Hybrid 系としての LED ホタルの解析法について

川上　博

E-mail: h.kawakami@384.jp

2013.02.13/2013.09.18 修正

目次

1　はじめに

1.1　動機づけ

このノートは LED ホタル [1-10] の解析を目的とした簡単な C プログラムを作ろうとしたことから始まった．以外とイベントが込み入って，下手をすると if 文のスパゲッティプログラムになりかねない．そこでハイブリッド系の定義から見直すことにした．

実際，アナログとディジタルの結合系が身近に溢れているのに，LED ホタルの解析に有効なハイブリッド系の定義を見かけないのはどうしてなんだろう．理由はともかく「我々の必要なハイブリッド系」を定義し，その運動を観察して周期軌道の安定性や分岐現象の解析を試みることにしよう．

ここでは，アナログ物理系である電気回路や電子回路など連続な状態をもつ部分系と，スイッチ，コンパレータや論理回路などからなる離散時間・離散状態をもつディジタル部分系を結合させ，このアナログ・ディジタル混合系をハイブリッド系 (hybrid system) と考え，その動作を解析する手法を検討したい．Poincaré 写像がうまく定義できるだけでも随分と解析に役立つであろう．

アナログとディジタル，２つの回路を並列して考えなければならないので，それぞれの分野で使われている専門用語を区別してうまく使い分ける必要がある．たとえば，状態 (state) という言葉は，アナログ部分系では連続な時間信号を意味するが，ディジタル系では 0 と 1 の２値からなる離散信号を意味する．どちらも「状態」と言うのでは，使い勝手が悪いので，ここではアナログ系の状態はそのまま状態 (state) と呼ぶことにし，ディジタル系の状態はモード (mode) と呼ぶことにした [11]．このように使用する用語が通常の両分野での使用方法と異なる場合もあるので注意してほしい．

1.2　ハイブリッド系の定義

1.2.1　定義 1．手短かに述べた定義

ハイブリッド系 (hybrid dynamical system) とは，一言で言うと，アナログ部分系とディジタル部分系を結合して作った混合系のことである．この力学系の状態は，両部分系の動的性質が互いに影響し合って時間発展する．

1.2.2　定義 2．言葉で少し詳しくした定義

以下，話を簡単にするために，次のような２つの部分系を結合したハイブリッド系を考える．

1. アナログ部分系（連続状態，連続時間系）の状態は R^n の点で表されるものとし，その運動は常微分方程式で記述されるものとする．このアナログ状態空間は，余次元 1 の多様体で有限個の部分領域に仕切られていて， この部分領域の各々をフェーズ (phase) と呼ぶことにする ．各フェーズの運動は，それぞれ固有の運動方程式（常微分方程式）に従う．

   状態が 1 つのフェーズから別のフェーズに移ったとき，すなわち状態が境界多様体を横切ったとき，これをイベント (event) と呼び，ディジタル部分系の状態遷移のための入力情報として利用する． ディジタル系への入力としては，このイベント信号と，内部あるいは外部から加えられる周期的なタイマー信号がある．イベント信号は，タイマー信号とは無関係な時刻に発生する非同期 (asynchronous) な信号である．もちろんタイマー信号とイベント信号が同時刻に周期的に起こることもある．この場合はイベントがタイマーに同期している (synchronize) という．方形波で駆動される LED ホタルの明滅が方形波光信号と同期する場合などがこの例である．
2. ディジタル部分系（離散状態，離散時間系）は，集合 $F_2 = \{0, 1\}$ としたとき[*1]，状態が F_2^m に値をもつ m 次元ベクトルで表され， この 2^m 個の離散状態の運動は有限状態機械 (finite state machine:FSM) で書き表されるものとする． また，ディジタル部分系の状態をこのノートでは

[*1] 集合 F_2 に加法：0+1=0, 0+1=1+0=1, 1+1=0 と，乗法：$0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1$ を定義すると，この集合は有限体となる．そう考えると，F_2^m はこの有限体上の m 次元ベクトル空間とみてよい．

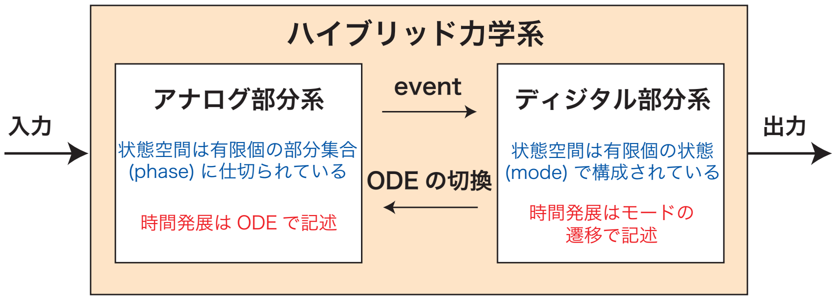


図 1　ハイブリッド系のブロック表示.

モード (mode) と呼ぶことにする．モード間の運動は遷移 (transition) と呼ばれ，モード遷移図やモード遷移表で表される．これは，差分方程式[*2]で記述した場合に比べて遷移の状況を具体的に理解しやすいからであろう．

モードの遷移は，ディジタル部分系の出力を通じてアナログ部分系に入力として加えられ，アナログ部分系の運動方程式の切り替えやフェーズを定義する多様体の変更などを引き起こす．

ハイブリッド系の特徴としては，微分方程式で表される通常の力学系と有限状態機械の動作が互いに結合し，混合系特有の運動を生み出す点にある．ハイブリッド系をブロック図で描くと図 1.1 のようになる．

1.2.3　定義 3. より数学的な定義（未稿）

1.2.4　イベント遷移とタイマー遷移

このノートを作りながら，「イベント遷移」と「タイマー遷移」という用語の使い方に少し違和感を持つようになった．どちらも，系のモード遷移を起こすので，系のモード遷移を起こす条件をすべてイベントと呼ぶことにし，それらは大別すると

- アナログ状態のフェーズが遷移するフェーズイベント (phase event)
- タイマーによるタイマーイベント (timer event)
- フェーズイベントとなる条件が時変となるイベント

の 3 つに分類できる，というような整理の方がすっきりする．そこで，以下，このノートを後から修正した部分ではそのような使い方をしたところもある．

[*2] 論理回路の教科書では特性方程式と呼ばれている．なお，差分方程式とみなした場合，時間軸の単位進みが，イベントでは非同期に，タイマーでは一定の同期した瞬間に行われることに注意しよう．

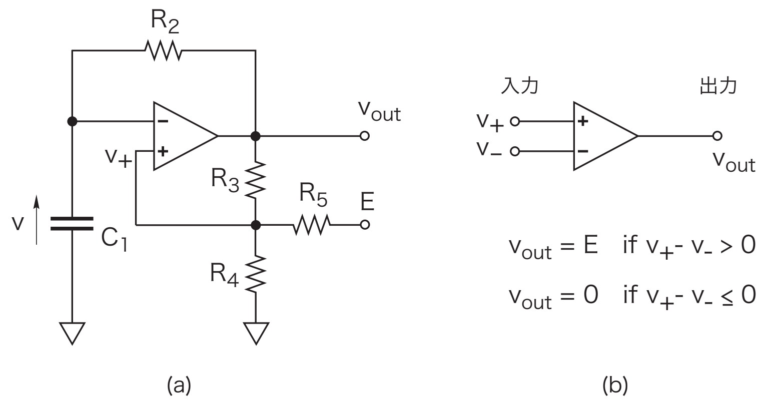


図 2　RC 方形波発振回路 (a) とコンパレータ (b).

2　RC 方形波発振器

2.1　回路の構成と動作解析

図 2 (a) に示した RC 方形波発振回路を考える．図中の記号を用いて回路方程式は次式となる．

$$
\begin{aligned}
R_2C_1\frac{dv}{dt} \quad &+ \quad v = v_{out} \\
v_+ \quad &= \quad \frac{\dfrac{v_{out}}{R_3}+\dfrac{E}{R_5}}{\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}} \\
v_{out} \quad &= \quad \begin{cases} E & v_+ > v \text{ のとき} \\ 0 & v_+ < v \text{ のとき} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

この回路では，演算増幅器は単電源（その電圧を E とする）で動作しているとし，図 (b) に示したコンパレータの特性をもつと仮定する．すなわち，入力電圧の差の符号により，出力電圧 v_{out} は，E または 0 のいずれかの値を取るものとする．そうすると，v_+ は，これら 2 つの値の場合それぞれについて，次の値となる．

1. $v_{out} = E$ の時

$$
v_{+M} = \frac{\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_5}\right)E}{\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}} = \alpha E \tag{2}
$$

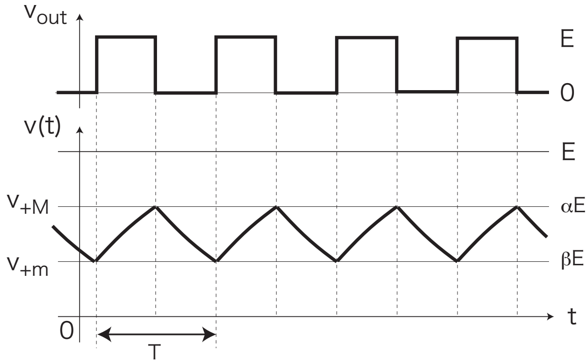


図 3　キャパシタ電圧 v とコンパレータの出力電圧として得られる方形波 v_0.

ここに,

$$\alpha = \frac{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_5}}{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_5}} \tag{3}$$

と置いた.

2. $v_{out} = 0$ の時

$$v_{+m} = \frac{\dfrac{E}{R_5}}{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_5}} = \beta E \tag{4}$$

ここに,

$$\beta = \frac{\dfrac{1}{R_5}}{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_5}} \tag{5}$$

と置いた.

また，この回路の状態を表すキャパシタ電圧 v は，式 (1) 第 1 式をそれぞれの場合に解いて,

1. $v_{out} = E$ の時

$$v(t) = (v(0) - E)e^{-\dfrac{t}{R_2 C_1}} + E \tag{6}$$

2. $v_{out} = 0$ の時

$$v(t) = v(0)e^{-\dfrac{t}{R_2 C_1}} \tag{7}$$

となる．ここに，キャパシタ電圧 v の初期値を $v(0)$ とおいた．この運動 v と v_+ の値が演算増幅器の入力で比較され，コンパレータの出力電圧が切り替えられる．その結果，キャパシタ電圧 v とコンパレータの出力電圧は図 3 に示した波形となる.

