} = \frac{T_{ON}}{T_{ON} + T_{OFF}} = \frac{T_m}{T_m + T_s} [\%] \quad (3.47)$$

を定義する。今の例では  $D = 50\%$  ということになる。

$D$  を 50% 以外の比にしたい場合は図 3.15(b) のようにダイオードを挿入して、充電時の時定数  $R_1 C$  と放電時の時定数  $R_2 C$  を変えるとよい。このとき、 $D$  は次式となる。

$$D = \frac{R_1 C \ln 2}{R_1 C \ln 2 + R_2 C \ln 2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} [\%] \quad (3.48)$$

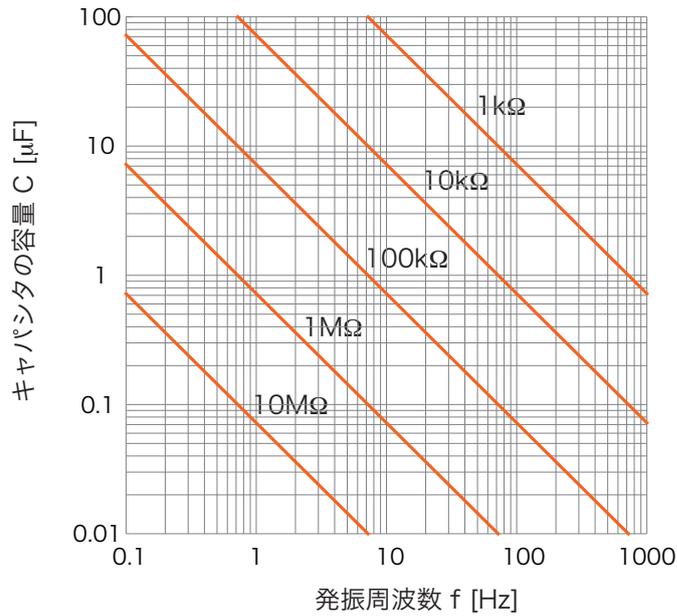


図 3.14 抵抗  $R_1$  をパラメータとして発振周波数とキャパシタの容量を変えたノモグラフ。

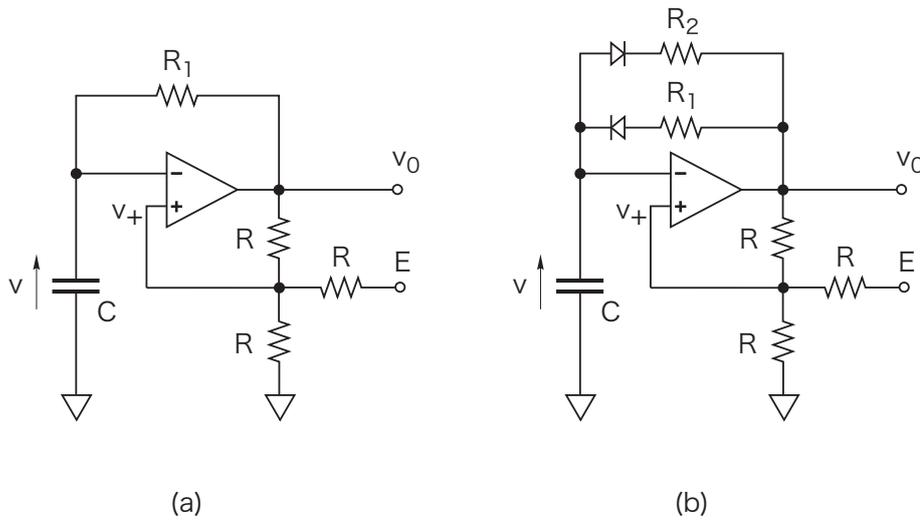


図 3.15 RC 方形波発振回路。

### 3.4.3 論理回路素子を使った方形波発振回路

シュミット論理回路、あるいはシュミットトリガー回路と呼ばれているデジタル IC には、コンパレータとして機能する素子がある。たとえば、シュミットインバータ 74HC14 とか NAND シュミットトリガーゲート 74HC132 などはこの例である。図 3.16 に回路例を示した。ヒステリシスの幅を実験的に確かめると、周期はこの章で計算した方法で容易に計算できる。時定数  $RC$  を目安に、 $0.8RC \sim 1.2RC$  程度の周期となることが予想される。

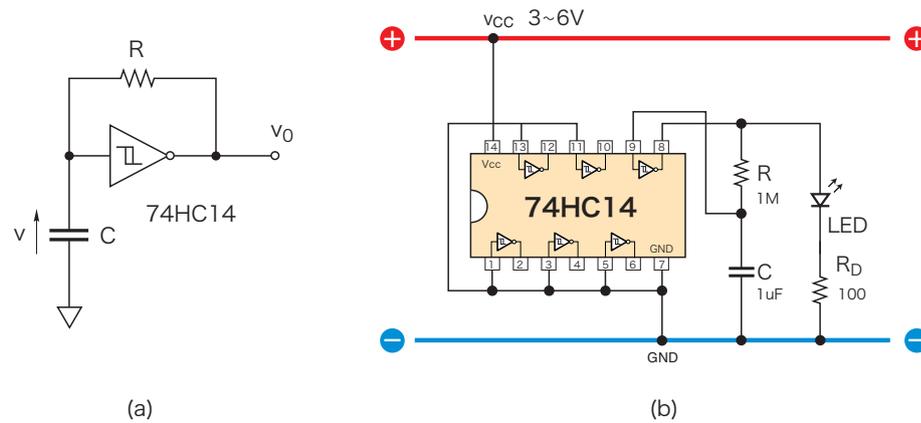


図 3.16 Schmitt インバータ:74HC14 を使った方形波発振回路.

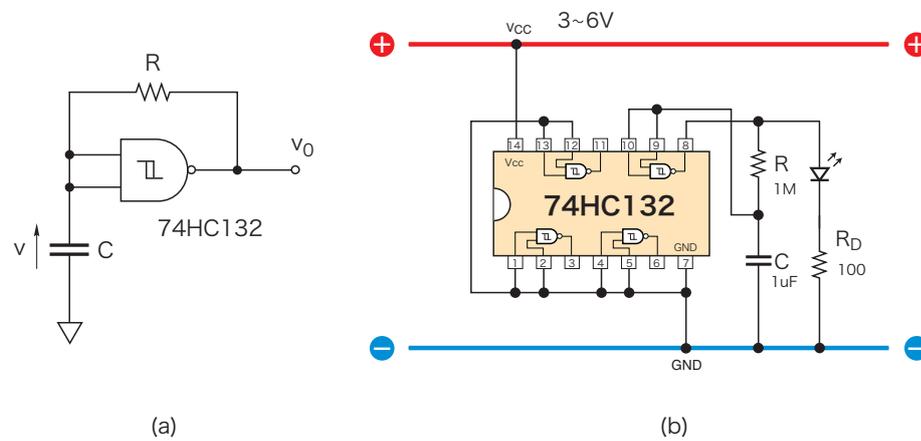
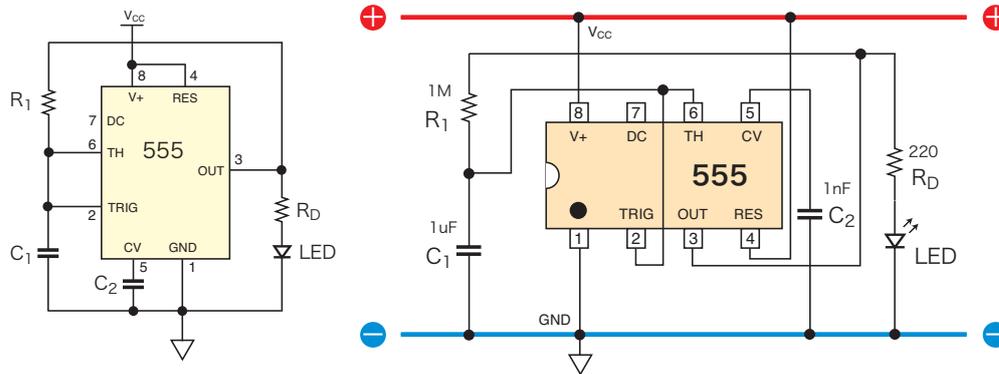


図 3.17 Schmitt NAND:74HC132 を使った方形波発振回路.

#### 3.4.4 タイマ IC:555 を使った方形波発振回路

タイマ IC:555 については次の第4章で説明する。ここでは、555 をシュミットインバータとして使った回路を示しておく。出力の3番ピンに  $R_1C_1$  直列回路がつながっていることに注意しよう。第4章の発振回路と比較のこと。本来の555を使った発振回路より使用部品点数の少ない回路となっている。デューティー比は50%である。



(a) 555 による RC 発振回路

(b) (a) の配線図

図 3.18 タイマ IC:555 を使った方形波発振回路.



## 第4章

# LED の調光：明るさを制御する

タイマー IC として知られる 555 という IC がある。1971 に設計された初期の IC である。この 40 年あまりの間に 100 億個以上の需要があり、回路設計は当初のままで現在も現役という歴史上最も成功したチップの 1 つと讃えられている\*1。この IC を使って方形波発振器を作り、その波形のデューティ比を変化させて LED の調光を行ってみよう。

### 4.1 実験 A4：555 を使った調光回路

#### 4.1.1 回路図

この実験 A4 では、LED の調光回路をつくる。図 3.13(a) が回路図、(b) が配線図である。

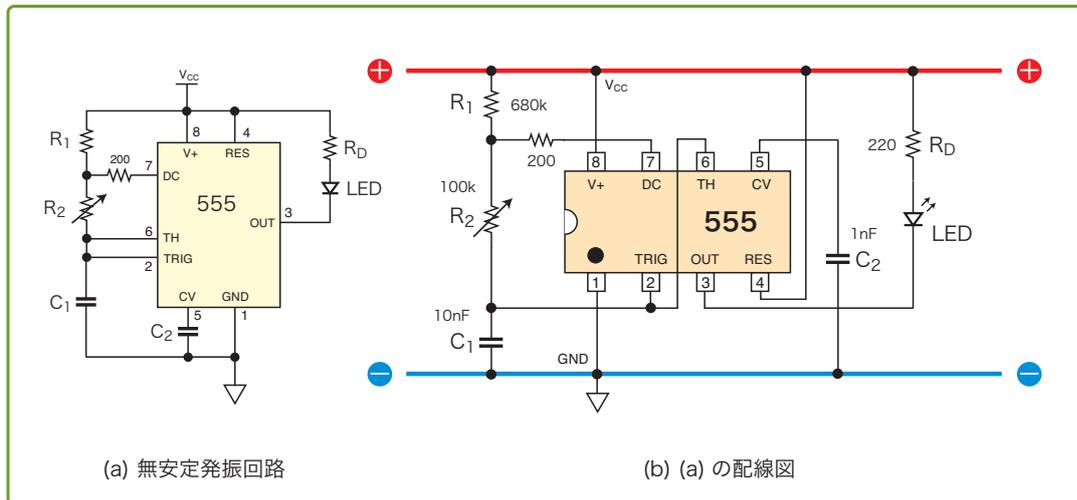


図 4.1 実験 A4. LED の調光回路。

この回路の動作解析は、以下この章の主な内容である。後でわかるように、この回路は  $R_1, R_2$

\*1 雑誌：トランジスタ技術は創刊 555 号記念として 2010 年 12 月号と 2011 年 1 月号でタイマー IC 555 の特集記事を掲載している。

と  $C_1$  で決まる時定数  $(R_1 + R_2)C_1$  でキャパシタ  $C_1$  を充電し、 $R_2$  と  $C_1$  で決まる時定数  $R_2C_1$  で  $C_1$  を放電する。LED は電源と 555 の出力端子の間につながれているので、出力端子が Low となった時間区間（キャパシタの放電時）に点灯する。 $R_2$  を小さくすると点灯時間が短くなる。すなわち、点灯時間のデューティ比を  $R_2$  で変えることができる。他方、方形波の発振周波数を 100[Hz] 程度にすれば、人間の目には点滅を識別できなくなり、 $R_2$  を変えることは LED を調光（明るさを制御）することとなる。

#### 4.1.2 回路部品

この実験で使用する部品を表 4.1 に示した。

表 4.1 実験 A4 に使用する部品

部品名	規格	数量	メモ
LED	直径 5mm	1	色は何でも可
抵抗	220Ω	1	
抵抗	680kΩ	1	
可変抵抗	100kΩ	1	B 型
コンデンサ	0.01μF	1	セラミック, 10nF
コンデンサ	0.001μF	1	セラミック, 1nF
IC	LMC555	1	NE555 でもよい
ブレッド・ボード	EIC-301	1	
ジャンパー線		数本	
電池	単 4 アルカリ乾電池	4 本	6[V] 電圧源用
電池ホルダー	単 4 電池 4 本用	1	

