

オペアンプ・マルチバイブレータ — 興奮性のベクトル場をみる —

川上 博

2015年12月17日

目次

1	このテーマの目的	2
2	無安定マルチバイブレータの解析	2
2.1	オペアンプの静特性	3
2.2	フィードバック回路	4
2.3	オペアンプの動作点集合	5
2.4	Slow-fast 力学系モデルの構築	5
2.5	Hybrid 系としての定式化	7
3	単安定マルチバイブレータの解析	10
3.1	単安定マルチバイブレータ回路 (a) の解析	10
3.2	単安定マルチバイブレータ回路 (b) の解析	12
4	双安定マルチバイブレータの解析	14
4.1	遅い運動の回路方程式	14
4.2	トリガー入力回路	15
5	むすび	16
5.1	マルチバイブレータの回路図	16
5.2	マルチバイブレータに関連する幾つかの問題	18

1 このテーマの目的

マルチバイブレータをオペアンプで作ることは、マルチバイブレータを作る最も簡単な方法の一つである。解析が簡単というメリットのお蔭で、もしかしたらマルチバイブレータと呼ばれる回路族全体が持つ共通の構造や性質がみえてくるかも知れない。ここでは主として、方形波発振器として知られている無安定マルチバイブレータを解析する過程を通じてそのような事柄を考えたい。

マルチバイブレータには、無安定マルチバイブレータ (astable multivibrator), 単安定マルチバイブレータ (monostable multivibrator), および、双安定マルチバイブレータ (bistable multivibrator) の3つのタイプがある。オペアンプで作る場合、その出力を正帰還させることでヒステリシスを持つコンパレータを作ってこれを有効に利用している。3つのタイプの違いはキャパシタと抵抗で構成する負帰還回路の動的な設計の違いで実現できる。ヒステリシス特性が作り出すベクトル場があって、その中に3つのタイプの運動を作り付けるといった感じである。

今、ヒステリシス特性が作り出すベクトル場を興奮場 (excitable vector field) と呼ぶことにしよう。すると

1. 無安定マルチバイブレータとは、興奮場に安定平衡点を作らない回路のことである。このことから興奮場には安定な周期運動ができる。すなわち、回路には2つのゆっくりした運動とそれらの間を飛び移る速い運動からなる弛張振動が生成される。
2. 単安定マルチバイブレータとは、興奮場に安定平衡点を1つ作った回路のことである。この場合、安定平衡点は大域的な唯一のアトラクターとなっている。外部からの信号で一度状態を平衡点からずらした場合、状態は興奮場を一巡してから元の安定平衡点に還ってくる。すなわち、状態は、最初速い運動で平衡点近傍を離れ、その後ゆっくりした運動と速い運動の後、元の安定平衡点に落ち着く。刺激により一度だけスパイク状の応答を示すことがこの回路の特徴と言える。
3. 双安定マルチバイブレータとは、興奮場に安定平衡点を2つ作った回路のことである。状態は、どちらかの安定平衡点に留まる。刺激が与えられると、状態は速い運動で安定平衡点間を遷移する。フリップ・フロップ回路は双安定マルチバイブレータのデジタル版といえよう。

このように考えると、一体「興奮場」とは、どのようなベクトル場なのだろうか？ 定義をはっきりさせて欲しいと言われるに違いない。このことに答えるのがこのノートの目的となっている。

2 無安定マルチバイブレータの解析

図 1(a) の無安定マルチバイブレータを解析してみよう。ここでの考え方としては、同図 (b) に記した赤色正方形の内部と外部を分けて別々に考え、それらの結果を合わせて全体を解析するといった方法をとる。すなわち、

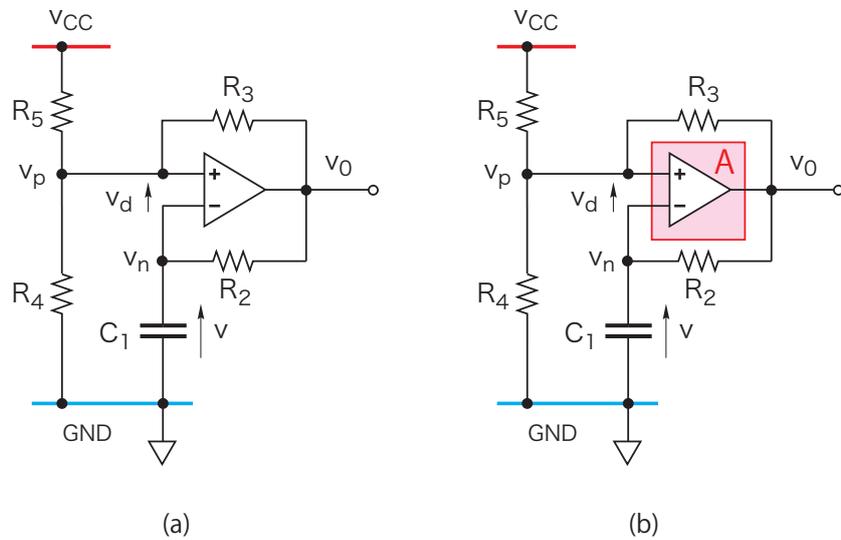


図1 無安定マルチバイブレータ回路.

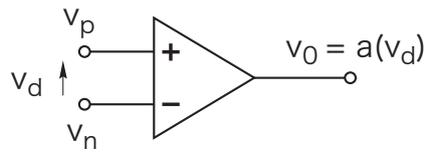


図2 オペアンプの端子電圧と入出力関係： $v_0 = a(v_d)$.