2.2　ハイブリッド系としての回路の抽象化

2.2.1　使用する変数の正規化

以後，議論を簡単にするため時間と電圧を正規化して考えよう．すなわち，

$$\tau = \frac{1}{R_2C_1}t,\ \ x = \frac{v}{E},\ \ x_+ = \frac{v_+}{E},\ \ q = \frac{v_{out}}{E} \tag{8}$$

と変換すると，式 (1) は次式となる．

$$\frac{dx}{dt} + x = \begin{cases} 1 & q = 1 \text{ のとき} \\ 0 & q = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{9}$$

これらの方程式の解は，初期値を $x(0)$ として次式となる．

$$x(t) = \begin{cases} (x(0)-1)e^{-t}+1 & q = 1 \text{ のとき} \\ x(0)e^{-t} & q = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{10}$$

そこで，これらの解を用いて系全体の運動をみておこう．コンパレータの出力 q の値が 1 または 0 により, それぞれの値に対応した線分 $[0,\ 1] \subset R$ 上で運動が起る．図 4 参照．

1. $q = 1$（コンパレータが on）の場合の運動は,
   - 初期値 $x(0) \in [0,\ \alpha]$ のときは，平衡点 $x = 1$ に向かう運動をし，$x = \alpha$ になった時点でコンパレータの出力に「飛び」がおこり，$q = 0$ の場合の運動に遷移する．
   - 初期値 $x(0) \in [\alpha,\ 1)$ のときは，直ちにコンパレータの出力に「飛び」が起こり，$q = 0$ の場合の運動に切り替わる．

   図 4 では，これらのコンパレータ出力の遷移（モード 1 からモード 0 への遷移）を e_{01} と記した．
2. $q = 0$（コンパレータが off）の場合の運動は,
   - 初期値 $x(0) \in [\beta,\ 1]$ のときは，平衡点 $x = 0$ に向かう運動をし，$x = \beta$ になった時点でコンパレータの出力に「飛び」がおこり，$q = 1$ の場合の運動に移って行く．
   - 初期値 $x(0) \in (0, \beta]$ のときは，直ちにコンパレータの出力に「飛び」が起こり，$q = 1$ の場合の運動に切り替わる．

   図 4 では，これらのコンパレータ出力の遷移（モード 0 からモード 1 への遷移）を e_{10} と記した．

2.2.2　ハイブリッド系としての RC 方形波発振器

さて，上の結果をコンパレータ出力 q を 1 ビットのディジタル系状態変数[*3]，キャパシタ電圧 $x(t)$ を 1 次元連続力学系の状態とみなして定式化し直してみよう．

[*3] 1 ビットの状態変数には 2 つの状態 0 と 1 があるので，状態遷移図では 2 つの状態を考えることになる．もっとも，我々は状態と言わずにモードと呼ぶことにしたのだが $\cdots$．

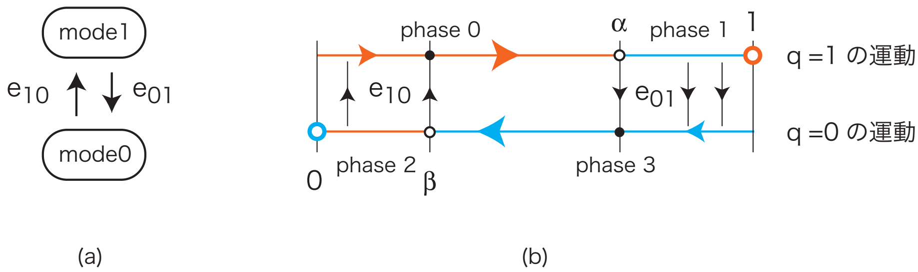


図 4　方形波発振器のモード遷移図 (a) と状態 x の相図 (b).

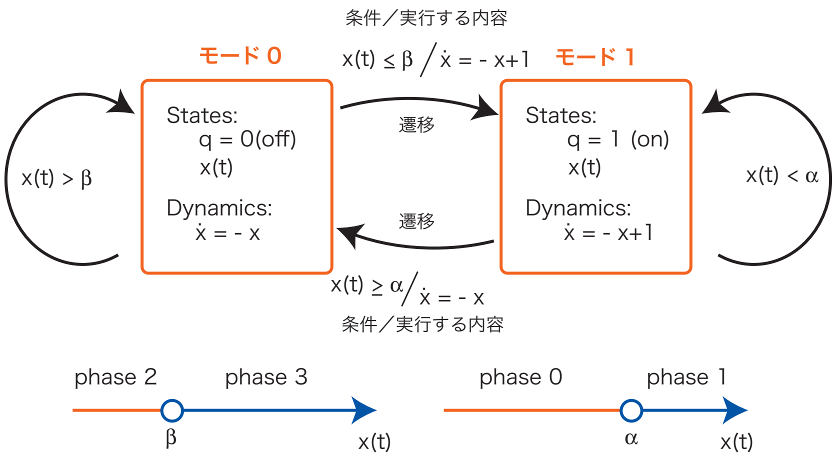


図 5　モード遷移図.

1. **モードと状態の定義：**コンパレータ出力 q をディジタル部分系のモード変数と考え，その値を 2 つのモード：モード 0 とモード 1 と定義する．各モードにはそれぞれ，平衡点の異なる 1 次元連続力学系を貼付ける[*4]．また，各モードのアナログ部分系の状態はキャパシタ電圧 $x(t)$ である．具体的には 2 つのモードは次のように書くことができる：図 5 参照．

   モード 1　States: $q = 1, x(t)$; Dynamics: $\dot{x} + x = 1$; Output: LED:on

   モード 0　States: $q = 0, x(t)$; Dynamics: $\dot{x} + x = 0$; Output: LED:off

2. **モードの遷移：**

   モード 1 からモード 0 への遷移　モード 1 での状態 $x(t)$ は，解 (10) 第 1 式に従って運動するので，初期値 $x(0) < \alpha$ の解は有限時刻で必ず点 $x = \alpha$ に到達する．このとき，コンパレータの入力の符号が変化し，従って出力が切り替わる．すなわち，モード 0 への遷移が生じる．

   なお，初期値 $\alpha < x(0)$ の解は，コンパレータの入力特性から分かるように，モード 1 に留まることなく直ちにモード 0 へ遷移する．

   したがって，アナログ状態の条件 $x(t) \geqq \alpha$（これをイベント α と呼ぶことにする）が，モード 1 からモード 0 への遷移の条件と言える．状態を 2 つの区間 $x < \alpha$ と $\alpha \leqq x$ に分割

*4 モード毎に微分方程式を定義するということを単に力学系を貼付けると言った．

表 1　モードの遷移表

	モード 0	モード 1
イベント α	モード 0	モード 0 へ
イベント β	モード 1 へ	モード 1

し，前者をフェーズ 0 (phase 0)，後者をフェーズ 1 と呼ぶことにしよう．そうすると「モードの遷移はフェーズが変化するときに起こる」と言うことができる．

状態が条件 $x(t) < \alpha$ を満たす場合はモード 1 に留まる．

モード 0 からモード 1 への遷移　同様に，モード 0 での状態 $x(t)$ は，解 (10) 第 2 式に従って運動するので，初期値 $x(0) > \beta$ の解は有限時刻で必ず点 $x = \beta$ に到達する．このとき，コンパレータの入力の符号が変化し，従って出力が切り替わる．すなわち，モード 1 への遷移が生じる．初期値 $x(0) < \beta$ の解は，モード 0 に留まることなく直ちにモード 1 へ遷移する．
したがって，イベント β： $x(t) \leqq \beta$ が起こると，モード 0 からモード 1 への遷移が起こる．
状態をフェーズ 2：$x \leqq \beta$ とフェーズ 3：$\beta < x$ に分割すると，こちらも「モードの遷移はフェーズが変化するときに起こる」と言うことができる．
フェーズ 1 とフェーズ 2 は，この区間に初期値を置くとモードが直ちに切り替わるという不安定性をもつことに注意しよう．

なお，状態が条件 $x(t) > \beta$ の場合はモード 0 に留まる．

これらをモード遷移図に描くと図 5 となる．2 つのモードが，角を丸めた長方形で示され，モード間の遷移は矢印で示されている．遷移の起こる条件と遷移の結果出力される結果が矢印に添え書きされている．この図から直ちに，この系の周期解は 2 つのモードを交互に繰り返す運動となることが分かる．

このモード遷移図を，行にイベントを，列にモードをとり，対応する項に遷移する次のモードを書き入れた行列を作ると，モード遷移表ができる．表 1 参照．モード遷移図やモード遷移表は，ディジタル部分系の運動をみるものであるから，ハイブリッド系の定性的性質をみたり，プログラムコードを書く際に参考にできる．たとえば，モード遷移図 5 から RC 方形波発振器の周期解は 2 つのモードを交互に繰り返す運動となることが分かる．

2.3　周期振動とデューティーサイクル

コンパレータの入力電圧 v_+ が抵抗 R_3, R_4, R_5 の比で決まるので，周期波形の周期やデューティーサイクル[*5]もこれらの抵抗比を与えることによって定まる．このことをみておこう．図 6 参照．

[*5] 周期的方形波の周期を T とし，時間 T のうち波形が 1 の値をもつ時間を T_α，0 の値を持つ時間を T_β とした時，比 $d = T_\alpha/T$ を，この波形のデューティーサイクル (duty cycle) という．

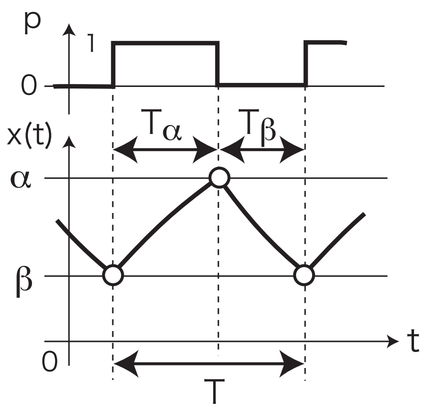


図 6　周期振動の波形.

初期値 $x(0)=\beta$ を出発する解 (10) 第 1 式が時刻 T_α で $x(T_\alpha)=\alpha$ に達したとし，初期値 $x(0)=\alpha$ を出発する解 (10) 第 2 式が $x(T_\beta)=\beta$ とすれば，次の 2 式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\alpha &= (\beta-1)e^{-T_\alpha}+1 \\ \beta &= \alpha e^{-T_\beta}\end{aligned} \tag{11}$$

これらの式を整理すると次式を得る．第 2 番目の抵抗の比は，α,β の定義式 (3)，(5) から導かれる.

$$\begin{aligned}e^{T_\alpha} &= \frac{1-\beta}{1-\alpha}=1+\frac{R_4}{R_3} \\ e^{T_\beta} &= \frac{\alpha}{\beta}=1+\frac{R_5}{R_3}\end{aligned} \tag{12}$$

これより

$$\begin{aligned}T_\alpha &= \ln\frac{1-\beta}{1-\alpha}=\ln(1+\frac{R_4}{R_3}) \\ T_\beta &= \ln\frac{\alpha}{\beta}=\ln(1+\frac{R_5}{R_3})\end{aligned} \tag{13}$$

$$T=T_\alpha+T_\beta=\ln\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}=\ln(1+\frac{R_4}{R_3})(1+\frac{R_5}{R_3}) \tag{14}$$

$$\begin{aligned}&\frac{dT_\alpha}{d\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}>0,\ \frac{dT_\alpha}{d\beta}=\frac{-1}{1-\beta}<0,\ \frac{dT_\beta}{d\alpha}=\frac{1}{\alpha}>0,\ \frac{dT_\beta}{d\beta}=-\frac{1}{\beta}<0 \\ &\frac{dT}{d\alpha}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}>0,\ \frac{dT}{d\beta}=-(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{1-\beta})<0\end{aligned} \tag{15}$$

したがって，T_α,T_β,T ともに，α に関しては単調増加関数，β に関しては単調減少関数である.

なお，α,β の抵抗 R_3 に関する微分は，式 (3), (5) を使って同様な計算をすれば

$$\frac{d\alpha}{dR_3}<0,\ \frac{d\beta}{R_3}>0 \tag{16}$$

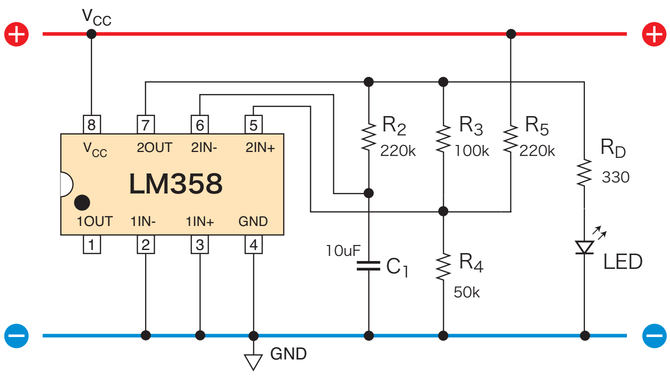


図 7　デューティーサイクルが約 25% となる回路例.