## 4.2 調光のしくみ：発振 + PWM（パルス幅変調）

### 4.2.1 タイマー IC 555 を使った方形波発振回路

#### 発振回路の動作

図 4.2 に回路例を示した。図 4.2 (b) を見ながら、回路の動作を考えてみよう。

1. 電源を入れた直後のコンパレータの出力は、A が Low、B が High となっている。したがって、フリップフロップはセットされ、 $\bar{Q}$ =Low である。このことから 7 ピンにつながっているトランジスタはカットオフ（したがってキャパシタ  $C$  は充電状態）、3 ピンの出力は High（したがって LED は消灯）となっている。
2.  $v = \frac{1}{3}V_{CC}$  となった直後にコンパレータ B は Low となるがフリップフロップの状態は変

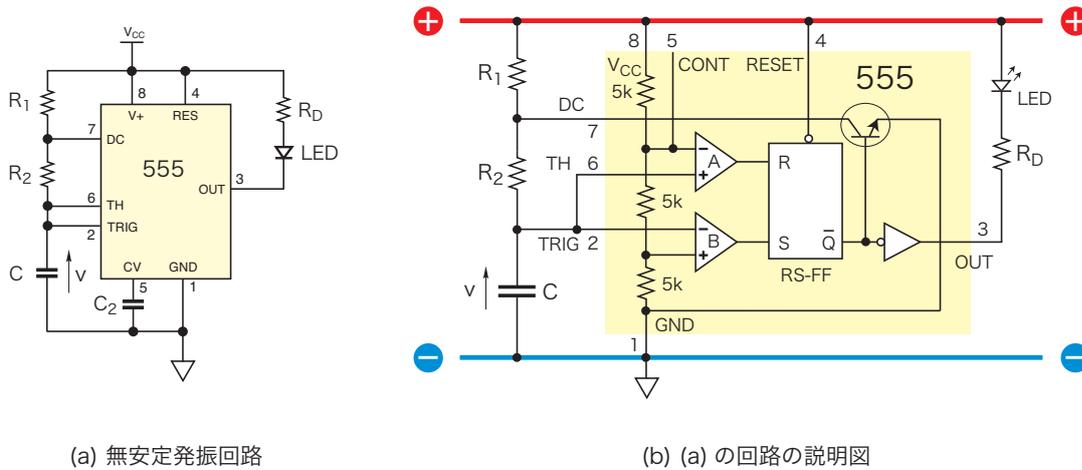


図 4.2 555 を使った方形波発振回路 (a) と回路の機能部分 (b).

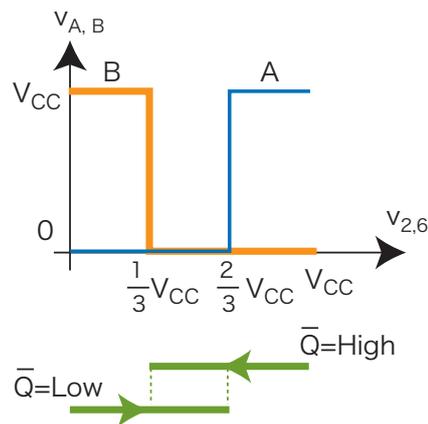


図 4.3 コンパレータと FF の入出力特性.

わらない。したがって 555 のピン 3 と 7 の状態も変わらない。

3.  $v = \frac{2}{3}V_{CC}$  となった直後にコンパレータ A は High となりフリップフロップがリセットされる。  $\bar{Q} = \text{High}$  となる。このことから 7 ピンにつながっているトランジスタは導通 (したがってキャパシタ  $C$  は放電状態), 3 ピンの出力は Low (したがって LED は点灯) となる。キャパシタ  $C$  の電圧は下がり始める。
4.  $v = \frac{1}{3}V_{CC}$  まで下がった直後にコンパレータ B は High となり、フリップフロップがセットされる。  $\bar{Q} = \text{Low}$  となり、したがって 555 のピン 3 は High, ピン 7 のトランジスタはカットオフとなり 1 の充電状態が始まる。

#### 発振波形の解析

発振波形のうち、キャパシタが充電されている期間を  $T_m$ , 放電されている期間を  $T_s$  として、これらを計算しよう。

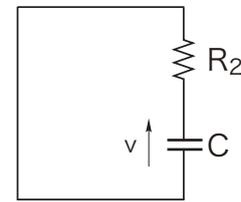
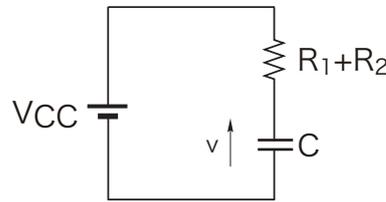
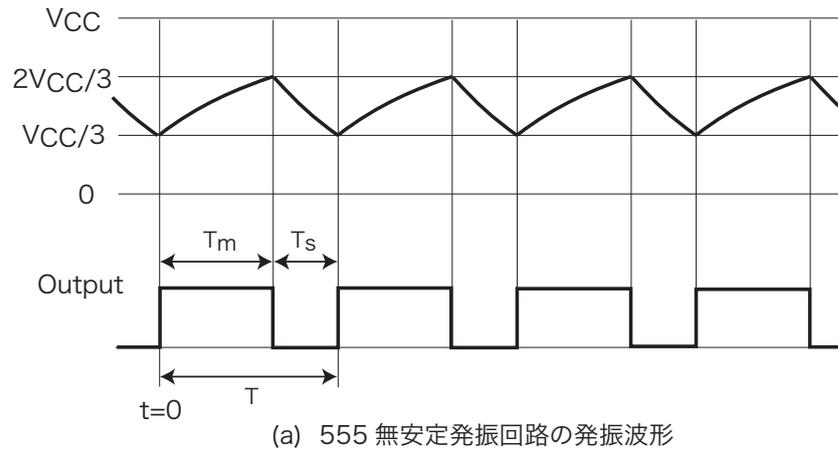


図 4.4 発振波形 (a), 充電回路 (b) と放電回路 (c).

まず、充電期間を考える。このとき回路は図 4.4 (b) となっている。したがって、この回路の回路方程式は次式となる。

$$(R_1 + R_2)C \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = V_{CC} \quad (4.1)$$

この方程式の一般解は、前章式 (3.19) 以降でみたように

$$v(t) = Ae^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}t} + V_{CC} \quad (4.2)$$

期間の最初を  $t = 0$  と考えると、初期値は  $v(0) = \frac{1}{3}V_{CC}$  である。したがって、この条件を満たす解は次式となる。

$$v(t) = V_{CC} \left[ 1 - \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}t} \right] \quad (4.3)$$

この解が、 $t = T_m$  で  $v(T_m) = \frac{2}{3}V_{CC}$  を通ることから

$$v(T_m) = V_{CC} \left[ 1 - \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{(R_1+R_2)C}T_m} \right] = \frac{2}{3}V_{CC}$$

この式を整理すると

$$T_m = (R_1 + R_2)C \ln 2 \quad (4.4)$$

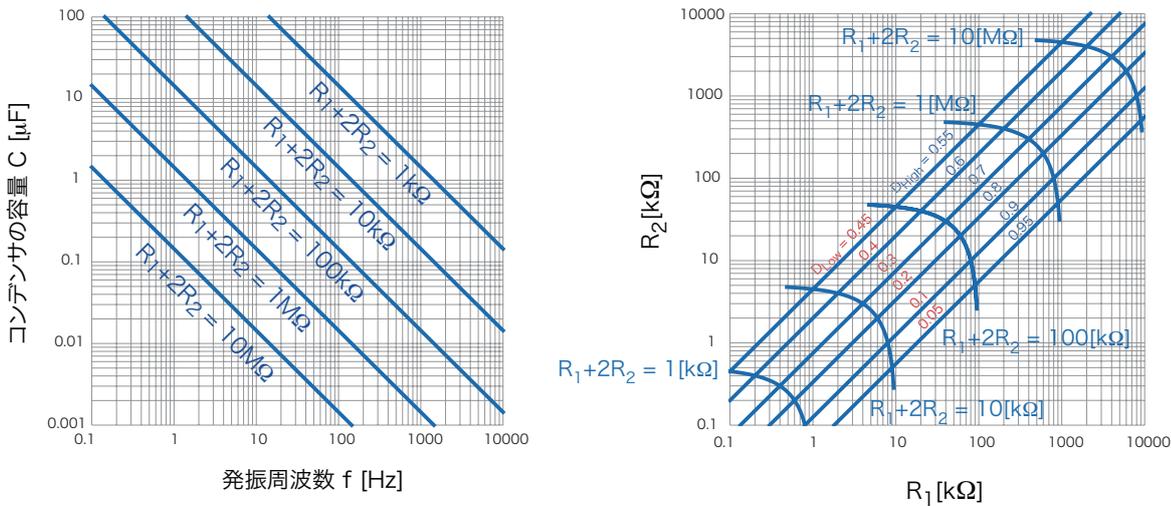


図 4.5 発振周波数とデューティ比を与えてキャパシタの容量と抵抗値を求める。

を得る\*2。

同様にして、放電期間を求める。回路図 4.4 (c) を考えるとよいので、上とまったく同じようにして  $T_s$  は次式となる。

$$T_s = R_2 C \ln 2 \quad (4.5)$$

そこで、この波形の周期  $T$  と周波数  $f$  は、次式となる\*3。

$$T = T_m + T_s = (R_1 + R_2) C \ln 2 + R_2 C \ln 2 = (R_1 + 2R_2) C \ln 2 \quad (4.6)$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{(R_1 + 2R_2) C \ln 2} \quad (4.7)$$

また、出力が High に対するデューティ比  $D_{High}$  は次式となる。

$$D_{High} = \frac{T_m}{T} = \frac{T_m}{T_m + T_s} = \frac{(R_1 + R_2) C \ln 2}{(R_1 + 2R_2) C \ln 2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + 2R_2} \quad (4.8)$$

同様に、出力が Low に対するデューティ比  $D_{Low}$  は次式となる。

$$D_{Low} = \frac{T_s}{T} = \frac{T_s}{T_m + T_s} = \frac{R_2 C \ln 2}{(R_1 + 2R_2) C \ln 2} = \frac{R_2}{R_1 + 2R_2} \quad (4.9)$$

定義から明らかなることであるが、次式が成り立つ。

$$D_{High} + D_{Low} = 1.0; D_{Low} = 1.0 - D_{High} \quad (4.10)$$

図 4.5 に関係式 (4.7) と関係式 (4.8) のノモグラフを示した。この図は、発振周波数  $f$  とデューティ比  $D_{High}$  を与えて、抵抗  $R_1$ ,  $R_2$  とキャパシタンス  $C$  を求める場合に利用すると便利である。たとえば、 $f = 1[\text{Hz}]$ ,  $D_{High} = 0.8$  の場合をみてみよう。 $R_1 + 2R_2 = 1[\text{M}\Omega]$  の曲線から値を選ぶことにしよう。

\*2 出力が High の期間  $T_m$  を Mark time, Low の期間  $T_s$  を Space time というそうだ。

\*3  $\ln 2 = 0.693147\dots$ ,  $\frac{1}{\ln 2} = 1.4427\dots$  である。

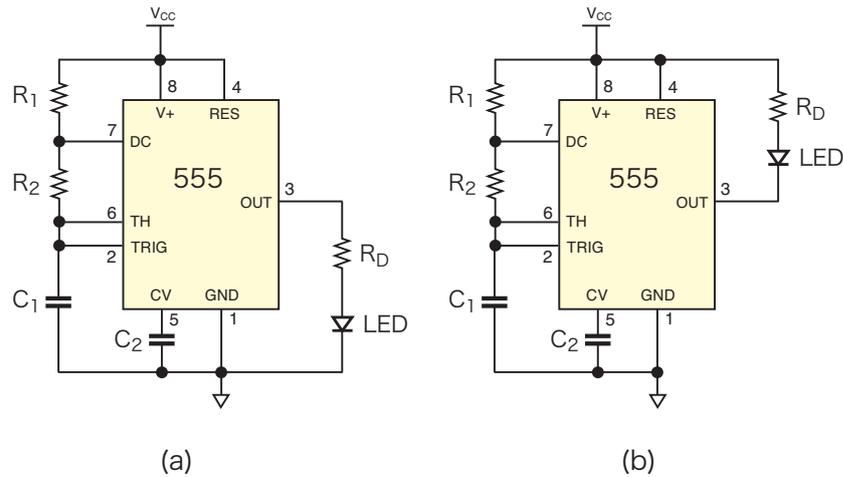


図 4.6 LED 点灯のための 2 つの接続方法. Active High(a) と Active Low(b).