となり，α は単調減少関数，β は単調増加関数となることが分かる．

　また，デューティーサイクルを d とすれば，次式となる．

$$d = \frac{T_\alpha}{T} = \frac{\ln(1+\dfrac{R_4}{R_3})}{\ln(1+\dfrac{R_4}{R_3})(1+\dfrac{R_5}{R_3})} \tag{17}$$

この式を抵抗の項で解くと次式となる．

$$1+\frac{R_5}{R_3} = (1+\frac{R_4}{R_3})^{\frac{1-d}{d}} \tag{18}$$

2.3.1　デューティーサイクル 50% となる条件

　$d = 1/2$ より $T_\alpha = T_\beta = T/2$ であり，これより $R_4 = R_5$ を得る．R_3 は自由に選べるので周期 T を定めるためのパラメータとすることができる．

　たとえば，$R_3 = R_4 = R_5$ の場合は，$\alpha = 2/3, \beta = 1/3, T = 2\ln 2$ となる．

2.3.2　デューティーサイクル 25% となる条件

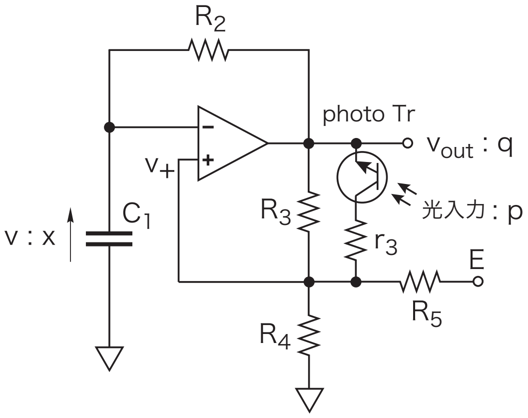
　$d = 1/4$ より，

$$1+\frac{R_5}{R_3} = (1+\frac{R_4}{R_3})^3$$

を得る．

　一例として，たとえば $R_3 = 2R_4$ と選べば，$R_5/R_3 = 19/8$ となる．そこで $R_3 = 100K$，$R_4 = 50k$，$R_5 = 238K$，$T = \ln 81/16 = 1.62$ を得る．この場合，$\alpha = 27/65 = 0.415, \beta = 8/65 = 0.123$ となる．図 7 に実際の回路例を示す．

　別の選択として，$R_3 = R_4 = 100K$ の場合は，$R_5 = 7R_3 = 700K, T = \ln 16 = 2.77$ となる．また，$\alpha = 8/15 = 0.533, \beta = 1/15 = 0.067$ となる．



(a)

photo Tr		comparator : q	
		on:1	off:0
光入力 : p	on:1	off:0	on:1
	off:0	off:0	off:0

(b)

図 8　光センサーをもつ RC 方形波発振回路 (a) とフォトトランジスタの導通条件 (b).

3　光信号で制御される RC 方形波発振回路の強制振動

さて，この節ではディジタル部分系が 2 ビットとなり，4 つのモードをもつハイブッリド系の例を扱ってみよう．簡単のため，前節で取り上げたコンパレータを用いた RC 方形波発振器に光センサー回路を取り付け，これに周期的な方形波光入力信号を加えた回路を考える．光信号はタイマーとしてモードを遷移させる効果をもつ．

3.1　回路の構成と動作の概要

3.1.1　回路の概要と回路の状態

具体的には，図 8 (a) に示した RC 方形波発振回路を考える[*6]．この回路は前節で考えた RC 方形波発振回路の抵抗 R_3 にフォトトランジスタと抵抗 r_3 の枝を並列に付加した回路となっている．フォトトランジスタは光入力 p で制御されるスイッチ素子として加えられている．

すなわち，このフォトトランジスタは，① 光信号が照射され，かつ② 条件 $v_+ > v_{out}$ が成り立つときに導通し，コンパレータの入力端子 v_+ と出力の間の抵抗が，R_3 と r_3 の並列抵抗となる．このことから，フォトトランジスタが導通すれば，等価的に抵抗 R_3 の値が小さくなり，コンパレータ入力電圧 v_+ が低くなる．前節に検討した結果から，これは光信号によりキャパシタ電圧の下端での切り替え値 β の値が小さくなることに対応する．したがって，光信号の印加はアナログ部分系のパラメータを変化させる効果を引き起こすこととなる．

フォトトランジスタの導通条件を整理すると図 8 (b) となる．コンパレータの出力電圧が off (0) で光信号が on (1) のときにのみフォトトランジスタは導通：on (1) する．

[*6] この回路は LED ホタルの回路としてタイプ A1 と名付けた回路である．

以上のことより，このハイブリッド系の状態は次のように考えてよいであろう．

- ディジタル部分系：コンパレータの出力電圧 q，フォトトランジスタに照射する光信号 p [*7]
- アナログ部分系：キャパシタ電圧 $x(t)$

念のため，フォトトランジスタの導通により変化するのは抵抗 R_3, r_3 並列枝の値であるから，これを計算しておこう．フォトトランジスタの導通時の値には on，非導通時の値には off の添字を付けることにする．

$$\frac{1}{R_{on}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{r_3} \Rightarrow\ R_{on} = \frac{R_3 r_3}{R_3 + r_3} \qquad R_{off} = R_3 \tag{19}$$

記述を簡単にするため，これらをまとめて

$$R_{on\|off} = \frac{R_3 r_3}{R_3 + r_3} \parallel R_3 \tag{20}$$

と書くことにする．すると β の値は，式 (3) を参考にして次式となる．

$$\beta_{on\|off} = \frac{\dfrac{1}{R_5}}{\dfrac{1}{R_{on\|off}} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_5}} \tag{21}$$

ここで

$$\beta_{off} > \beta_{on} \tag{22}$$

となることに注意しておこう．

なお，α の値は，コンパレータの出力電圧が on : $q = 1$ の時の x_+ 値であるからこの条件ではフォトトランジスタは導通せず，従って変化せず次式となる（これを以下 α と書く）：

$$\alpha = \alpha_{on} = \alpha_{off} = \frac{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_5}}{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_5}} \tag{23}$$

3.1.2　状態の時間発展：フェーズイベントとタイマーイベント

さて，状態の時間発展の様子をつかむため，図 9 の上段に示した光入力 $p(t)$ を仮定して状態 $x(t)$ の時間発展を具体的にみてみよう．ここで，初期状態としては図中 $t = t_0$ に丸印で示した値：$p = 0, q = 1, x(0) = x_0$ の例を考えることにする．

ここで，ディジタル状態とその遷移の記述について注意点をみておこう．

[*7] 光信号は入力と考え，ディジタル部分系の状態に入れるのはおかしいと考えるかもしれない．確かにそうなのだが，周期的な on/off を繰り返すこの信号は光を明滅するディジタル発振器がこの系の内部に組み込まれていると考えると，ディジタル部分系の状態に入れてもおかしくないであろう．ここでは後者の立場をとる．

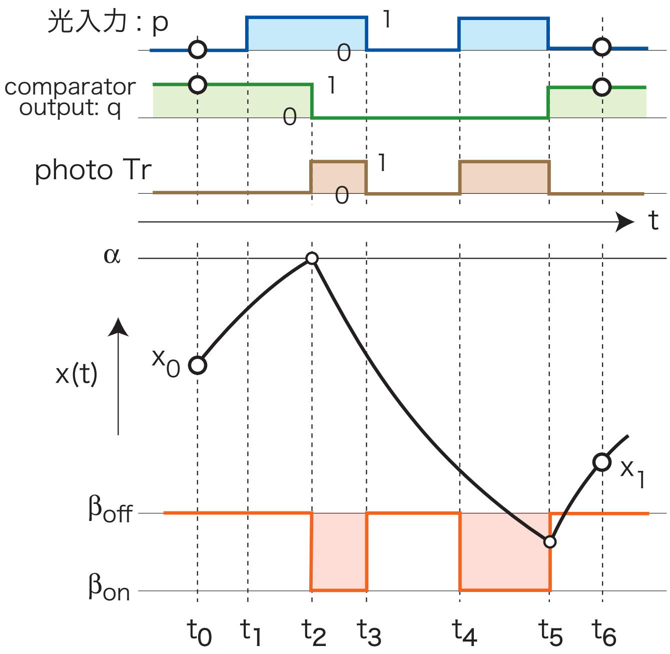


図 9　各状態の時間発展.

- 1つは，ディジタル状態が on あるいは off にある場合，これらの状態にある時間区間が意味をもつ場合である．たとえば，「$q=1$ の状態にある時にのみ LED が点灯する」といった記述をする．
- 一方，状態の変化する瞬間，すなわち信号のエッジ (edge)，をとらえて，他の状態あるいは素子の出力が変化することを表す場合がある．この状態の急変には，状態 1 から 0 への変化（立ち下がり (falling-edge or negative-edge)）と，0 から 1 への変化（立ち上がり (rising-edge or positive-edge)）が考えられる．以下，前者を表す記号として $q(t)\downarrow$ を使い，後者を表す記号として $q(t)\uparrow$ を使うことにする．

そこで一般に，モードの個数は，使用するディジタル状態の個数で決まり，モード間の遷移の個数は，使用するエッジの個数で決まると考えてよいであろう．

それでは図 9 に示した時刻にしたがって $x(t)$ の変化をみてみよう．

1. $t \in [t_0,\ t_1)$：$p=0,\ q=1$ なので状態 $x(t)$ は解 (10) 第 1 式にしたがって増加する．
2. $t=t_1$ で $p\uparrow$ すなわち光入力が $p=1$ となるが，$q=1$ なのでフォトトランジスタは導通せず，状態 $x(t)$ の変化に変わりはない．
3. $t=t_2$ において，$x(t_2)=\alpha$ となり，このフェーズイベントでコンパレータ出力が $q=0$ と変化し，状態 $x(t)$ は解 (10) 第 2 式にしたがって減少し始める．$p=1, q=0$ なのでフォトトランジスタは on となり，$\beta=\beta_{on}$ と切り替わる．ただし，ここでのパラメータ β の変化は，$x(t)>\beta_{off}$ なので，状態 $x(t)$ に何の影響も及ぼさない．
4. $t \in [t_3,\ t_5)$ この時間区間では p の変化（タイマーイベント）に伴い β も変化するが，状態 $x(t)$

の変化には影響を与えない．

5. $t = t_5$ は最も注意が必要である．ここで光入力が off，すなわち $p(t_5)\downarrow$ となり，フォトトランジスタが off となる．従って，β の値が β_{on} から β_{off} に変化する:$\beta(t_5)\uparrow$．このとき状態 $x(t_5)$ は次の不等式を満足している．
$$x(t_5) < \beta_{off} \tag{24}$$
このことは $x(t_5)$ が図 4 のフェーズ 2 に属することを意味し，コンパレータ出力は $q = 1$ に変化し，状態方程式は直ちに切り替えられ，状態 $x(t)$ は増加に転ずる．タイマーイベントとフェーズイベントが同時に起こる．タイマーイベントのみが起こる $q(t_3)\downarrow$ の場合との違いに注意してほしい．
その後，$t = t_6$ で状態 $x(t_6) = x_1$ に達する．

3.1.3　モード遷移図とモード状態図 (mode-phase diagram)

このハイブリッド系のディジタル部分の状態は，フォトトランジスタに照射する周期的な光外部信号 p とコンパレータの出力電圧 q と考えたので，次の 4 つのモードが定義できる．

モード０　$p = 0,\ q = 0$ となる場合．イベント $x(t) \leqq \beta_{off}$ でモード 2 に遷移する．また，タイマー条件 $p\uparrow$ かつ $\beta_{off} < x < \alpha$ でモード 1 に遷移する．

モード１　$p = 1,\ q = 0$ となる場合．イベント $x(t) \leqq \beta_{on}$ でモード 3 に遷移する．また，タイマー条件 $p\downarrow$ かつ $x \geqq \beta_{off}$ でモード 0 に遷移する．イベント条件とタイマー条件が重複した条件：$p\downarrow$ かつ $\beta_{on} < x < \beta_{off}$ でモード 2 に遷移する．

モード２　$p = 0,\ q = 1$ となる場合．イベント $x(t) \geqq \alpha$ でモード 0 に遷移する．また，タイマー条件 $p\uparrow$ かつ $\beta_{off} < x < \alpha$ でモード 3 に遷移する．

モード３　$p = 1,\ q = 1$ となる場合．イベント $x(t) \geqq \alpha$ でモード 1 に遷移する．また，タイマー条件 $p\downarrow$ かつ $x < \alpha$ でモード 2 に遷移する．

これらをモード遷移図にすれば，図 10(a) を得る．また，前小節の説明に使った図 9 の波形をモード間の遷移で表すと図 10(b) となる．

4 つのモードを定義したので，各モードでのアナログ部分系を一意的に定義できるようになった．すなわち，各モードでの運動方程式が定まるので，初期状態 $x(0)$ を与えると解軌道が一意的に求められる．これを図 11 に示した．横軸は時間 t，縦軸は状態 $x(t)$ であり，解軌道は $t = 0$ での x 軸上の点である．この図は，ディジタルのモードとアナログの状態を示しているのでモード状態図 (mode-phase diagram) と呼ぶことにする．次の性質に注意しよう．

- モード 0 において，初期値 $x_0 \in [\beta_{off},\ \alpha]$ を出発する解は，$x(t) = \beta_{off}$ でモード 2 へ遷移すると，初期値 $x_0 = \beta_{off}$ から出発する解に合体してしまう．この場合は，モード 0 でのフェーズイベント $x = \beta_{off}$ を経て，モード 2 に入り，途中でタイマー信号 $p\uparrow$ が入り，このタイマーイベントでモード 3 に遷移し，ここでのフェーズイベント $x = \alpha$ を経てモード 2 で周期軌道に引き込

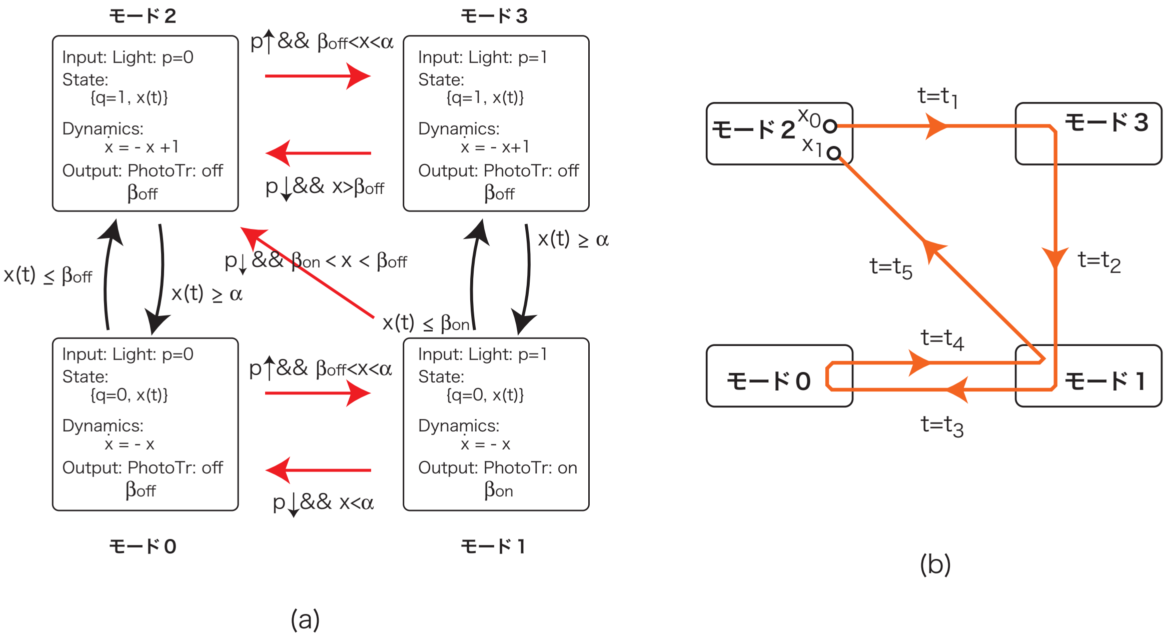


図 10 モード遷移図 (a) と図 9 の状態の遷移をトレースしたグラフ (b).

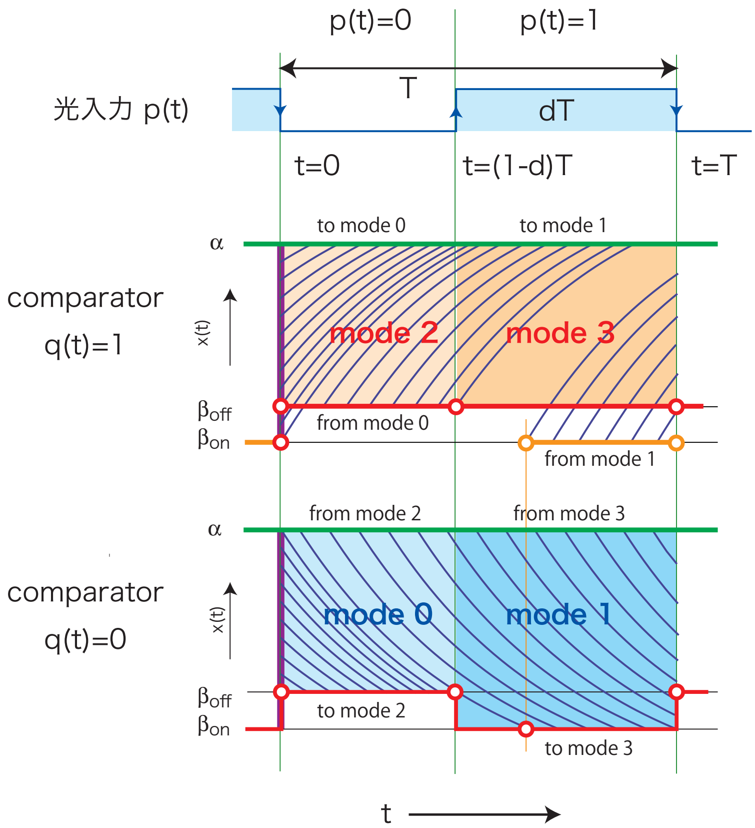


図 11 各モードでの状態 $x(t)$ の解軌道：モード状態図.

まれる．この場合はしたがって，２つのフェーズイベントで引き込まれることとなる．

- 同様に，モード３において，初期値 $x_0 \in [\beta_{on},\ \alpha]$ を出発する解は，$x(t) = \alpha$ でモード１へ遷移すると，初期値 $x_0 = \alpha$ から出発する解に合体してしまう．したがって，この初期値からの状態は１イベント $x = \alpha$ を経た後，モード１に遷移すると周期振動に引き込まれることとなる．
- モード０とモード２のみで状態を観察すると，入力 $p = 0$ なので，$[\beta_{off}, \alpha]$ 間で振動する方形波が得られる．この場合のイベントは $x = \alpha,\ x = \beta_{off}$ でおこる．
- モード１とモード３のみで状態を観察すると，入力は $p = 1$ なので，$[\beta_{on}, \alpha]$ 間で振動する方形波が得られる．これらのモードの遷移は，状態がフェーズの境界点 $x = \alpha$ あるいは $x = \beta_{on}$ に達するというフェーズイベントで起こる．
- モード１の区間 $[\beta_{on},\ \beta_{off}]$ に状態がある時刻でタイマーが作動すれば，モード２への遷移がおこる．タイマーイベントがフェーズイベントを誘発し，これらのイベントが同時に起こる．この区間で遷移することによって系の周期は，入力 p の周期に同期することができる．このハイブリッド系は β の変化のエッジを使って同期する．

3.1.4　周期解の定義

一般に，ハイブリッド系の周期解[*8]とは，モードの遷移とアナログ状態の時間発展が時間に関して周期的となる解のことである．すなわち，周期解は次の２つの条件を満たす必要がある．

1. ディジタル部分系でのモードの周期性：$t = 0$ において，初期モード m_0 からモードが遷移してゆくとき，有限回の遷移の後，時刻 $t = L$ において初期モード m_0 に還ること．
2. アナログ部分系での状態の周期性：$t = 0$ において，初期状態 $x(0) = x_0$ を出発した状態 $x(t)$ が，モードの遷移とともに力学系を切り替えながら進展し，有限時間 L の後，再び $x(L) = x_0$ に還ること．

この条件にある有限時間 L のことをこの周期解の周期という．

このノートで取り上げているような周期的外力が加えられたハイブリッド系では，周期解の周期 L は，外力の周期 T と有理数比の関係にある．すなわち，m, n を正の整数とするとき，

$$L : T = m : n \tag{25}$$

の関係にある．この周期解は，通常 m/n 分数調波解と呼ばれている．特に，

- $L : T = 1 : 1$ の解を基本調波周期解
- $L : T = m : 1$ の解を高調波周期解
- $L : T = 1 : n$ の解を分数調波周期解

と呼んでいる．

[*8] このノートでは，用語：周期解，周期運動や周期振動は同義語としてあまり区別しないで使用している．もう少し使い分けが必要であろうが，それはまたの機会ということにしたい．

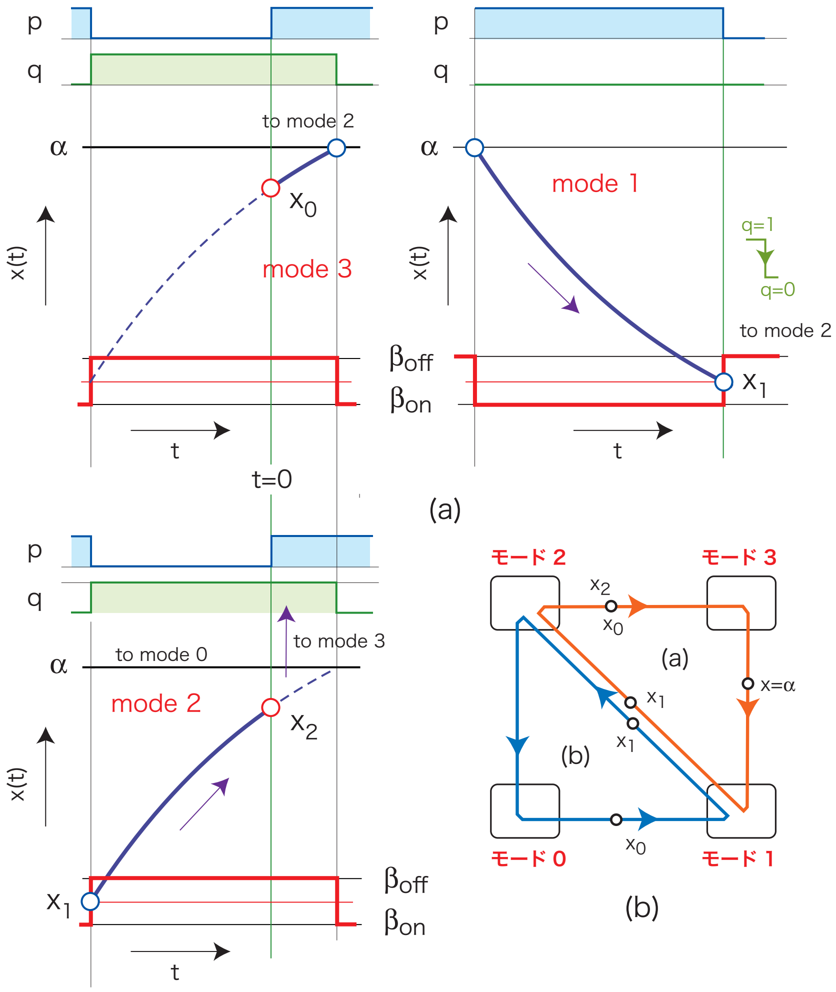


図 12　周期振動の例 (a) とそのグラフ表示 (b).