1. 図の左のノモグラフを使って,  $f = 1[\text{Hz}]$  の縦の線をたどると,  $R_1 + 2R_2 = 1[\text{M}\Omega]$  の直線との交点  $C = 1.5[\mu\text{F}]$  を得る.
2. 右のノモグラフから,  $R_1 + 2R_2 = 1[\text{M}\Omega]$  の曲線と  $D_{\text{High}} = 0.8$  の直線の交点を読むと,  $R_1 = 600[\text{k}\Omega]$ ,  $R_2 = 200[\text{k}\Omega]$  を得る.

#### 4.2.2 パルス幅変調：PWM(Pulse Width Modulation)

デューティ比  $D_{\text{High}}$  (または  $D_{\text{Low}}$ ) を変えると, 1 周期の間に LED が点灯する期間を変えることができる. このようにデューティ比を変えることは, 方形波であるパルス波の幅を変えることであるから, パルス幅変調：PWM(Pulse Width Modulation) とも呼ばれている.

いま, 実験 A4 の回路では抵抗  $R_2$  に可変抵抗を使っているので, 式 (4.8) や (4.9) が  $R_2$  の関数であると考えてみよう.

$$D_{\text{High}}(R_2) = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + 2R_2}; \quad D_{\text{Low}}(R_2) = \frac{R_2}{R_1 + 2R_2} \quad (4.11)$$

であるから

$$D_{\text{High}}(0) = 1.0; \quad D_{\text{Low}}(0) = 0; \quad D_{\text{High}}(\infty) = 0.5; \quad D_{\text{Low}}(\infty) = 0.5 \quad (4.12)$$

を得る. このことから,

1. 図 4.6(a) のアクティブ・ハイの回路では, デューティ比が 100% から 50% の PWM 制御が, また,
2. 図 4.6(b) のアクティブ・ローの回路では, デューティ比が 50% から 0% の PWM 制御ができる

ことがわかる.

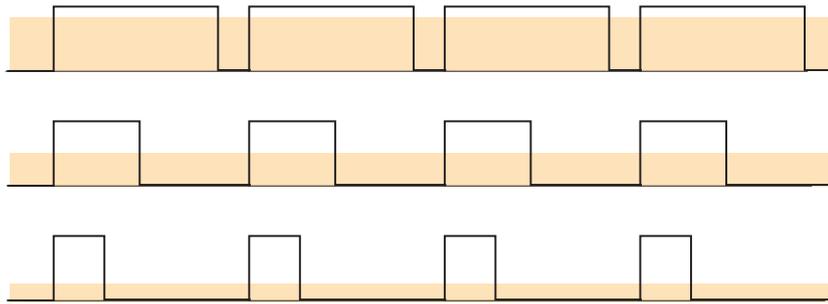


図 4.7 デューティ比の異なる方形波とその平均量（着色部分）。

### 4.2.3 視覚の性質を使う

それでは、LED を調光，すなわち明るさを制御するにはどうすればいいだろうか．PWM 制御できる点滅回路をつくり，点滅の周波数を 100[Hz] 程度にすればよい．調光がこれでいいことは，視覚に関する次の性質による．

テレビやパソコンなどの動画は，フレームと呼ばれる静止画を高速に切り替えて多数枚表示することで，動いているように見せている．1 秒間に静止画を何枚表示するかはフレームレート fps(frames per second) で示される．テレビの場合は 30fps と言われている．このことから，我々人間の視覚は 30fps（すなわち 30[Hz]）以上の早さで ON, OFF する LED の光は連続して光っているように見える．

したがって，100[Hz] 程度で点滅すれば，ON, OFF していることはまったく分からないであろう．図 4.5 の左のノモグラフでみると，先の例では， $f = 1[\text{Hz}]$  の場合の  $C = 1.5[\mu\text{F}]$  を  $C = 0.015[\mu\text{F}]$  に変更すれば， $f = 100[\text{Hz}]$  で発振することになる．

定性的な結論としては，周波数が低い場合には個々の点滅について識別できるが，周波数が高くなると点滅の平均量しか識別できなくなるということである．図 4.7 参照．

## 4.3 オペアンプを使った調光回路

### 4.3.1 LM358 のオペアンプを 2 つ使った調光回路

この章の実験 A4 : 555 を使った調光回路では，調光のためのデューティ比は 100% ~ 50% または 50% ~ 0% で変えることしかできなかった．そこで，デューティ比が 100% ~ 0% で変えられる回路を考えよう．

回路を簡単にするために，前章で作った LM358 の方形波発生回路と，残った未使用のオペアンプをコンパレータとして使い，PWD 制御をすることにしよう．図 4.8 に回路図を，またその配線図を図 4.9 に示した．オペアンプ A が方形波発振器で， $v_+$  の電圧は， $\frac{1}{3}V_{CC}$  と  $\frac{2}{3}V_{CC}$  で切り替り，キャパシタの充放電が繰り返される．

一方，オペアンプ B は，キャパシタの電圧を + 入力端子で読み，これを - 入力電圧  $v_B$  と

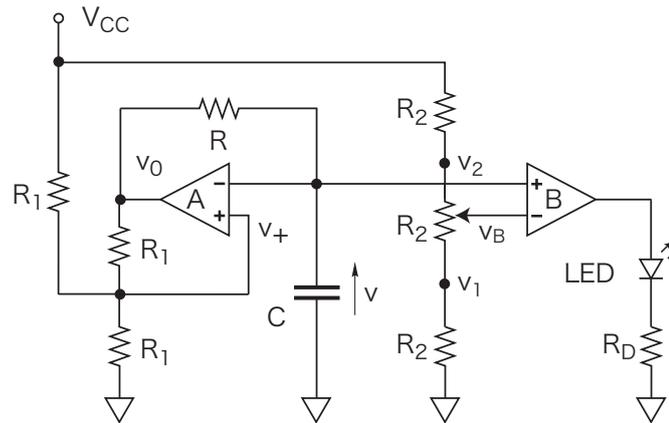


図 4.8 LM358 を使った調光回路.

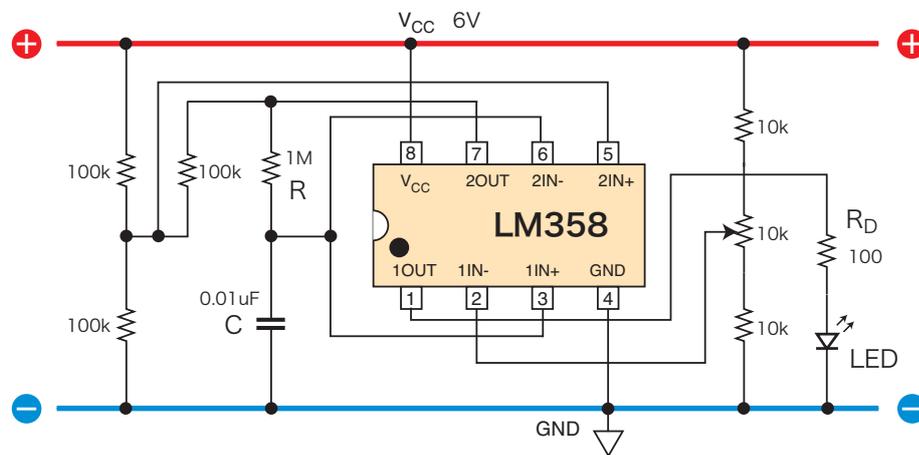
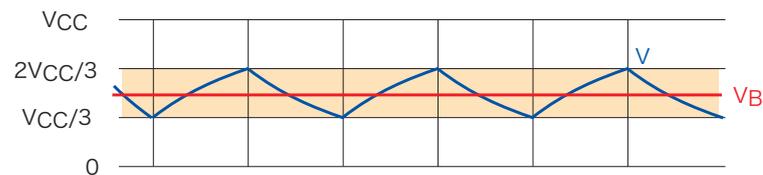


図 4.9 LM358 を使った調光回路の配線図.

図 4.10 コンパレータ B の - 入力電圧  $v_B$  の範囲：着色領域.

比較し出力電圧を出している。したがって、デューティ比を 100% ~ 0% で変えるためには、 $v_1 = \frac{1}{3}V_{CC}$ ,  $v_2 = \frac{2}{3}V_{CC}$  となるよう 3つの直列抵抗の値を設定する必要がある。図 4.10 参照。この条件が満たされていると、 $\frac{1}{3}V_{CC} < v_B < \frac{2}{3}V_{CC}$  で消灯から全点灯まで、調光をうまく行うことができる。

## 第5章

# 1.5V の電池で青色 LED を点灯する

1.5V の電池から 3V の電圧を得る回路をつくるにはどうしたらいいのだろうか。インダクタあるいはキャパシタのようなエネルギーを蓄える素子を使えばこのような回路をつくることのできる。この章では、インダクタを含む簡単な回路とスイッチの開閉動作が昇圧回路をつくるために必要であることを理解する。

キーワード：昇圧の基本回路，インダクタの過渡現象，昇圧回路

### 5.1 実験 A5：1.5V で青色 LED を点灯する回路

#### 5.1.1 回路図

この実験 A5 では、1.5V の電池 1 本で青色あるいは白色 LED を点灯する回路をつくる。図 5.1 がその回路図である。

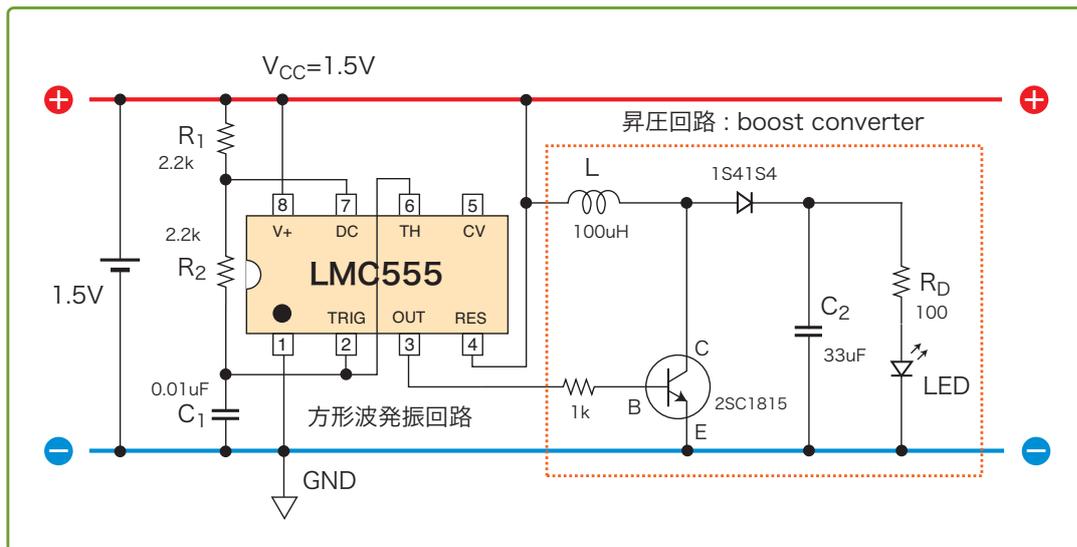


図 5.1 実験 A5. 1.5V で青色 LED を点灯する回路.