3.1.5　基本調波周期振動の例

光入力 p が立ち上がる時刻を $t=0$ と考え，この時刻に初期値 x_0 を出発する周期解の例を図 12(a) に示した．この周期解は図 (b) に示した閉曲線 (a) に沿って 3 つのモード 3, 1, 2 を巡回する．

3.1.6　外力のデューティーサイクルが変わった場合の周期解

外力の周期 T を固定したまま，デューティーサイクル d を変えた場合の周期解の変化をみておこう．図 13(a) (b) を比較参照．図 13(a) (b) の周期解をモード遷移図 12(b) の上にグラフで表すと，それぞれ閉曲線 (a), (b) となる．モード遷移図の上では異なる閉曲線となるが，どちらの曲線になるかは，外力のデューティーサイクル d と状態 $x(t)$ のデューティーサイクルの大小関係で決まる．

このデューティーサイクル d はあまり小さくはできない．なぜなら，d を次式の値より小さくすると，

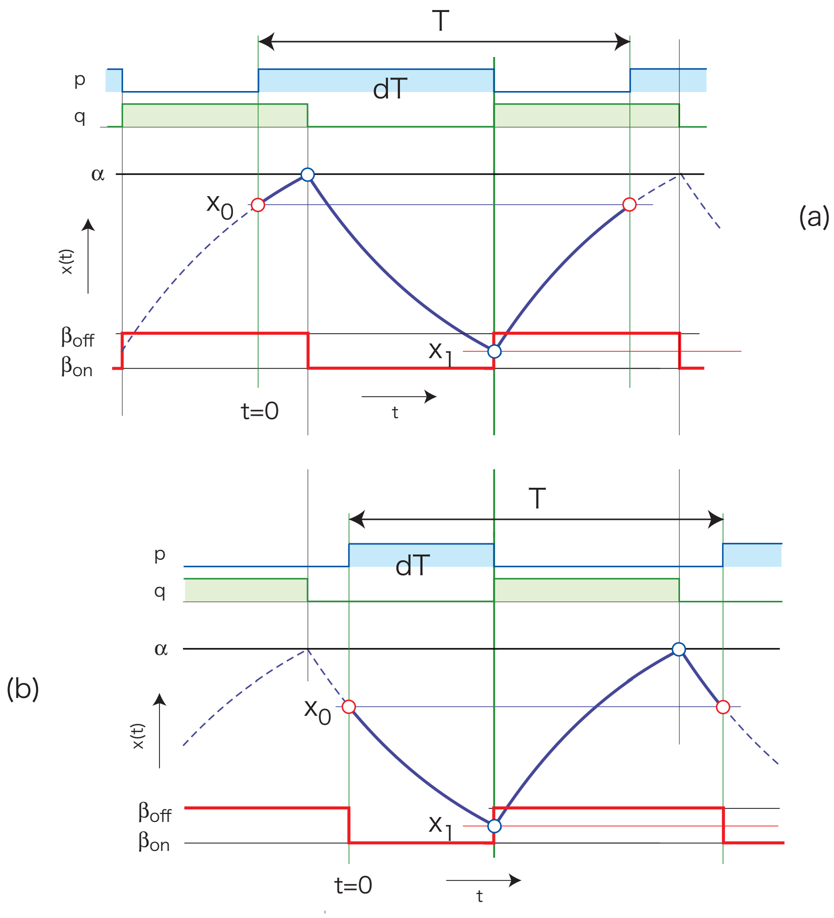


図 13　外力のデューティーサイクルが変わった場合の基本調波周期解.

波形が β_{off} に接触し，全く別の解に変わってしまうからである.

$$x_1 = \beta_{off}e^{-d} \quad \Leftrightarrow d = \ln \frac{\beta_{off}}{x_1} \tag{26}$$

ここでの例は基本調波引き込みが生じた場合の典型的な周期解である．光入力 p が 1 の状態とコンパレータの出力 q が 1 となる時間区間が逆相になっている．この性質は本回路の特徴の 1 つである．

$p\downarrow$ の瞬間と $q\uparrow$ の瞬間が一致する瞬間があることに注意しよう．この瞬間に外力とこの系の周期振動が同期する．同期可能な外力の周期 T は次の条件を満たすときである.

$$\beta_{on} < x_1 < \beta_{off} \tag{27}$$

これを式 (14) を使って書き直すと次式となる.

$$\ln \frac{\alpha(1-\beta_{off})}{\beta_{off}(1-\alpha)} < T < \ln \frac{\alpha(1-\beta_{on})}{\beta_{on}(1-\alpha)} \tag{28}$$

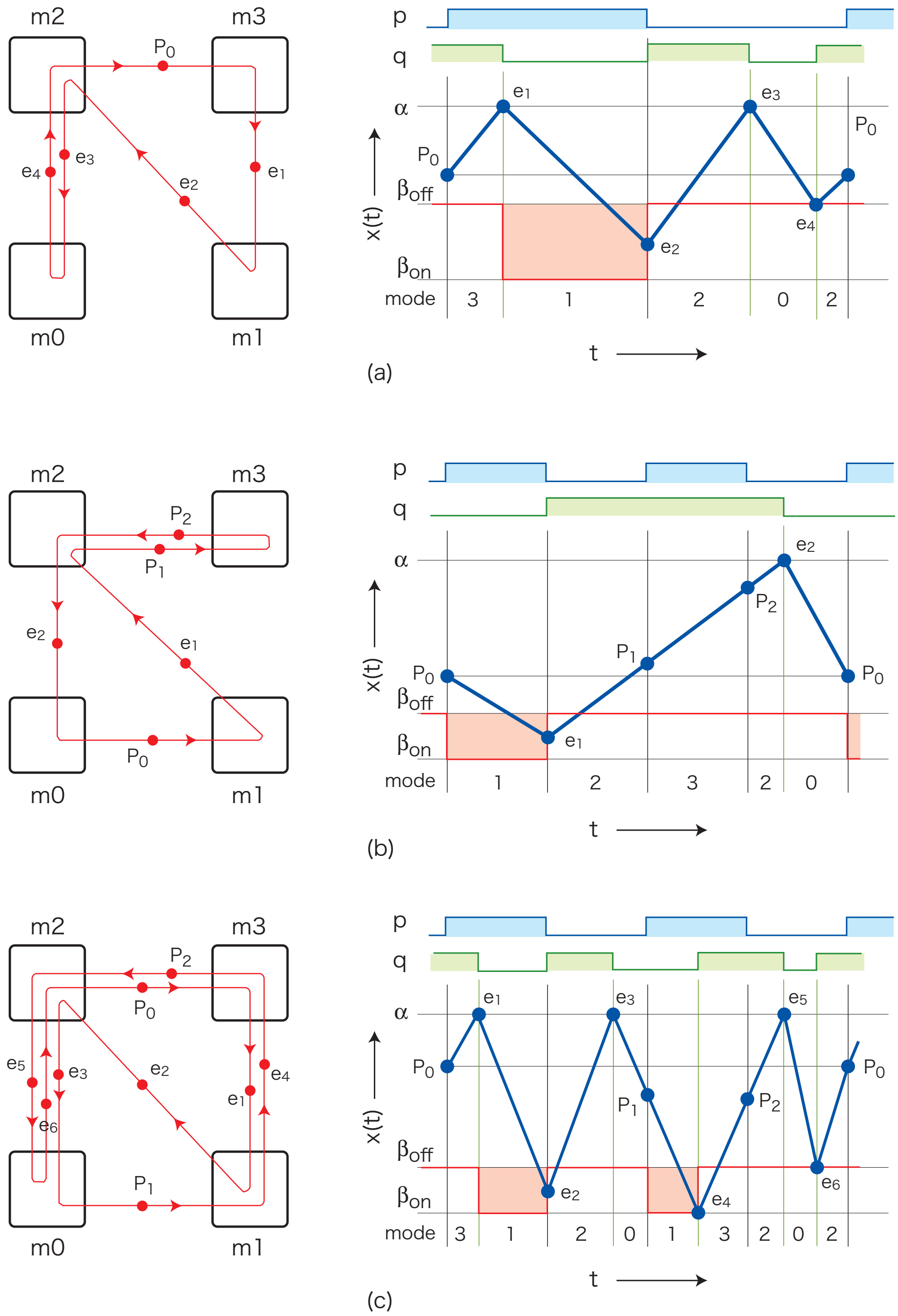


図 14　周期解の例：モード遷移図上のグラフと波形で示した．

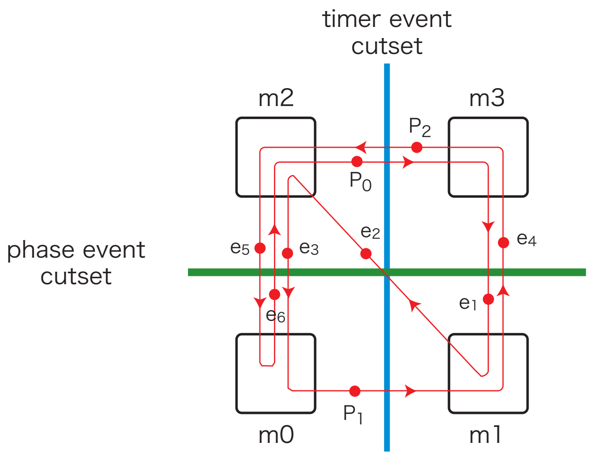


図 15　周期解のグラフの２つのカットセット：イベントカットセットとタイマーカットセット．

3.1.7　周期振動の性質

周期振動は，モード間の巡回と状態の軌道を同時に観察すると理解しやすい．図 14(a) (b) (c) に周期解の例をあげた．この図の左の図は，周期運動中にモードをどんな順序で巡回するかを示したグラフである．また，右の図は状態 $x(t)$ の波形の略図である．波形は指数関数のグラフであるが，ここでは省略して直線で結んである．図 (a) は，２倍の高調波周期解の例である．図 (b) は 1/2 分数調波周期解の例を，また図 (c) は 3/2 分数調波周期解の例を示している．

ここで，モード間を巡回する周期運動のグラフについて２つのカットセット[*9]を定義しておこう．各モードをグラフの点と考え，周期運動で通過する遷移を枝と考えると，周期解を表すグラフができる．図 15 参照．このグラフには

- タイマーイベントによる遷移からなるカットセットと
- フェーズイベントによる遷移からなるカットセット

が存在する．ただし，タイマーイベントとフェーズイベントが重複した枝は両者に属するものとする．

周期解の性質１　任意の周期解を考える．この周期解には

1. タイマーイベントによる遷移からなるカットセットがあり，その枝の数は偶数本である．これを $2n$ する
2. 同様に，フェーズイベントによる遷移からなるカットセットがあり，その枝の数は偶数本である．これを $2m$ とする

すると，この周期解は m/n 分数調波周期解である．

たとえば，図 15 のグラフでは $m = 3, n = 2$ なので，この周期解は 3/2 分数調波周期解である．自明な

[*9] グラフの点を２つの部分集合に分割したとき，分割した部分集合間を結ぶ枝の集合がカットセットである．

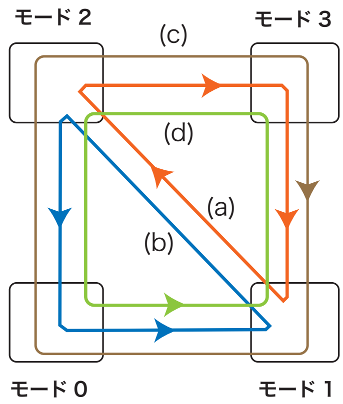


図 16　存在可能な基本調波周期解のグラフ．

ことであるが，イベント遷移は偶数回起こることになり，状態 $x(t)$ の上限 α に m 回，残りが下限での軌道の折れ曲がり点となる．これは，点 β_{on}, β_{off} あるいは $x_0 \in [\beta_{on},\ \beta_{off}]$ のいずれかの点となる．

さて，モード遷移図を用いて存在可能な基本調波周期解にはどのようなものがあるか考えてみよう．

周期解の性質２　存在可能な基本調波周期解は，図 16 に示した 4 つの閉曲線に対応する解に限られる．

すなわち，次の結果を得る．

1. 閉曲線 (a), (b) に対応する周期解は外力に同期した基本調波周期解であり，図 12，13 で説明した解となる．$q\downarrow$ 時の状態を x_1 とすれば，x_1 は次式を満たす：

$$\beta_{on} < x_1 < \beta_{off}$$

2. 閉曲線 (c), (d) に対応する周期解は，外力に同期していない基本調波周期解であり，それぞれ

$$x_1 = \begin{cases} \beta_{on} & \text{閉曲線 } (c) \text{ のとき} \\ \beta_{off} & \text{閉曲線 } (d) \text{ のとき} \end{cases}$$

の周期解となる．

タイマー遷移とイベント遷移が重複した枝についてはつぎの性質がある．

周期解の性質３　任意の周期解は，タイマー遷移とイベント遷移が重複した枝を少なくとも 1 本持っている．この枝は外力 p とコンパレータ出力 q が同期する瞬間を与えている．

今，p, q を 2 進数表示して $0bqp$ のように並べて書くことにすると，モードはこの数字で表すことができる．重複した枝はモード 1 (0b01) からモード 2 (0b10) への遷移を表している．さて，モード間の距離 $d(mode\ i, mode\ j)$ を 2 進数で表した場合の各桁の変化の数で表すことにする．この距離は Hamming 距離として知られている．この距離を使って，「周期解の同期する瞬間は Hamming 距離が 2 以上の遷移で起こる」と言うことができる．実際，この系では d(0b10, 0b01)=2 となっている．

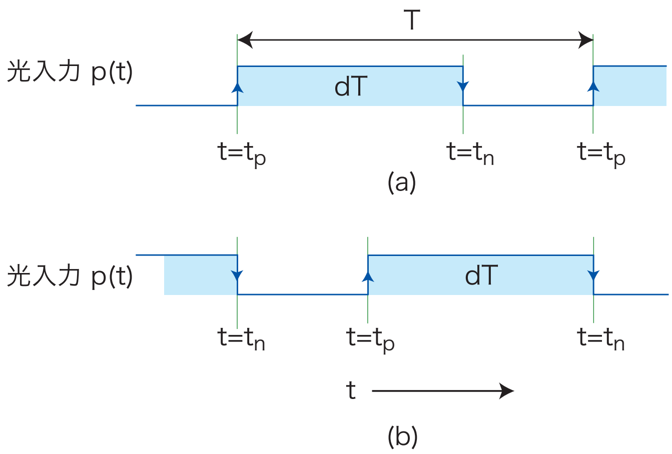


図 17　周期的な光入力波形 $p(t)$ と Poincaré 写像のためのタイミング．

3.2　Poincaré 写像と周期解の安定性

3.2.1　大域的な Poincaré 写像の定義

時間に関して周期的な光入力 $p(t)$ を使って Poincaré 写像が定義できるので，周期 T のサンプリング（周期 T の写像）は，原理的には時刻のどの瞬間を使って定義してもよい．図 17 参照．ディジタルモードの遷移が，タイマー情報となる $p\uparrow$ の瞬間 $t = t_p$ 図 17(a) や，$p\downarrow$ の瞬間 $t = t_n$ 図 17(b) に起こることを考えると，Poincaré 写像はこれらの瞬間と合わせておいたほうが解析に好都合である．ここでは，

周期 T のサンプリング区間の選択　フェーズイベント遷移とタイマーイベント遷移が重複して起こる時刻に着目し，モード 1 からモード 2 に遷移した直後を $t = 0$ に選び，この時刻から 1 周期 T の時間発展をみることにし，

Poincaré 写像の定義域　タイマーカットセットでモードを 2 つの部分集合に分割すると，この系では 2 つの部分集合 { mode0, mode2 }, { mode1, mode3} が得られる．図 18 参照．どちらの部分集合も状態 $x(t)$ の運動方程式として $\dot{x} = -x + 1$ と $\dot{x} = -x$ の 2 つの発展モードがある．したがって，これら 2 種類の時間発展に関する Poincaré 写像を考える．

以下，このノートでは $p\downarrow$ の直後を $t = 0$ に選び，モード 0 とモード 2 にそれぞれ，初期値集合 $[\beta_{off}, \alpha]$ と $[\beta_{on}, \alpha]$ を定めて周期 T 後の状態 $x(T)$ をみることで Poincaré 写像を定義する．

すなわち，次の Poincaré 写像 P を考える．

$$P : M_0 \cup M_1 \to M_0 \cup M_1; x(0) \mapsto x(T) \tag{29}$$

ここに，$M_0 = [\beta_{off}, \alpha] \times (q = 0)$, $M_1 = [\beta_{on}, \alpha] \times (q = 1)$ を表す．図 18(b) 参照．

解 $x(t)$ の流れに関するイベントで注意する点は，モード 1 の下端での次の点である．

1. $x = \beta_{on}$ に到達した $x(t)$ は，モード 3 に遷移し，モード 3 の流れとなる．

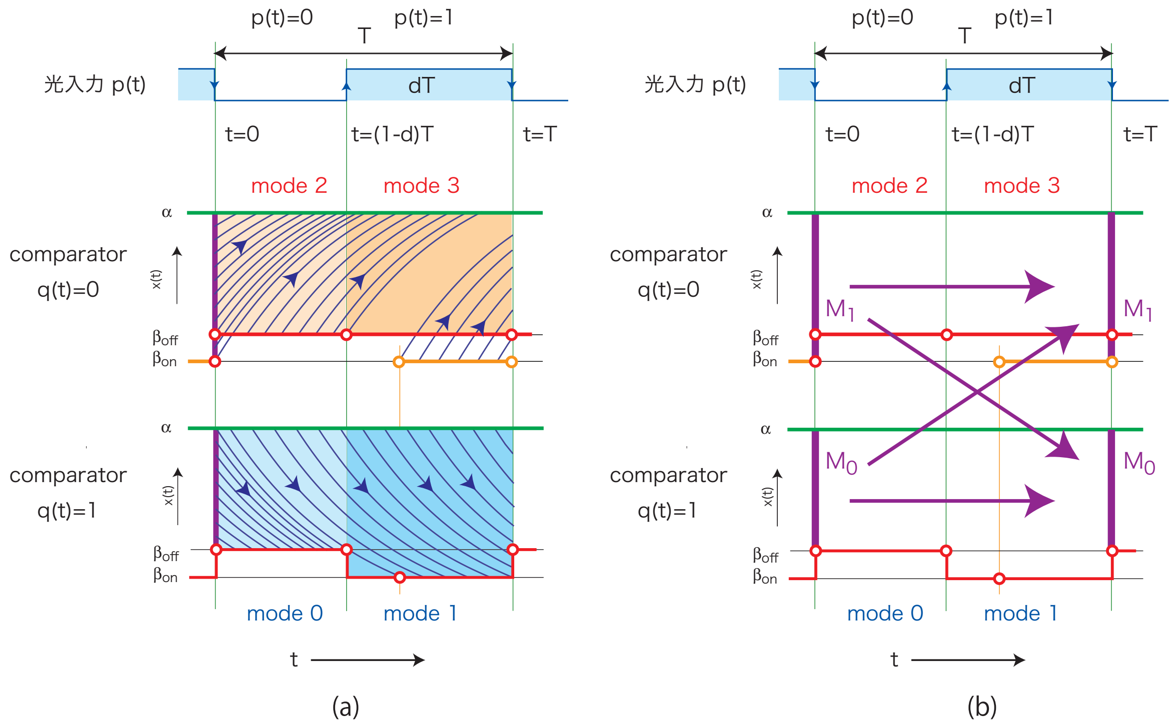


図 18　タイマーカットセットでモードを 2 つの部分集合に分割し，Poincaré 写像を考える．

2. $t = T$ で，区間 $[\beta_{on}, \beta_{off}]$ に流れ着いた解は，モード 2 に遷移し，モード 2 の流れとなる．

3.2.2　簡単な周期解の例

図 19 に赤い軌道で示した周期解を具体的に求めてみよう．この解のように状態の上下で 1 回づつフェーズイベントの起こる軌道を仮定すると，初期値 $x_0 \in M_1$ を出発する解の $t = T$ での値 $x_1 = x(T)$ は次式を満足する．

$$\begin{aligned} \alpha &= (x_0 - 1)e^{-\tau} + 1 \\ x_1 &= \alpha e^{-(T-\tau)} \end{aligned} \tag{30}$$

したがって

$$x_1 = \frac{e^{-T}}{\alpha - 1}(x_0 - 1) \tag{31}$$

を得る．この場合,Poincaré 写像は線形写像となっている．これは，フェーズイベントがもっと沢山生じる場合にも言えることで，この系では一般に Poincaré 写像は，断片的な線形写像となる．しかし，この写像は必ずしも連続写像になるとは限らない．