この回路の動作解析は、以下この章の主な内容である。特に、コイルすなわちインダクタは、この章ではじめて使う回路の基本素子である。図 5.1 の回路は、左に描いた 555 による方形波発振回路と、右に描いた昇圧回路の 2 つの回路からできている。更によくみると、方形波はトランジスタスイッチを周期的に開閉するだけに使われている。

また、右の昇圧回路もインダクタ、ダイオード、キャパシタと負荷（抵抗・LED）で構成された簡単な回路である。LED へ高い電圧の供給は、インダクタを流れる電流をトランジスタスイッチで制御することで実現している。

### 5.1.2 回路部品

この実験で使用する部品を表 5.1 に示した。

表 5.1 実験 A5 に使用する部品

部品名	規格	数量	メモ
LED	直径 5mm	1	白色または青色
抵抗	100Ω	1	
抵抗	1.0kΩ	1	
抵抗	2.2kΩ	2	
インダクタ	100μH	1	ドラム型
コンデンサ	0.01μF	1	セラミック, 10nF
コンデンサ	33μF	1	電解コンデンサ
ダイオード	1S41S4	1	ショットキー
トランジスタ	2SC1815	1	
IC	LMC555	1	
ブレッド・ボード	EIC-301	1	
ジャンパー線		数本	
電池	単 4 アルカリ乾電池	1	1.5[V] 電圧源用
電池ホルダー	単 4 電池 4 本用	1	単 4 電池 2 本用でも可

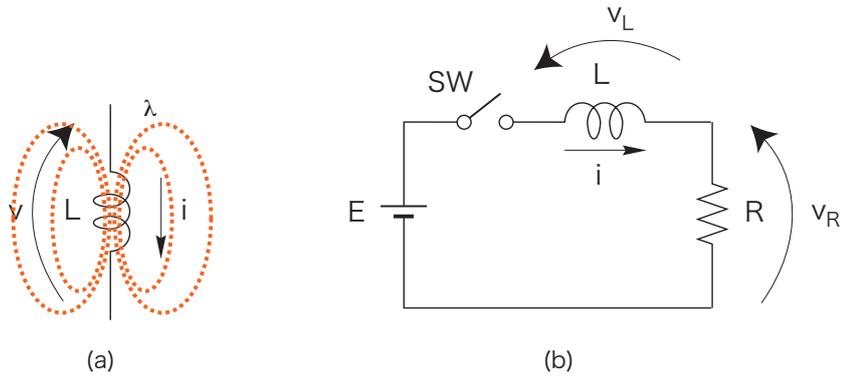


図 5.2 インダクタ (a) と LR 回路.

## 5.2 インダクタの過渡現象

### 5.2.1 インダクタと抵抗の回路

#### インダクタの特性

図 5.2 (a) に示したコイル (インダクタ) は、磁気的エネルギーを蓄える素子である。インダクタの端子変数は、磁束  $\lambda[Wb]$ 、電流  $i[A]$  と電圧  $v[V]$  である。そこで、磁束と電流の関係式

$$\lambda = Li \quad (5.1)$$

の関係が成り立つインダクタを線形インダクタという。ここでは、インダクタといえばこの線形インダクタを指すものとしておこう。一方、ファラデーの電磁誘導の法則より、磁束の時間的変化はインダクタの端子電圧に等しい。

$$v(t) = \frac{d\lambda(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt} \quad (5.2)$$

これらのことから、インダクタの端子電流と端子電圧の関係は式 (5.2) で表される。言い換えると、インダクタとは、電圧と電流の間に式 (5.2) が成り立つ素子のことであると言ってもよい。

#### RL 回路

図 5.2 (b) に示した RL 回路を解析しよう。インダクタを流れる電流  $i(t)$  がこの回路の状態を表す。そこで、この電流を使って回路方程式を導出する。キルヒホフの電圧法則から

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad (5.3)$$

を得る。

以前、3.3 のキャパシタの解析で出てきた線形微分方程式である。あの時と同様に解を求めよ

う。まず、定常解\*1を  $i(t) = I$ : 一定 とおいて、これを式 (5.3) に代入して、

$$RI = E \Rightarrow I = \frac{E}{R} \quad (5.4)$$

を得る。この定常解は、平衡点 (equilibrium point) とも呼ばれている。すぐ後で分かるように、任意の初期値から出発する解  $i(t)$  は、時間の経過に従って、この平衡点に近づいてゆく。

早速、この性質をみてみよう。時刻  $t = 0$  で初期値  $i(0) = I_0$  から出発する解を求めよう。まず、平衡点からのずれ  $x(t)$  の満たす方程式を求めよう。

$$i(t) = \frac{E}{R} + x(t) \quad (5.5)$$

とおいて、式 (5.3) に代入して、 $x(t)$  の方程式

$$L \frac{dx(t)}{dt} + Rx(t) = 0 \quad (5.6)$$

を得る\*2。この方程式の解は指数関数となる。これを

$$x(t) = Ke^{\alpha t}$$

とおいて、式 (5.6) に代入して、 $\alpha$  の式

$$L\alpha + R = 0$$

を得る。したがって、式 (5.6) の一般解は次式となる。

$$x(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} \quad (5.7)$$

そこで、式 (5.3) の一般解は次式となる。

$$i(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} \quad (5.8)$$

初期値  $i(0) = I_0$  を通る解を求めよう。

$$i(0) = I_0 = K + \frac{E}{R} \Rightarrow K = I_0 - \frac{E}{R} \quad (5.9)$$

したがって、求める解

$$i(t) = \left( I_0 - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} \quad (5.10)$$

となる。図 5.3 (b) 参照。

この解から

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \frac{E}{R} \quad (5.11)$$

となる。この性質は初期値  $I_0$  に無関係であることから、全ての解は時間が経つと平衡点に近づく。図 5.3 (a) 参照。

\*1 時間的に変化しない一定の値も式 (5.3) を満たせばれっきとした解である。

\*2 式 (3.26) をみよ。

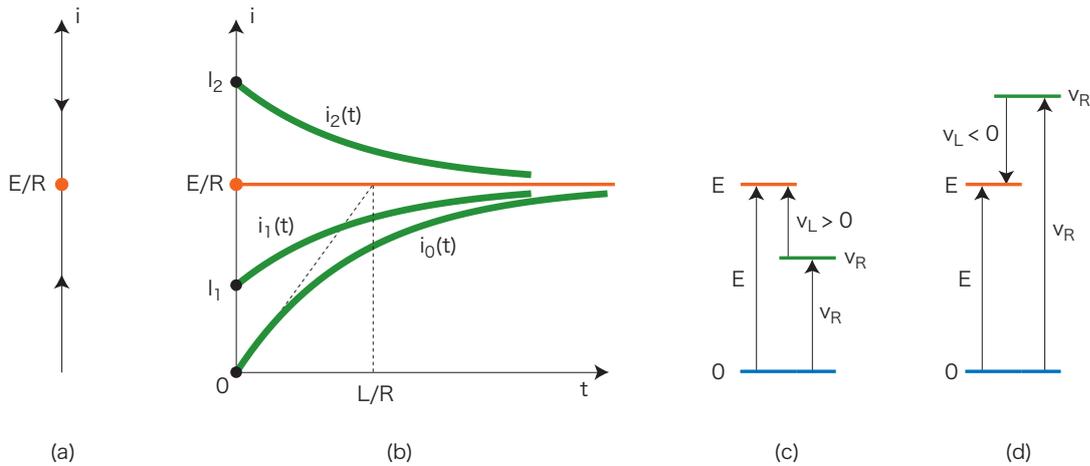


図 5.3 回路の状態である電流の時間変化.

### 各素子の電圧バランス

図 5.2 (b) に示した RL 回路は、次の電圧バランスが時間に関係なく成り立っている.

$$v_L + v_R = E \quad (5.12)$$

ここに、各電圧は  $i(t)$  から、次式のように求められる.

$$\begin{aligned} v_L(t) &= L \frac{di}{dt} = L \left( I_0 - \frac{E}{R} \right) \left( -\frac{R}{L} \right) e^{-\frac{R}{L}t} = (E - I_0 R) e^{-\frac{R}{L}t} \\ v_R(t) &= Ri(t) = (I_0 R - E) e^{-\frac{R}{L}t} + E \end{aligned} \quad (5.13)$$

そこで、次の性質が言える.

1.  $\frac{E}{R} > I_0$  のとき、 $v_L(t) > 0$  かつ  $v_R(t) < E$ . 図 5.3 (c) 参照.
2.  $\frac{E}{R} < I_0$  のとき、 $v_L(t) < 0$  かつ  $v_R(t) > E$ . 図 5.3 (d) 参照.

特に、初期値が平衡点より大きく与えられた 2 の場合には、 $v_L(t) < 0$  となっていることに注意しよう. 図 5.3 (d) 参照. このことから、負荷抵抗にかかる電圧は電池の電圧より高くなっている. 以下、次の小節で、この性質を利用して昇圧回路を考える.

### 5.2.2 チョップパ回路の性質

インダクタを使って、電源の直流電圧を別の直流電圧に変換する回路はチョップパ回路と呼ばれている. これには図 5.4 に示した 3 種類の回路が知られている.

これらの回路が実際にそのような性質を持っていることをみておこう. そのためには、スイッチ SW が ON のときと OFF のときで、これらの回路の平衡点がどう変わるかを見ておけばよい.

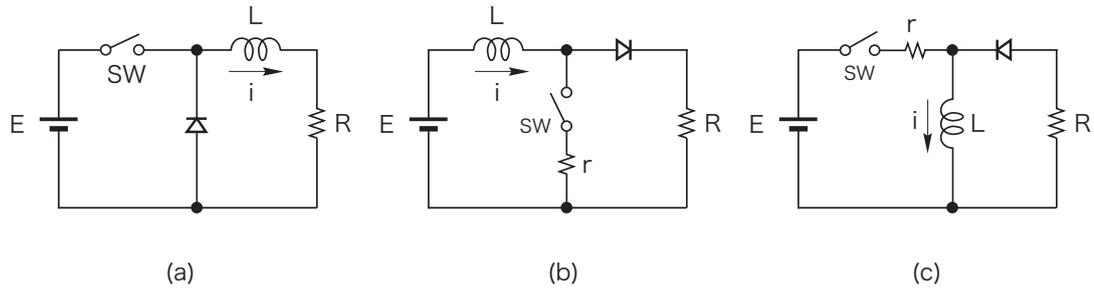


図5.4 チョップ回路. 降圧チョップ回路 (a), 昇圧チョップ回路 (b) と昇降圧チョップ回路 (c).

#### 降圧チョップ回路 (a)

スイッチ SW が ON のときの平衡点は  $i = \frac{E}{R}$ , スイッチ SW が OFF のときの平衡点は  $i = 0$  である. したがって, スイッチの ON と OFF の操作を繰り返して得られる状態は

$$0 < i(t) < \frac{E}{R} \Rightarrow 0 < v_R(t) < E \quad (5.14)$$

の範囲に限られる. このことから, 出力電圧  $v_R$  は電池の電圧  $E$  以下にしか設定できない.

#### 昇圧チョップ回路 (b)

この回路では  $r \ll R$  を仮定しておこう. すなわち, 抵抗  $r$  は非常に小さい値と仮定する. スイッチ SW が ON のときの平衡点は  $i = \frac{E}{r}$ , スイッチ SW が OFF のときの平衡点は  $i = \frac{E}{R}$  である. 仮定から  $\frac{E}{R} < \frac{E}{r}$ . したがって, スイッチの ON と OFF の操作を繰り返して得られる状態は

$$\frac{E}{R} < i(t) < \frac{E}{r} \Rightarrow E < v_R(t) < \frac{R}{r}E \quad (5.15)$$

の範囲に限られる. このことから, 出力電圧  $v_R$  は電池の電圧  $E$  よりも大きく設定できる.

#### 昇降圧チョップ回路 (c)

この回路でも  $r \ll R$  を仮定しておこう. すなわち, 抵抗  $r$  は非常に小さい値と仮定する. スイッチ SW が ON のときの平衡点は  $i = \frac{E}{r}$ , スイッチ SW が OFF のときの平衡点は  $i = 0$  である. 仮定から  $\frac{E}{R} < \frac{E}{r}$ . したがって, スイッチの ON と OFF の操作を繰り返して得られる状態は

$$0 < i(t) < \frac{E}{r} \Rightarrow 0 < v_R(t) < \frac{R}{r}E \quad (5.16)$$

の範囲となる. このことから, 出力電圧  $v_R$  は電池の電圧  $E$  よりも大きく設定できるし, また小さくも設定できる.

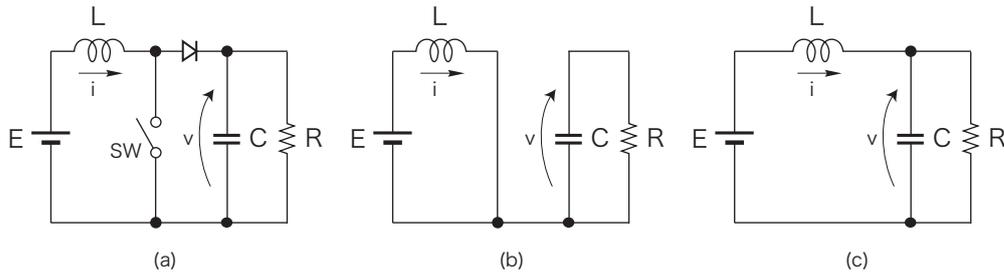


図 5.5 実験 A5 の回路 (a), スイッチ on 時の回路 (b) とスイッチ off 時の回路 (c).