今，$x_1 = x_0$ と置いて固定点を求めると，次式となる．

$$x_0 = \frac{\alpha e^{-T}}{1 - \alpha + \alpha e^{-T}} \tag{32}$$

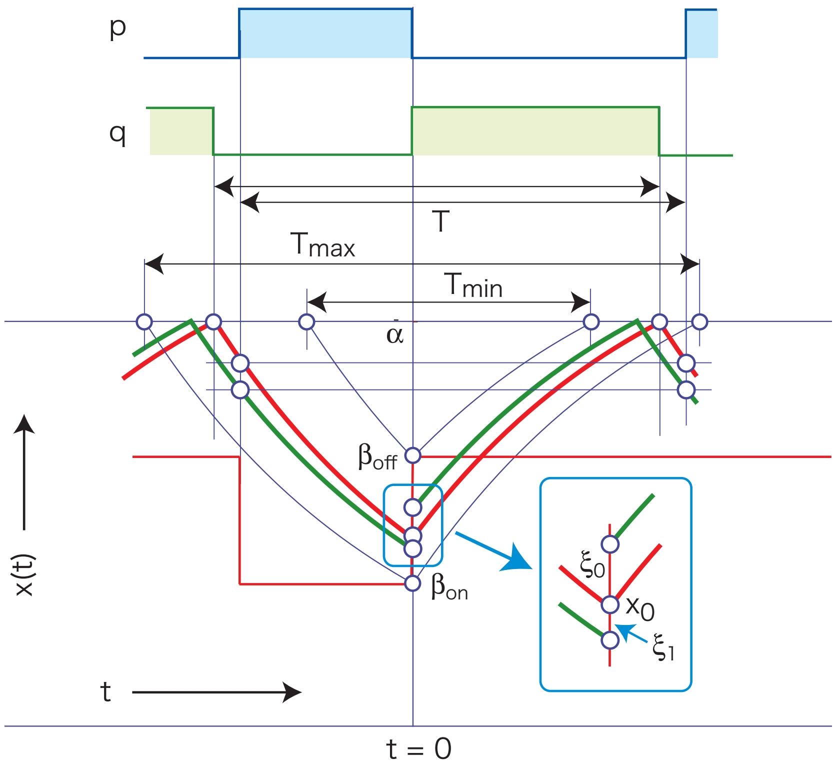


図 19　周期軌道（赤い曲線）と区間 $[\beta_{on},\ \beta_{off}]$ での Poincaré 写像.

3.2.3　周期解の安定性

x_0 は固定点なので，この点からの変分 ξ_0 をとり，その変化をみてみよう．点 $x_0+\xi_0$ が T 後に $x_0+\xi_1$ に写されたと考えると，図 19 より

$$\begin{aligned}(x_0+\xi_0-1)e^{-T_0}+1 &= \alpha,\ \ x_0+\xi_1=\alpha e^{-T_1} \\ (x_0-1)e^{-T_2}+1 &= \alpha,\ \ x_0=\alpha e^{-T_3}\end{aligned} \tag{33}$$

から，条件 $T=T_0+T_1=T_2+T_3$ を使って，次の変分方程式を得る．

$$\xi_1=-\frac{x_0}{1-x_0}\xi_0 \tag{34}$$

固定点 x_0 が $x_0<1/2$ にあれば漸近安定となることが分かる．

3.2.4　Poincaré 写像の例

数値例として次の例をみておこう．

- $R_3=R_4=100K,\ R_5=50K,\ r_3=10K$
- $\alpha=\dfrac{3}{4}=0.75,\ \beta_{off}=\dfrac{1}{2}=0.5,\ \beta_{on}=\dfrac{1}{7}=0.143$

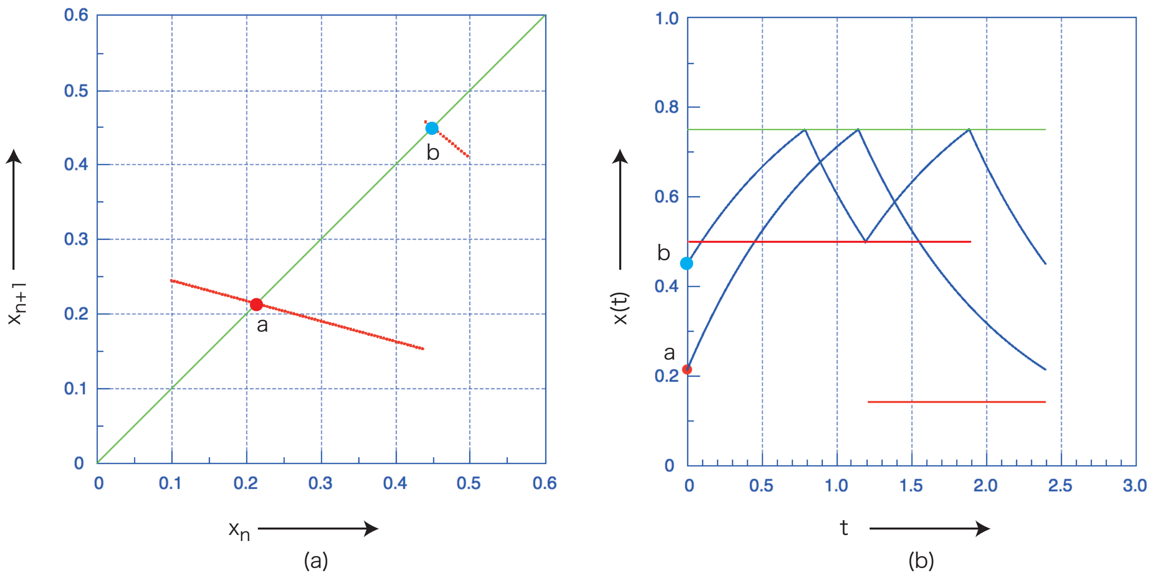


図 20　Poincaré 写像の数値例 (a) と 2 つの周期解 (b)：外力の周期 $T = 2.4$.

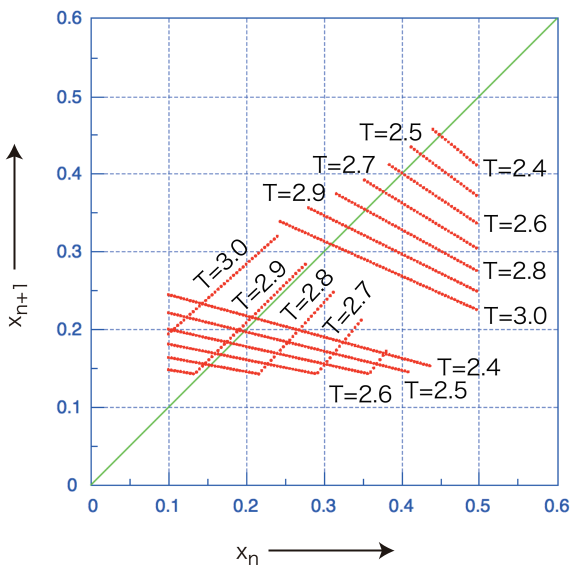


図 21　Poincaré 写像の数値例：外力の周期 T を変化させた場合.

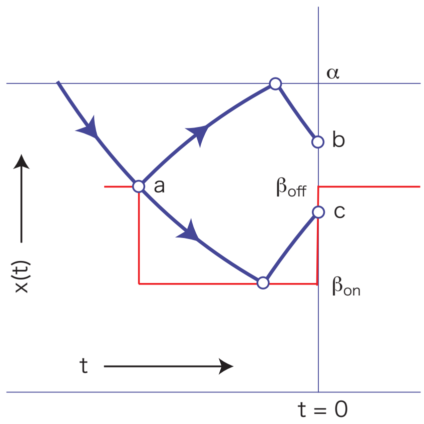


図 22　Poincaré 写像の不連続性が生じる軌道：点 a で軌道束が上下に分かれる．

- $\beta = \beta_{off}$ の場合の周期 $T_{\beta_{off}} = 1.099$, そのときのデューティーサイクル $d_{\beta_{off}} = 0.631$
- $\beta = \beta_{on}$ の場合の周期 $T_{\beta_{on}} = 2.890$, そのときのデューティーサイクル $d_{\beta_{off}} = 0.426$

この系に，周期 T の光入力 $p(t)$ を照射する．ここでは，この周期 T を変化させて Poincaré 写像を数値的に計算した．また，$p(t)$ のデューティーサイクルは 50%：$d = 1/2 = 0.5$ を仮定した．図 20 と図 21 参照．この例から分かるように，Poincaré 写像には不連続点が生じることがある．この不連続性は，図 22 に描いた軌道近傍の解軌道が上下に枝分かれすることが原因である．この例では，点 a を通る軌道の初期値を x_0 とし，α でのフェーズイベントが起こる時刻を τ とすれば次式が得られる．

$$\alpha = (x_0 - 1)e^{-\tau} + 1,\ \beta_{off} = \alpha e^{-(T/2-\tau)} = \frac{1}{2}$$

したがって

$$x_0 = 1 - \frac{1-\alpha}{2\alpha} e^{T/2}$$

上記の数値を代入すると不連続点 $x_0 = 0.4466$ が得られる．

これらの数値例をみると，次の性質も読み取れる．

- 外力の周期 T が，$2.1 \leqq T < 2.9$ 付近で 2 つの安定な固定点をもつ．これらは共に漸近安定な固定点である．図 20 の点 a に対応する固定点が基本調波周期解に，点 b が 2 倍の高調波周期解に対応している．図 20(b) の波形参照．
- Poincaré 写像に不連続点があるため，不安定固定点がなくとも 2 つの安定な固定点が存在し得る．これら 2 つのアトラクタに関するベイスンの境界点は，Poincaré 写像の不連続点である．
- 図 21 から Poincaré 写像は，2 つの線形写像

$$x_{n+1} = p_1(x_n - 1) \text{ あるいは } x_{n+1} - 1 = p_2(x_n - 1)$$

を組み合わせた形となっている．ここに，p_1, p_2 は，線分の傾きであり，パラメータ $T, \alpha, \beta_{off}, \beta_{on}$

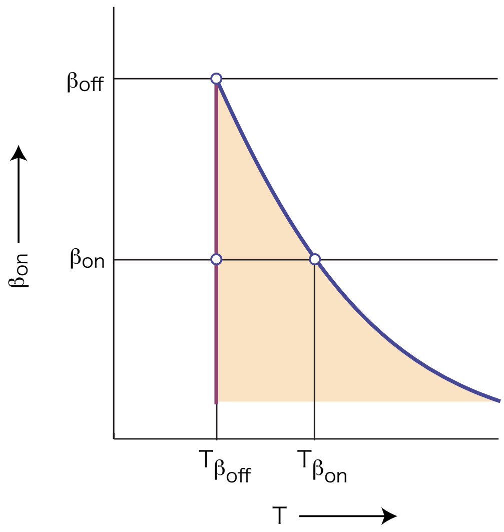


図 23　引き込み領域.

の関数として計算できる．また，写像の折れ曲がり点は，２つの直線の交点

$$x_n = \frac{p_2 - p_1 - 1}{p_2 - p_1}$$

である.