### 5.3 電圧を高くする回路：ブーストコンバータ

電池のような直流電圧を別の直流電圧に変換する回路は、一般に DC-DC コンバータと呼ばれている。この小節では、この章の実験 A5 でとりあげた回路の荒っぽい解析をすることにしよう。

また、その後キャパシタを使った別の方式の昇圧回路についても簡単に実験することにしよう。

#### 5.3.1 昇圧回路の荒っぽい解析

##### 実験 A5 の回路の動作

実験 A5 の回路の昇圧回路を少し簡単にした回路を図 5.5(a) に示した。簡単にした部分は、LED を省略し、抵抗のみの負荷とした点である。また、スイッチと直列に入れておいた小さな抵抗も省略している。更にスイッチとして使われているトランジスタは、スイッチに戻しておいた。このスイッチは  $T_{on}$  時間閉じた後、 $T_{off}$  時間開く動作を繰り返していると仮定する。

##### スイッチ on 時の回路方程式

このときの回路は図 5.5(b) となる。回路方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} &= E \\ C \frac{dv}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

回路が 2 つに分離しているので、方程式も 2 つに分離している。第 1 の方程式はインダクタ電流の増える様子を表している。省略した小さい抵抗を  $r$  と考えると、 $i$  は

$$I_{on} = \frac{E}{r} \quad (5.18)$$

の平衡点に向かって増加する。図 5.6(a) の平衡点 P:on 参照。一方、出力抵抗に並列のキャパシタ電圧  $v$  の方は、第 2 式に従って平衡点  $v = 0$  に向かって減衰する。

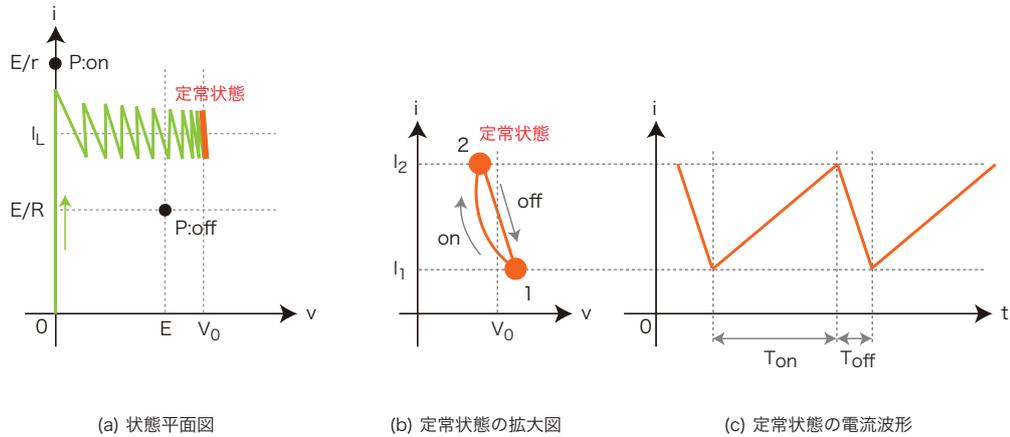


図 5.6 状態平面図 (a), 定常状態 (b) とその波形 (c).

#### スイッチ off 時の回路方程式

このときの回路は図 5.5(c) となる。回路方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} + v &= E \\ C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} &= i \end{aligned} \quad (5.19)$$

この方程式の平衡点は  $(v, i) = (E, \frac{E}{R})$  となる\*3。図 5.6(a) の平衡点 P:off 参照。

#### スイッチが周期的に on, off する場合の状態の変化

以上の結果を考えながら、インダクタを流れる電流  $i$  とキャパシタの電圧  $v$  の変化の概要を考えてみよう。初期値は  $(v, i) = (0, 0)$  であったとしよう。

1. スイッチ on の期間に電流は平衡点 P:on に向かって増加する。キャパシタはまだ充電されていない。
2. スイッチ off になると、電流は減少に向かい、キャパシタは充電される。
3. 次にスイッチ on の期間に入ると、電流は平衡点 P:on に向かって増加し、充電されたキャパシタも少しは放電しつつ、キャパシタ電圧をほぼ保った動きとなる。
4. 2, 3 を繰り返しながら、状態は定常状態に落ち着く。図 5.6(a) の緑の曲線と赤の曲線参照。

そこで定常状態をもう少し詳しくみてみよう。図 5.6(b), (c) 参照。計算を簡単にするために、次の仮定をおく。

1. スイッチと直列に入れた小さな抵抗は 0 である。

\*3 平衡点を求めるには、 $\frac{di}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0$  と置いて、残りの連立方程式を解けばよい。

2. キャパシタの電荷は変化しない。定常状態ではキャパシタは電圧が  $V_0$  の電池とみなす。
3. デューティ比  $D$  を  $D = \frac{T_{on}}{T_{on} + T_{off}} = \frac{T_{on}}{T}$  とする。ここに、 $T = T_{on} + T_{off}$  とおいた。

定常状態である周期的な運動とは、図 5.6(b) の点 1 から出発した状態が、スイッチ on の方程式に従って点 2 まで運動し、そこでスイッチ off となり、スイッチ off の方程式に従って点 1 に返る周期運動のことである。

1. 点 1 から出発し、点 2 で終わる  $T_{on}$  時の電流を計算する。式 (5.17) の第 1 式より

$$i(T_{on}) = I_2 = \int_0^{T_{on}} \frac{E}{L} dt + I_1 = \frac{E}{L} T_{on} + I_1 = \frac{E}{L} DT + I_1 \quad (5.20)$$

2. 次に、点 2 から点 1 に帰る  $T_{off}$  時の電流を計算する。式 (5.19) の第 1 式と仮定 2 の  $v = V_0$  より

$$i(T_{off}) = I_1 = \int_0^{T_{off}} \frac{E - V_0}{L} dt + I_2 = \frac{E - V_0}{L} T_{off} + I_2 = \frac{E - V_0}{L} (1 - D)T + I_2 \quad (5.21)$$

を得る。

3. 式 (5.21) を式 (5.20) に代入して整理すると、出力電圧の平均値として次式を得る。

$$V_0 = \frac{E}{1 - D} \quad (5.22)$$

4. 出力電流の平均値は次式となる。

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{1}{1 - D} \frac{E}{R} \quad (5.23)$$

5. また、インダクタ電流は期間  $T_{off}$  だけ出力に流れ出す。これが出力電流と考えると、いずれも平均値で

$$I_0 = (1 - D)I_L \quad (5.24)$$

したがって、インダクタを流れる電流の平均値  $I_L$  は次式となる。

$$I_L = \frac{1}{(1 - D)^2} \frac{E}{R} \quad (5.25)$$

これで、昇圧回路の荒っぽい解析ができた。すなわち、次の結果が導かれた。

- 何も制御しなければ、すなわちスイッチを off のままにしておけば、図 5.5(c) の回路であり、回路の状態は平衡点  $(v, i) = (E, \frac{E}{R})$  に落ち着く。
- 周期的にスイッチを on, off すれば、状態は平均の値として  $(v, i) = (V_0, I_L) = (\frac{E}{1 - D}, \frac{1}{(1 - D)^2} \frac{E}{R})$  に落ち着く。

状態は、電圧で  $\frac{1}{1 - D}$  倍、電流で  $\frac{1}{(1 - D)^2}$  倍されることになる。この結果はあくまで定性的な目安に過ぎないと思ってよいであろう。途中での色々な仮定が評価をかなりあまくしている。ともあれ、昇圧回路が構成可能であるという結論は解析を勇気づけてくれる。

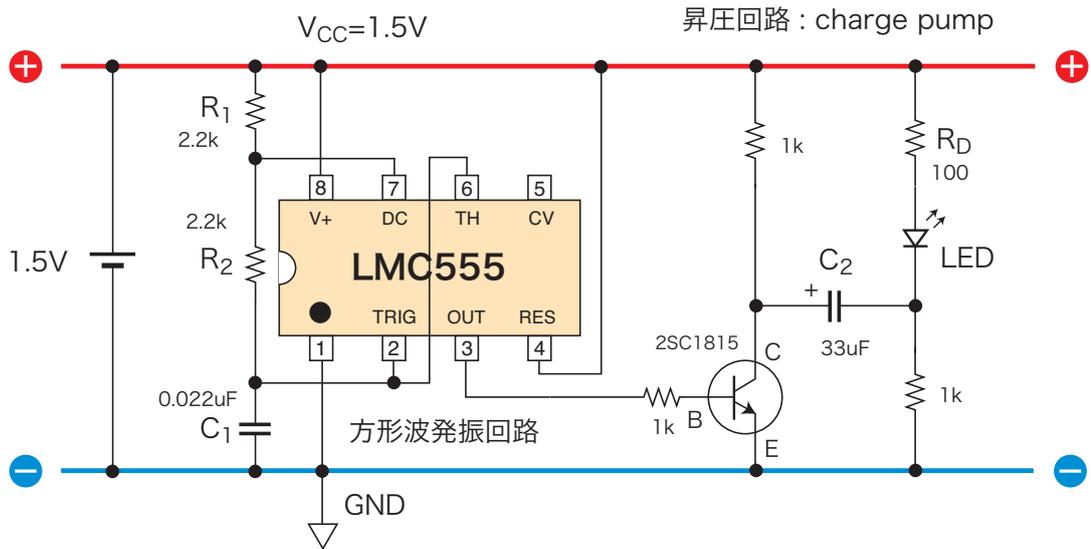


図 5.7 電荷ポンプ方式の昇圧回路, キャパシタ 1 個の場合.

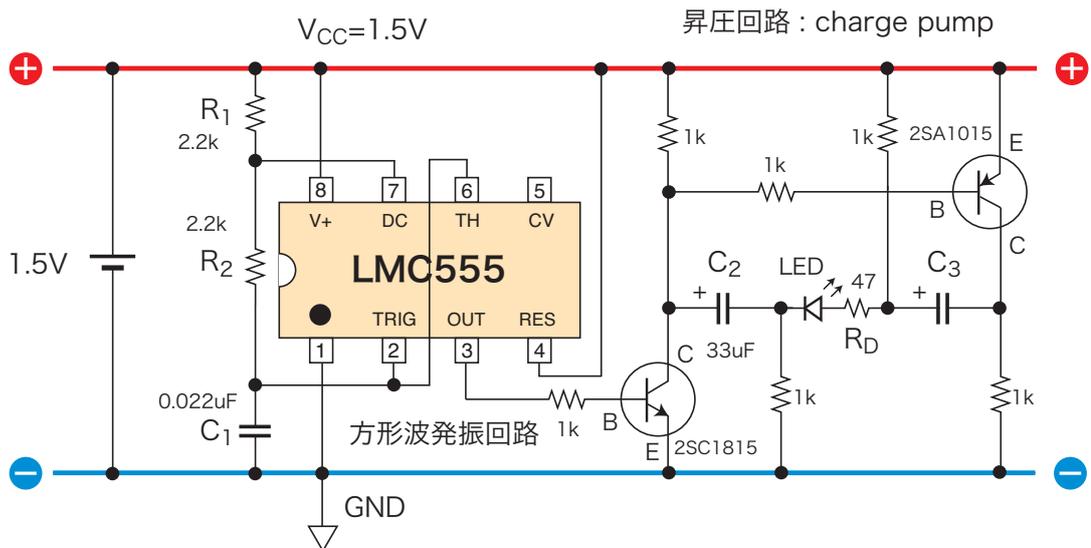


図 5.8 電荷ポンプ方式の昇圧回路, キャパシタ 2 個の場合.