3.3　周期解の分岐（未稿）

何度か出てきたとおり，系を与えると，基本調波引き込みの生じる外力の周期 T は式 (28)：

$$\ln \frac{\alpha(1-\beta_{off})}{\beta_{off}(1-\alpha)} \leqq T \leqq \ln \frac{\alpha(1-\beta_{on})}{\beta_{on}(1-\alpha)} \tag{35}$$

で与えられる．いま，これらの下限と上限をそれぞれ

$$T_{\beta_{off}} = \ln \frac{\alpha(1-\beta_{off})}{\beta_{off}(1-\alpha)},\ T_{\beta_{on}} = \ln \frac{\alpha(1-\beta_{on})}{\beta_{on}(1-\alpha)} \tag{36}$$

とおくと，この数値例では，$T_{\beta_{off}} = 1.099$，$T_{\beta_{on}} = 2.890$ となっている．β_{on} を β_{off} から小さい方向に変えて，周期 T とこの β_{on} の２変数で引き込み領域を図示すると２パラメータ分岐図が得られる．図 23 のうすく着色した領域で基本調波引き込みが起こる．領域左端の垂直の直線は式 (34) の第１式の値，右端の曲線の値は同式第２式の値である．

$T_{\beta_{off}} = 1.099$ の有理数倍の値 $T = m/nT_{\beta_{off}}$ を区間の左端値とした区間があり，この区間で m/n 分数調波引き込みが起こる．図 24，25 参照．図中の数字 m/n はこの分数調波の引き込みが見られる領域を示している．Faray 数列状に引き込み領域が存在することが分かる．

図 26 は，$\beta_{on} = 0.4$ として T を変えた場合の１次元分岐図 (a) と波形の例 (b) を示している．図 25 の $\beta_{on} = 0.4$ で切った直線上の分岐現象をみていると考えるとよい．

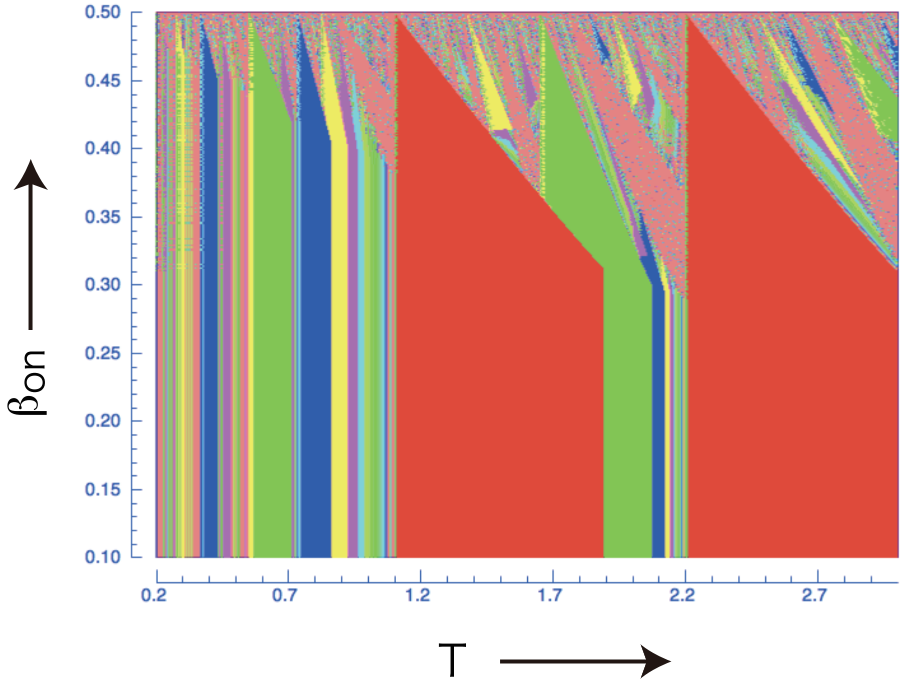


図 24　デューティーサイクル 25% の光入力を加えた場合の引き込み領域.

図 26 (a) で点列が区間 $[\beta_{on},\ \beta_{off}]$ の外にはみ出した部分を持つ解は，部分的に同期が外れた準周期解のようにみえる．$T = 1.08$, $T = 1.66$ の例参照．これらについては，大域的に Poincaré 写像を定義して軌道の性質を解析する必要がある．

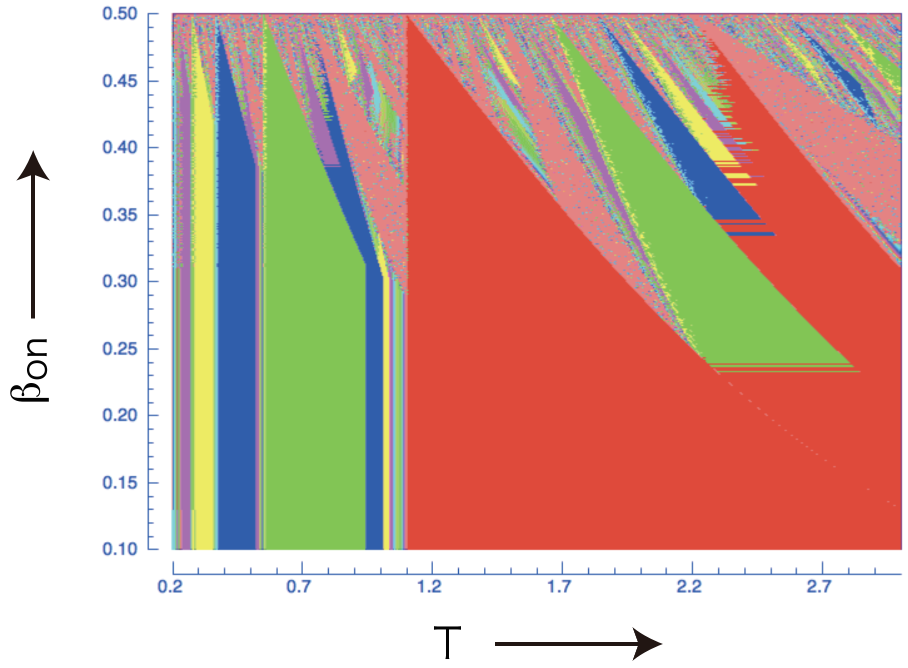


図 25　デューティーサイクル 50% の光入力を加えた場合の引き込み領域.

参考文献

[1] J. Buck and E. Buck; Synchronous Fireflies, Sci. Am.,Vol. 234, No.5, pp. 74-85, 1976.

[2] W. Garver and F. Moss; Electronic Fireflies, Sci. Am.,Vol. 269, No.6, pp. 94-96, 1993.

[3] 高坂，川上，上田；方形波発振器を用いた電子ホタルの同期現象，信学技報， NLP96-5, 1996.

[4] T. Kousaka, H. Kawakami and T. Ueta; Synchronization of Electric Fireflies by Using Square Wave Generators, Trans. IEICE Fundamentals, Vol.E81-A, No.4, 1998.

[5] 関川，木本，河野，川上，合原；光結合した方形波発振器を用いた同期現象，信学技報，Vol. 111, No. 243, 2011.

[6] 伊藤，辻，上田，川上；周期外力を加えた電子ホタルにおける分岐と同期現象，信学技報， Vol. 111, No. 395, 2012.

[7] 辻，伊藤，木本，関川，喜多，上田，合原，川上；LED ホタルの同期現象：自律的に動く光パタンの生成，LED 総合フォーラム 2012 in 徳島論文集, pp. 99-100, 2012.

[8] D. Ito, T. Nakanishi, A. Tsuji, T. Ueta and H. Kawakami; Bifurcation phenomena of a light coupled oscillator with a clock pulse input, NCSP’12, Honolulu, 2012.

[9] K. Kimoto, A. Tsuji, M. Sekikawa, I. Aihara, D. Ito, T. Ueta, K. Aihara and H. Kawakami; Optically Coupled Oscillators(OCOs)—LED Fireflies, ACM Multimedia Art Exhibition 2012, Todaiji Culture Center, 10/20-11/4, 2012.

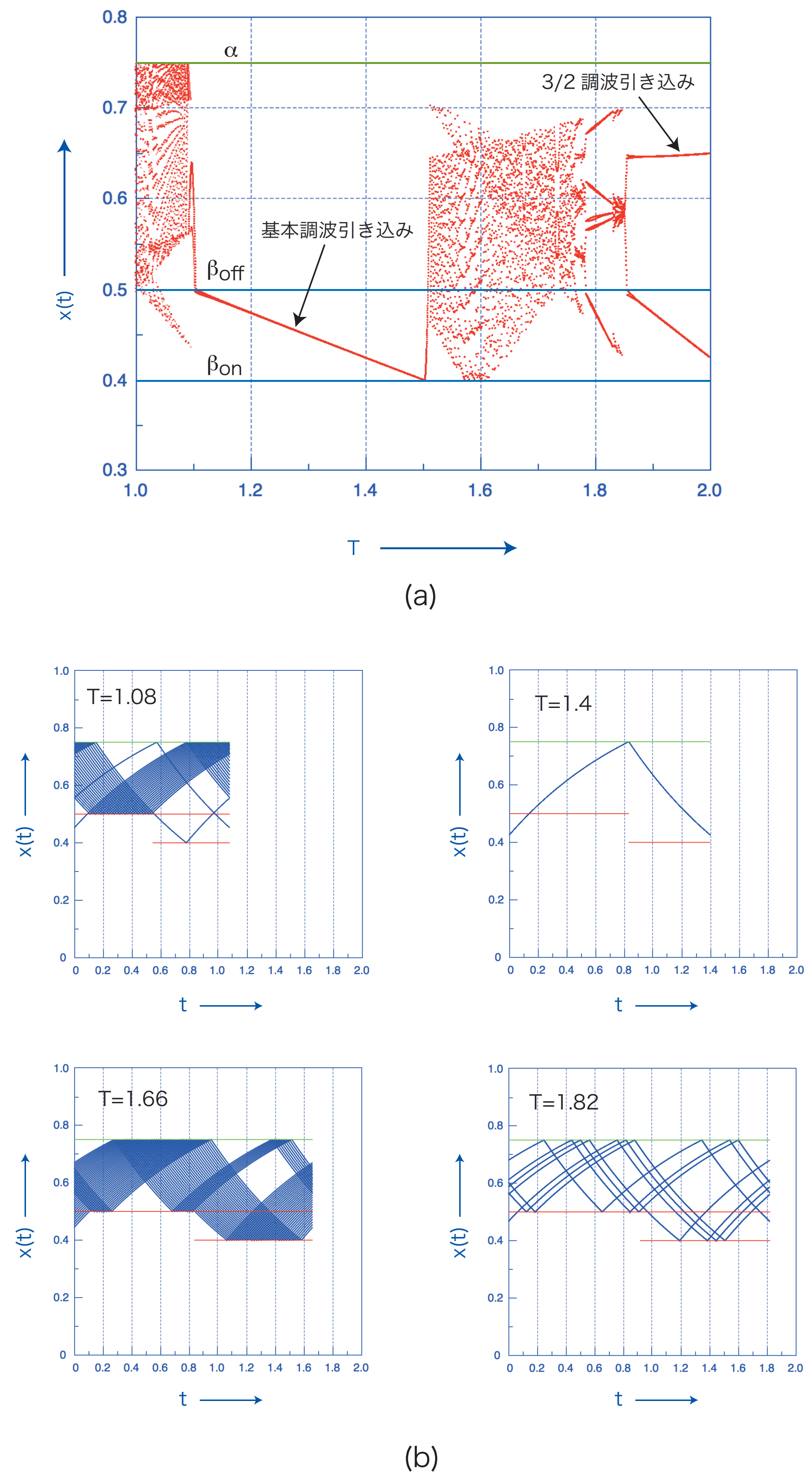


図 26　$\beta_{on} = 0.4$ として T を変えた場合の 1 次元分岐図 (a)，波形の例 (b).

[10] 伊藤，辻，木本，合原，関川，上田，合原，川上；LED ホタルの引き込み現象：ホタルはエッジで同期する，LED 総合フォーラム 2013 in 徳島論文集, 2013(to appear).

[11] Edward A. Lee and Sanjit A. Seshia; Introduction to Embedded Systems, A Cyber-Physical Systems Approach, 2011. http://LeeSeshia.org