### 5.3.2 電荷ポンプ方式の昇圧回路

電池と並列にキャパシタを接続してキャパシタを充電し、次にスイッチを切り換えて電池とキャパシタを直列にすれば、瞬間とはいえ電池の何倍かの電圧を供給できる。これを実際に試みたのが図 5.7 や図 5.8 の回路である。

この方式の回路では、スイッチを切り換えるための方形波の周波数とキャパシタを充電するときの時定数をうまく選んで放電を適切な電圧で持続できるようにしなければならない。ここに示した回路は、その点で今後改良しなければならない未完成の回路である。

## 付録 A

# おためし回路論

この付録の章では、電子回路の解析に必要な最小限の回路理論を展開する。名づけて「おためし回路論」という。これは、よくあるコンピュータ・ソフトの「おためし版」に似ている。

### A.1 おためし回路論って何なの

A 「おためし回路論って、聞いたことがないですねえ」

K 「おためし回路とは、抵抗素子に非線形特性を許した直流回路のことと定義します」

A 「それじゃー、普通の直流回路でしょう。違いなんか無いのでは…」

K 「その通りです。ただ、素子値に非線形特性を許したことで、通常の直流回路解析よりも幾何学的説明が多くなっています」

A 「で、また何でそんなにまでして「おためし回路」が必要なんですか」

K 「一口に言ってしまうと、電子回路で扱うダイオードやトランジスタを含んだ回路の解析を分かり易くしたかったからです。連立方程式を解析的に解くのではなく、幾何学的に定性的に動作を理解したいと思ったのです。そこで、おためしのアイデアにたどりつきました」

A 「連立方程式の建て方、解き方が分かれば、それでいいのでは無いですか」

K 「非線形特性を許したとたんに思考方法も変更したほうが動作の全体像をつかむのに好都合なのです。ただ、世間ではそのような指摘はあまり表立ってはされていません。そこで、「おためし」と言いながら「気が付いてみると、実は本物の本質を突いていた」なんてことも期待したい気持ちがありました」

A 「ちょっと、話題ははずれますが、このノートは数式が断り無く使われていて、面食らってしまう箇所が多々あります。もう少し図を増やしてビジュアルにした方がいいように思いますが…」

K 「それはそのとおりでしょうね。まさにご指摘の点こそが幾何学的思考に切り換えるということです。ただ、最近では高校物理や高校数学の解説本がはやっています。電気回路理論は多分、高校理科教科書全般を解説する最もシンプルでおもしろい教材ではないでしょうか。今回は、試みに式や文章を増やして不必要な図を故意に省略しました。幾何学的と言いながら…」

A 「その分、やっぱり分かりにくくなっていますよ」

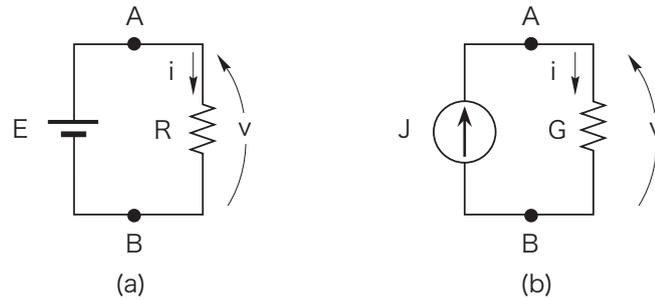


図 A.1 簡単な回路の例. 電圧源と抵抗の回路 (a). 電流源と抵抗の回路 (b).

## A.2 直流回路とは

直流回路とは，電池（電圧源）や電流源と抵抗でできた回路のことである．素子をつないで回路を作ったとたん，各素子の電圧および電流が決まってしまうので，以後，変化することはない．

直流回路の解析とは，直流回路にどのような電圧かかり，電流が流れているのか見出すことである．また，計算結果が不都合なものであれば，適切に回路を変更して望ましい回路を見つきたい．

そこで，まずは簡単な回路の実例をみてみよう．図 A.1 (a) は，電池（電圧源）に抵抗がつながった回路である．また，図 A.1 (b) は，電流源と抵抗の回路である．これらの回路を解析してみよう．

### 電池と抵抗の回路

図 A.1 (a) の回路では，点 A と点 B の間の電圧  $v$  は左右の素子の電圧に等しいので，図の記号を用いて

$$v = E \quad (\text{A.1})$$

となる．一方，回路の右側の抵抗素子は，電圧と電流が比例の関係にある素子を使ったと仮定しよう．すると次式を得る．

$$v = Ri \quad (\text{A.2})$$

この関係はオームの法則と呼ばれている．抵抗の性質を表しているので，抵抗の特性ともいう．「この抵抗は線形と仮定する」等と言われると，このことを言っていると解釈してほしい．電圧  $v$  は左右で同じなのだから，上の 2 式を等しいと置くと，次式を得る．

$$v = E = Ri \quad \Rightarrow \quad i = \frac{E}{R} \quad (\text{A.3})$$

これで抵抗を流れる電流が見つかった．

以上のことを素子電圧  $v$  と素子電流  $i$  がつくる  $(v, i)$  平面で幾何学的に見てみよう．次の点に注意しよう．

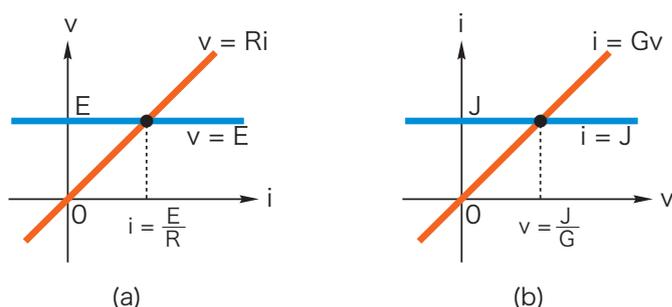


図 A.2 幾何学的にみる. 電圧源と抵抗の回路 (a). 電流源と抵抗の回路 (b).

- 素子特性は,  $(v, i)$  平面内で曲線 (特別な場合は直線) で与えられる.
- 電圧源は, 式 (A.1) が表す直線で, また, 抵抗は式 (A.2) が表す原点を通る直線で表される.
- これら 2つの条件を満たす点は, 両直線の交点であり, 交点の座標は  $(i, v) = (\frac{E}{R}, E)$  となる. この交点のことを動作点, あるいは平衡点と言うこともある. 適当に使い分けてほしい.

これらの結果は, 図 A.2 (a) に示されている.

#### 電流源と抵抗の回路

図 A.1 (b) の回路では, 点 A を流れる電流  $i$  は左右等しいので, 図の記号を用いて

$$i = J \quad (\text{A.4})$$

となる. 一方, 回路の右側の抵抗素子は, 電圧と電流が比例の関係にある素子を使ったと仮定しよう. すると次式を得る.

$$i = \frac{v}{R} = Gv \quad (\text{A.5})$$

ここで,  $G = \frac{1}{R}$  とおいた. 抵抗を逆数の  $G$  で表すと, 電流の流れやすさを表すので, 抵抗と言わずコンダクタンスという. 上の 2式を等しいと置くと, 次式を得る.

$$i = J = Gv \quad \Rightarrow \quad v = \frac{J}{G} \quad (\text{A.6})$$

これでコンダクタの電圧  $v$  が見つかった.

以上のことを素子電圧  $v$  と素子電流  $i$  がつくる  $(v, i)$  平面で幾何学的に見てみよう. 次の点に注意しよう.

- 電流源は, 式 (A.4) が表す直線で, また, コンダクタは式 (A.5) が表す直線で表される.
- これら 2つの条件を満たす点は, 両直線の交点であり, 交点の座標は  $(v, i) = (\frac{J}{G}, J)$  となる.

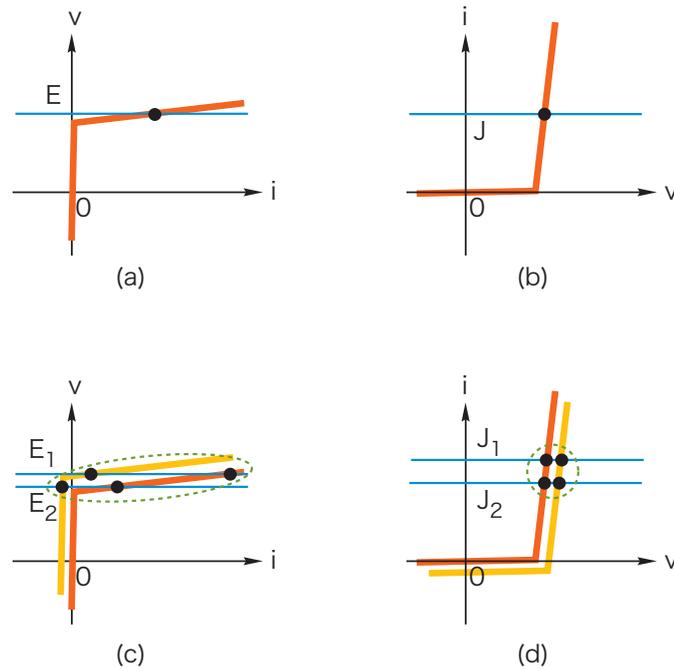


図 A.3 電圧源と抵抗の回路の交点 (a). 電流源とコンダクタの回路の交点 (b). 交点のゆらぎ：電圧源と抵抗の回路の場合 (c). 電流源と抵抗の回路の場合 (d).

これらの結果は、図 A.2 (b) に示されている。電池の場合と比較すると、式でも、また幾何学的にも似た形の結果が得られる。どちらかを求めておけば、他方は自動的に導かれる。

#### 抵抗の特性が折れ線の回路

次に、抵抗特性が直線でなくなった場合を考えてみよう。ここでは、図 A.3 (a), (b) に示した折れ線の場合をとりあげる。両図に描かれた太い赤の折れ線が抵抗の特性を表している。横軸に電流を取るか、電圧を取るかで折れ線の折れ方が違ってみえるが、両図の特性は同じものが描いてある。発光ダイオードの順方向特性がこの折れ線で近似できることに注意しよう。

電源が、電池の場合の動作点（交点）が図 A.3 (a) に、電流源の場合の交点が図 A.3 (b) に示されている。注意してほしいことは、抵抗特性の折れ線と電源の直線の交点での交差の具合である。交点での2つの直線の傾斜が (a) 図のように似通っているか、あるいは (b) 図のように直角に近いかの違いがみられる。

#### 特性に揺らぎがある場合の動作点の移動

抵抗や電源は、素子毎に特性は少しずつ変わっている。また、使用中の環境によって特性が変化することもある。これらの「特性の揺らぎ」によって動作点はどのような影響を受けるであろうか。幾何学的にみてみよう。

特性の揺らぎは、おおざっぱにみて、特性曲線の平行移動や変形で表される。図 A.3 (c), (d) に電池の場合と電流源の場合のそれぞれの曲線群を描いてみた。それぞれ2本描かれているの

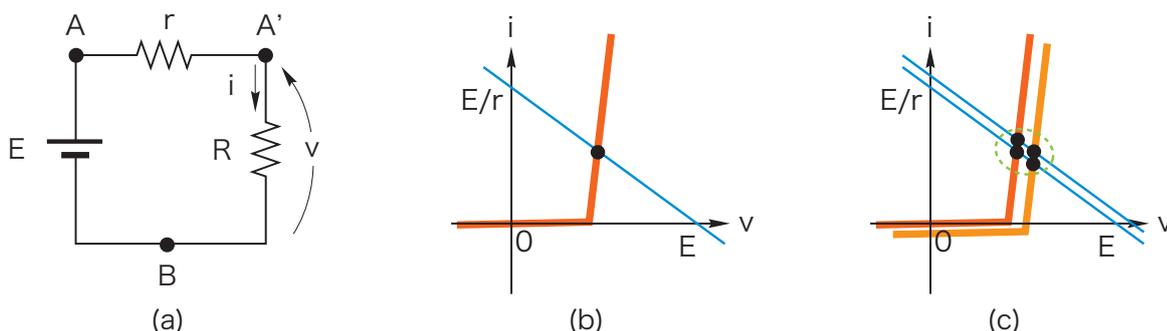


図 A.4 交点を頑丈にする. 抵抗を加えた回路 (a). 動作点 (b). 動作点のゆらぎ (c)

は、特性がその範囲で揺らぐとと考えてほしい。結果として次のことがわかる：

- 図 A.3 (c) の電池の場合は、交点も大幅に変化し、使いものにならない。すなわち、電圧の小さい変化が電流に大きく影響している。
- 他方、図 A.3 (d) の電流源の場合は、交差が直角に近いので特性ゆらぎに対して、交点は同じ程度しかゆらがない。すなわち、この回路の動作点は、ゆらぎに対して頑丈である。

#### 電池と抵抗の回路の動作点を頑丈にした回路

それでは、電池と抵抗の回路の動作点をゆらぎに対して強くするにはどうしたらいいのだろうか。答えは簡単で抵抗  $R$  に直列にもう一つの抵抗  $r$  を入れるとよい。図 A.4 (a) 参照。こうすると、電池の特性が  $v = E$  から、次式に変わる。

$$E = ri + v \quad (\text{A.7})$$

これを図示すると、図 A.4 (b) となる。そこで、ゆらぎを仮定しても交点のゆらぎは小さくなる。図 A.4 (c) 参照。この結果は、LED の点灯回路の設計でいつも指摘されている。「LED を流れる電流が大きくなりすぎることを防ぐために、電流制限用抵抗を入れましょう」という標語の理論的根拠となっている。交点での必要な電流を確保するために、電池の電圧を大きくしたり、あるいは抵抗  $r$  の値を適切に選ばなければならないなど、設計項目は増えるになる。勿論、頑丈さと引き換えに欠点も出てくる。抵抗での余分な電力消費などである。電力消費を少なくするにはまったく別の回路を考える必要がある。

#### 幾何学的アプローチのおもしろさ

以上、だらだらと述べてきたが幾何学的アプローチのおもしろさを理解していただけたであろうか。この例では、式があまりにも簡単なために、解の性質について気づかなかった事柄が、 $(v, i)$  平面で特性曲線を見ることによって鮮明にみえてきたといった利点があった。また、回路を改良する方法についてもみえてきた。「式は立てるけれども、解を求めることにこだわらず、定性的にざっくり問題の本質をみる」というのが幾何学的アプローチの特徴といえる。

### A.3 LED を使いこなそうでは何をするのか

A「ところで、この直流回路論と公開講座の「LED を使いこなそう」との関係が知りたいのですが…」

K「この講座ノートは5章からできていて、各章に1つテーマとなる実験があります。この5つの実験が「使いこなす」ことに対応しています」

K「そこで、直流回路との関係をみてみたいと思います。

第1章 LED の点灯 点灯の基本回路をつくる実験です。これは、先ほど説明した図 A.4 の回路にほかなりません。

第2章 LED の消灯 電池と LED の基本回路の間にスイッチを入れる実験です。スイッチは機械式のものトランジスタを使った電子式の実験します。

第3章 LED の点滅 スwitchを入れたり、切ったりを繰り返すとよいのですが、これは回路で実現します。それが方形波発振器です。そのためにオペアンプを使います。時間的にリズムをつくることは直流回路だけではできません。そこで登場するのがキャパシタ（コンデンサともいう）です。キャパシタは電気の素「電荷」を蓄積する素子で、蓄積には時間がかかることを使ってリズムをつくることを学びます。

第4章 LED の調光 調光とは「明るさを調整する」ことです。明るくするには LED により多くの電流を流し、暗くするには電流を少なくするとよいのですが…。LED の特性で折れ曲がり付近を使うのは動作点が変わりやすく調整が難しいことが予想できます。そこで、別の方法がこの章では提案されています。PWM の方法です。この方法は、点滅速度をばやくして我々の目には点滅を分からなくしておいて、光っている短い時間と消えている短い時間の比率を変える方法です。

第5章 1.5 V で LED を点灯する 低い電圧の電池で LED を点灯するには、電圧を高くする回路が必要です。そのためにコイル（インダクタという）を使います。実はインダクタも直流回路では使わなかった回路素子です。磁気エネルギーを蓄える素子です。この章ではスイッチとインダクタを組み合わせた昇圧回路を解析しました。

ということで、LED を使いこなそうでは、

LED の基本点灯回路 (LED + 抵抗) + 電源

の2つのどちらかを目的にしたがって変えていることが分かります」

B「講座は6回開かれ、実験テーマは5つです。1回分ぬけているようですが…」

K「1回分自由時間をつくって、自分で作ってみたい回路を実験してもらいたいためです」

B「5つの章で扱った以外のテーマでやりたかった実験とかありましたら教えてください」

K「個人的には、やはりリズムを生み出す回路に魅力を感じます。発振器の集団行動である同期現象（シンクロ）などは先端研究テーマでもあるからです」

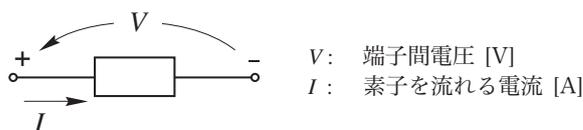


図 A.5 電流と電圧の向き.

表 A.1 電流・電圧とその記法の例

物理量	単位 (physical units)	記法の例
電流	A アンペア (Ampère)	$I, i$
電圧	V ボルト (Volt)	$V, v$

## A.4 回路の法則—素子の性質—

改めて、最初から考え直そう。重複を恐れずに書いておきます。不必要な箇所は適当に読み飛ばして先にお進みください。

### A.4.1 素子の電流と電圧の向き

回路素子の性質を表すためには、素子の電圧と電流に**向き** (orientation) を与えておくと都合がよい。どの素子についても、電流と電圧の相対的な向きは、図 A.5 に示したように互いに逆方向に測ることとする<sup>\*1</sup>。

### A.4.2 電流と電圧の単位

素子の電流・電圧の単位と記法を表 A.1 に示した。記法としては、小文字と大文字どちらを使ってもいいことにしよう。大抵の教科書では大文字を使っている。このノートでは、変数という意味では小文字の方が見やすいので、そのときの文脈で適当に使い分けた。

### A.4.3 線形抵抗—オームの法則—

**線形抵抗** (resistor) とは、電圧と電流の関係が

$$v = Ri \tag{A.8}$$

で表される素子をいう。図 A.6 (a) 参照。また、この関係式を**オームの法則** (Ohm's law) とい

<sup>\*1</sup> この向き付けについては、簡単のように思われるかも知れないが以外と理解しにくい事柄である。もちろん、電流と電圧を同じ向きに選んで話をすすめる教科書もある。向き付けを変えると、回路の法則を表す方程式の符号が変わる。電気回路では圧倒的多数の人々が図 A.5 に示したような向きを採用している。

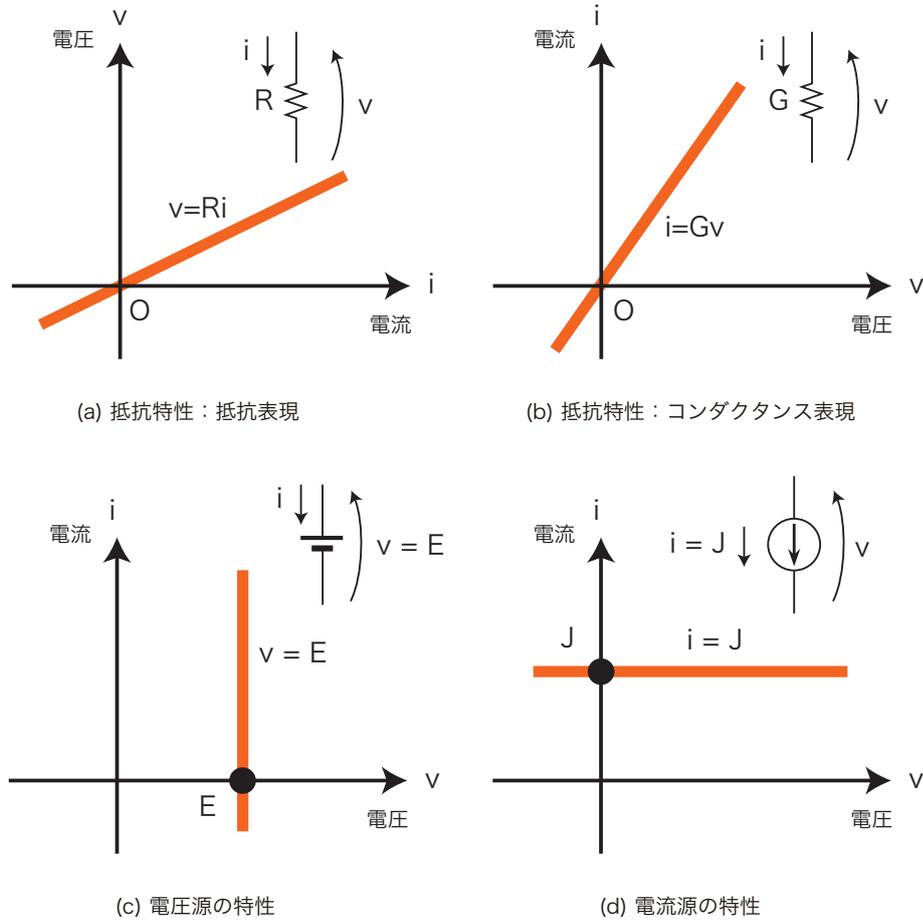


図 A.6 線形抵抗の特性 (a), (b). 電圧源の特性 (c). 電流源の特性 (d).

う. 式 (A.8) の電流と電圧の関係を逆にして

$$i = Gv \quad (\text{A.9})$$

と表す場合もある. 図 A.6 (b) 参照. この場合  $G = \frac{1}{R}$  となっている. 式 (A.9) の電流と電圧の関係で表された抵抗のことを, 区別して使うときは**コンダクタ** (conductor) という. 抵抗とコンダクタはいずれも, 図 A.5 に示したような長方形の箱で表す. なお, 図 A.6 (a), (b) に描いてあるように箱の代わりにギザギザの記号もよく使われる.

それぞれの式の比例定数<sup>\*2</sup>は表 A.2 の呼び名で呼ばれている<sup>\*3</sup>.

<sup>\*2</sup> “抵抗” という単語は, 素子としての“抵抗器”と素子値としての“抵抗値”の両方の意味で, 通常は区別せずに使用している.

<sup>\*3</sup> 表は国際単位系の呼び名である. ジーメンスは, ohm を逆にしたモービとも呼ばれている.

表 A.2 抵抗・コンダクタとその記法の例

素子	単位 (physical units)	素子値の記法の例
抵抗	$\Omega$ オーム (Ohm)	$R$ 抵抗
コンダクタ	$S$ ジーメンス (Siemens)	$G$ コンダクタンス

#### A.4.4 電圧源と電流源

素子の電圧を固定して一定とする素子が電圧源 (voltage source) である。図 A.6 (c) 参照。電圧源の例に電池がある。また、素子を流れる電流を固定し、一定とする素子のことを電流源 (current source) という。図 A.6 (d) 参照。これらを総称して電源という。電圧源の記号は図 A.6 (c) に示した電池の記号を使う。また、電流源の記号は図 A.6 (d) に示した記号を使う。

#### A.4.5 非線形抵抗

電圧と電流の関係が線形の関係、すなわち式 (A.8) や式 (A.9) と表すことができない関係にある素子を非線形抵抗素子という。通常非線形抵抗は、電圧の関数になるか、あるいは電流の関数になる。

電圧制御型 素子を流れる電流  $i$  が、素子に加わる電圧  $v$  の関数として

$$i = G(v) \quad (\text{A.10})$$

のように表せるとき、この抵抗を電圧制御型非線形抵抗という。図 A.7 (a) 参照。

電流制御型 素子電圧  $v$  が、素子電流  $i$  の関数として

$$v = R(i) \quad (\text{A.11})$$

のように表せるとき、この抵抗を電流制御型非線形抵抗という。図 A.7 (b) 参照。

もっと複雑な非線形抵抗 素子電圧  $v$  と、素子電流  $i$  の関係が

$$F(v, i) = 0 \quad (\text{A.12})$$

のように  $(v, i)$  平面の曲線で表される場合、電圧制御型とも電流制御型とも言えない複雑な特性を持つ抵抗である。図 A.7 (c) 参照。

なお、図 A.8 (a) のようなダイオードの特性は、本来電圧制御型抵抗と考えられるが、電圧が  $v = V_D$  付近より大きくなると電流が急激に大きくなる。したがって、この特性の近似として図 A.8 (b) のような折れ線近似曲線がよく使われる。この場合、 $v = V_D$  で表される線分の部分は電圧制御の関数とは考えることができなくなってしまう。この部分は電池と同じ特性であり、電流制御型と考える方が自然である。このように、近似の仕方により制御の型は変わることがあるので注意しよう。

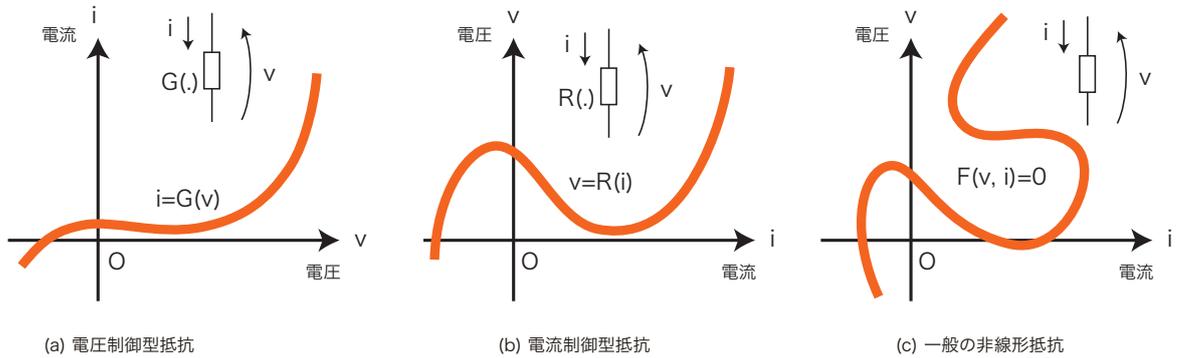


図 A.7 非線形抵抗の特性. 電圧制御型 (a), 電流制御型 (b), 複雑な非線形特性 (c).

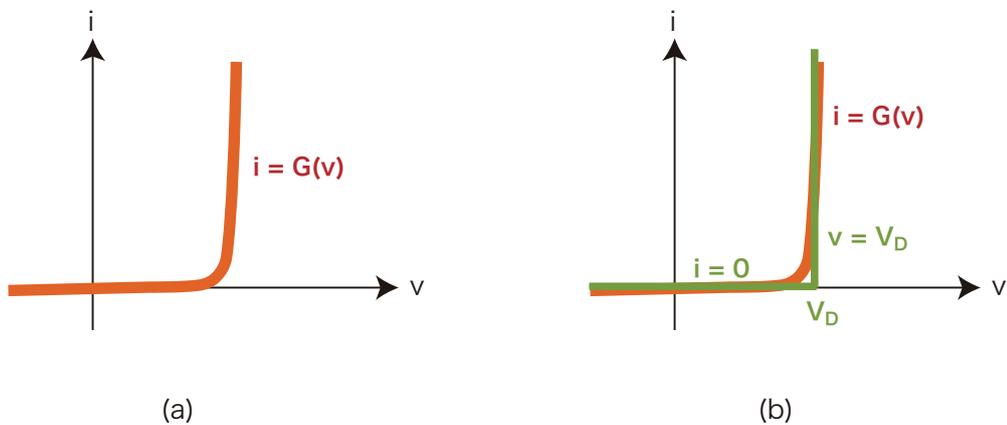


図 A.8 ダイオードの特性. 電圧制御型 (a), 折れ線の近似特性 (b).

#### A.4.6 結合抵抗

結合抵抗, N 端子対抵抗回路, 合成抵抗など多端子素子の扱いについては, キルヒホフの法則の説明が終わったこの章の後の部分で考察することにしよう.

### A.5 回路の法則—接続の性質—

#### A.5.1 回路と向きをついたグラフ

抵抗と電源をいくつか用意して, その端子どうしを接続すると, 1つの回路 (circuit) が構成できる. こうして出来上がった回路は, 幾何学的には素子をつなぎ合わせて作った網のようになっている. このことから, 回路はまた回路網 (network) とも呼ばれている.

さて, 接続の性質だけを見るのであるから, 各素子を1本の線分に置き換えても差しつかえない. こうして, もとの回路より, 接続点と線分からなる図形が得られる. 接続点を節点 (node), 線分を枝 (branch) と呼ぶ. 節点と枝からなる図形をグラフ (graph) という. 図 A.9 参照. グ

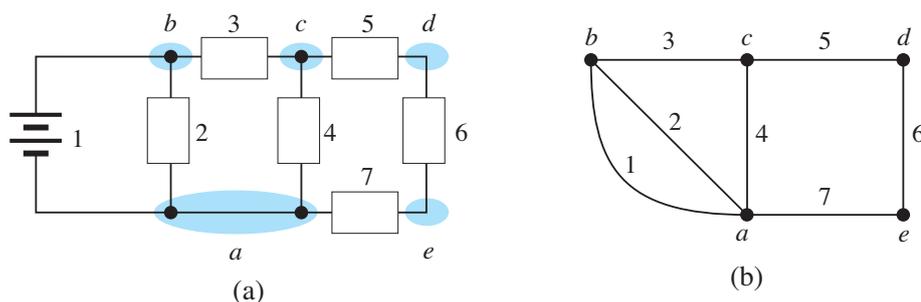


図 A.9 (a) 回路と (b) そのグラフ.

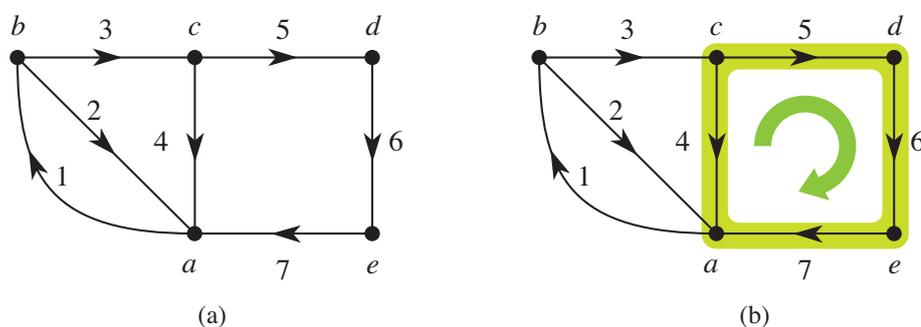


図 A.10 有向グラフ (a) と、ループの例 (b).

ラフは、対応する回路の素子のつながり具合を与えている<sup>\*4</sup>。この幾何学的性質を回路のトポロジー (topology) という。

そこで、回路から得られたグラフにおいても、各枝に枝電流、枝電圧 (枝の両端に接続された節点間の電圧) を考えておく。枝の向きは、たとえば素子電流にあわせて選んでおこう。図 A.10 (a) 参照。枝に向きのついたグラフを有向グラフ (oriented graph) という。

回路中のある節点から、枝を次々と経由して節点をたどってゆき、一周りして最初の節点にもどるとき、経由した枝の集合を閉路またはループ (loop) という。たとえば、図 A.10 (b) における枝の集合  $\{4, 5, 6, 7\}$  はループである。ループにも、一巡する方向によって向きを与えておく。たとえば、閉路  $\{4, 5, 6, 7\}$  の向きを時計回りが正とすると、枝 5, 6, 7 は正の向き、枝 4 は逆の向きとなる。

### A.5.2 キルヒホッフの電流則

任意の回路を考えよう。この回路の各節点に対して、この節点から流出する電流の総和は零に等しい。これをキルヒホッフの電流則 (Kirchhoff's current law, 略して **KCL**) という。この法則は、各節点において電流が連続である、すなわち流出量だけ流入量がある、ことを言い表わし

<sup>\*4</sup> 「素子がつながっているかどうか」、「どんな風につながっているのか」という情報が、素子の電圧と電流を決める。したがって回路素子の接続を表す情報、すなわちグラフから得られる情報は大切である。

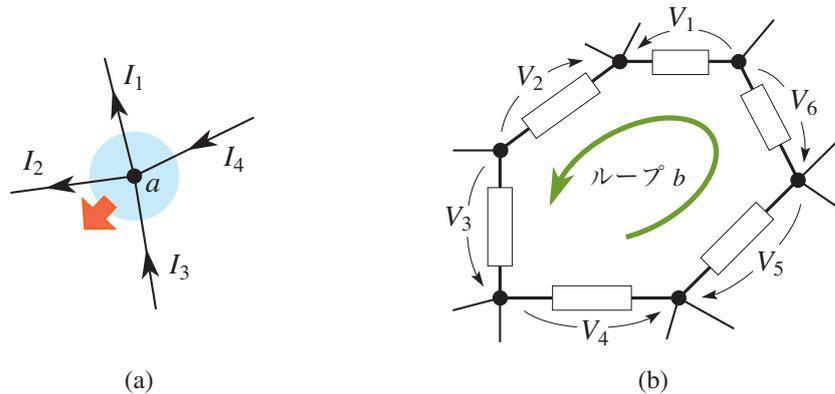


図 A.11 節点  $a$  の KCL:  $I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$  (a) と, ループ  $b$  の KVL:  $V_1 - V_2 + V_3 + V_4 - V_5 - V_6 = 0$  (b).

たものである。たとえば, 図 A.11 (a) の節点  $a$  では, 次式が成り立つ,

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0 \quad (\text{A.13})$$

が成り立つ。

### A.5.3 キルヒホッフの電圧則

任意の回路を考えよう。この回路中の各ループに対して, ループを一巡する電圧の総和は零に等しい。たとえば図 A.11 (b) のループでは

$$V_1 - V_2 + V_3 + V_4 - V_5 - V_6 = 0 \quad (\text{A.14})$$

が成り立つ。これをキルヒホッフの電圧則 (Kirchhoff's voltage law, 略して **KVL**) という。

## A.6 回路方程式

### A.6.1 方程式の個数について

回路が 1 つ与えられたとしよう。回路は連結<sup>\*5</sup>しているものを考える。このとき関係した方程式は何個立てられるであろうか。この問題を簡単にみておこう。いま, この回路の素子の数 (したがって対応するグラフの枝の数) を  $b$  個, 節点の数を  $n$  個としよう。式の数はずぎのとおりとなる。

- $b$  個の各枝について, 抵抗の素子特性あるいは電源の性質から 1 つづつ式が得られる。これらは合わせて  $b$  個となる。

<sup>\*5</sup> 対応するグラフがつながっている回路を連結した回路という。ばらばらに離れた回路は, それぞれの離れた回路 1 つ 1 つは連結しているので, それぞれについて考えるとよい。

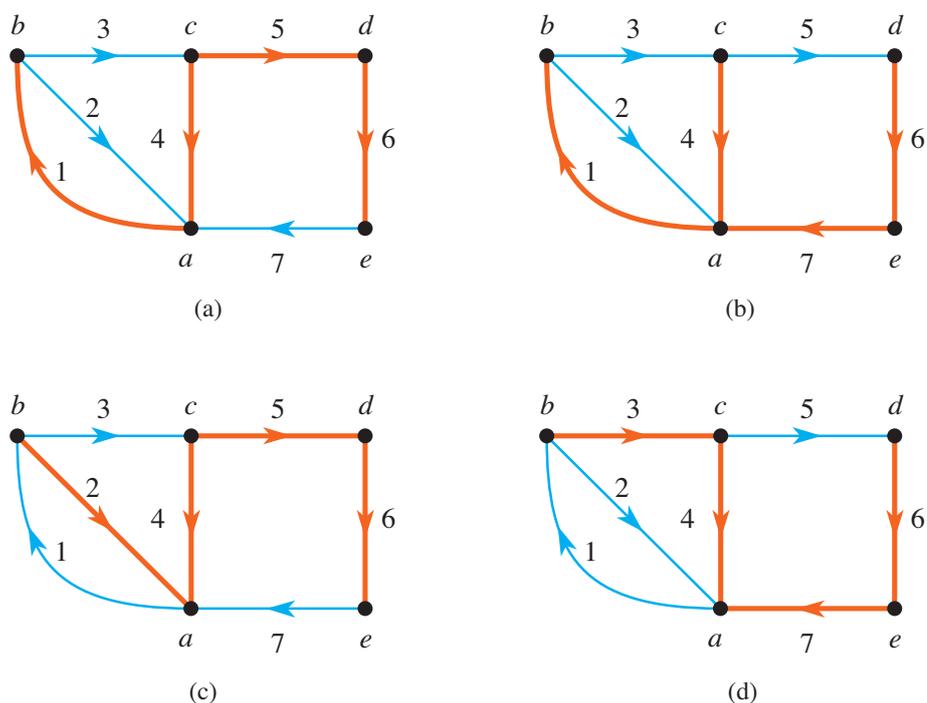


図 A.12 グラフの木枝 (赤) と補木枝 (青) の例.

- $n$  個の各節点について、キルヒッホフの電流則が成り立つ. したがって  $n$  個の電流に関する一次同次式が得られる. ただし, ちょっと考えると 1 つの方程式は, 他の  $n - 1$  個の式から導けることが分かる. したがって, 互いに独立した式の個数は  $n - 1$  個である.
- キルヒッホフの電圧則から, 電圧に関する一次同次式が得られる. 独立な式の個数は  $b - (n - 1) = b - n + 1$  個である.

したがって, 式の総数は  $b + (n - 1) + (b - n + 1) = 2b$  個となることが分かる. 他方, 変数である枝電圧と枝電流の個数は, 1 つの枝につき 2 個あるから全体で  $2b$  個である. このことから, 未知数の個数と式の個数が等しいので, 解は一般にただ一つに決定される.

ここで, キルヒッホフの電流則 (KCL) から導かれる式の数  $n - 1$ , キルヒッホフの電圧則 (KVL) から導かれる式の数  $b - n + 1$  となることを証明しておこう. そのためにグラフの木 (tree) を定義すると分かりやすい.

- 枝の数が  $b$  個, 節点数が  $n$  個の連結グラフの木とは,  $n$  個の節点を結ぶ最小個数の枝集合のことである.
- 木枝集合の枝の数は, 木の選び方に関係なく  $n - 1$  個である.
- 補木 (co-tree) とは, 木枝集合に選ばれなかった枝集合をいう.
- 補木枝の数は, 枝全体の数から木枝の数を引いた数  $b - (n - 1) = b - n + 1$  となる.

図 A.12 に図 A.10 のグラフの木の例を示しておいた. これらの木や補木を見ていると, 次の事実に気づく.

- 木枝集合に補木枝を 1 本加えると, 1 つループができる. このループからキルヒッホフの電圧則が 1 つ求まる.
- 木枝 1 本と他は補木枝からなる枝集合をつくとキルヒッホフの電流則を 1 つ求めることができる.

## A.7 回路解析