1. オペアンプの静特性
2. フィードバック回路
3. オペアンプの動作点集合
4. Slow-fast 力学系モデルの構築
5. Hybrid 系としての定式化

の順序に解析を進めることにする.

2.1 オペアンプの静特性

このノートでは、図2に示したオペアンプの端子電圧の記法を使うことにしよう. そこで、オペアンプの入出力関係は、関数

$$v_0 = a(v_d), \quad \text{ただし, } v_d = v_p - v_n \quad (1)$$

で表される特性を持つと仮定する. この特性は、図3に示したどの関数を用いてもよい. 以下では簡単のため図3(c)に示した単位ステップ関数を使って説明する.

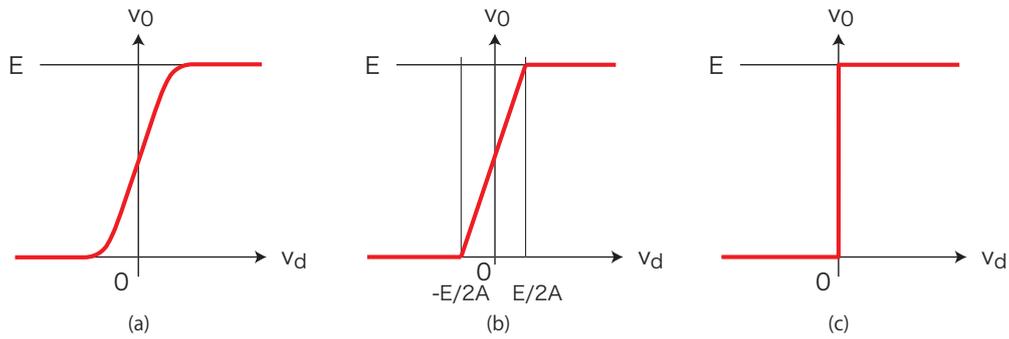


図3 オペアンプの入出力関係： $v_0 = a(v_d)$.

2.2 フィードバック回路

2.2.1 + 入力の端子電圧 v_p : プラス入力端子へのフィードバック

+ 入力端子電圧 v_p に関しては, この端子につながった抵抗を流れる電流に関する Kirchhoff の法則より

$$\frac{v_0 - v_p}{R_3} + \frac{-v_p}{R_4} + \frac{E - v_p}{R_5} = 0 \quad (2)$$

が成り立つ. したがって

$$v_p = \frac{\frac{v_0}{R_3} + \frac{E}{R_5}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} = pv_0 + qE \quad (3)$$

ここに,

$$p = \frac{\frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}}, \quad q = \frac{\frac{1}{R_5}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}}$$

おいた.

2.2.2 - 入力の端子電圧 v_n : マイナス入力端子へのフィードバック

キャパシタ電圧を v とすれば, 次式が成り立つ:

$$\begin{aligned} v_n &= v \\ R_2 C_1 \frac{dv}{dt} + v &= v_0 \end{aligned} \quad (4)$$

2.2.3 差動入力電圧 v_d

式 (3) と (4) の第 1 式より

$$v_d = v_p - v_n = pv_0 + qE - v \quad (5)$$

を得る.

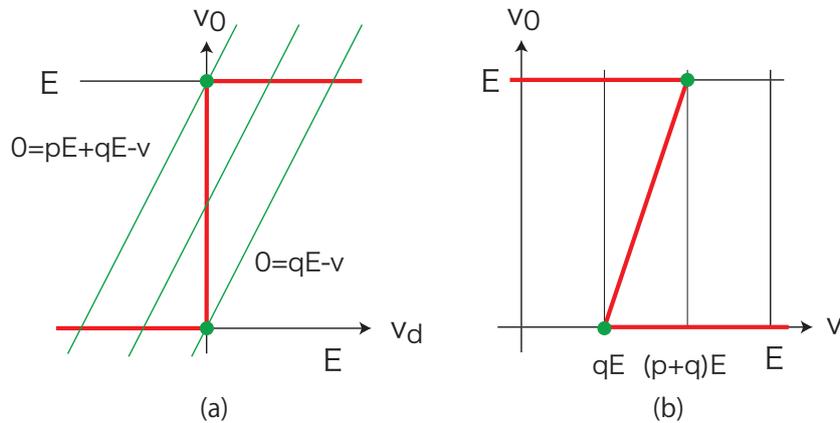


図4 オペアンプの動作点集合.

2.3 オペアンプの動作点集合

以上の関係を整理しよう。まず、式(1)と式(5)より、 v_d を消去できると、変数 v_0 と v の関係が得られる。この式と(4)の第2式より v の解を求めるとこの回路の挙動を知ることができる。以下、変数 v_0 と v の関係を図式的に求めることにしよう。図4(a)は2つの関係式を描いた図である。赤太線は式(1)を、緑色の直線は式(5)を表している。直線の傾斜が正なので、 $0 \leq v_0 \leq E$ を満たす v_0 の値で両者の交点は3個となる。したがって $v-v_0$ 平面でこれらの交点集合をプロットすると図4(b)を得る。

この図より、この回路では v に対して v_0 がヒステリシスを持つ特性となることがわかる。また、この特性上での運動は式(4)の第2式により決定される。ただし、これらの運動が安定であるかどうかは今の段階では不明である。そこで、次にこの問題について考えることにしよう。

2.4 Slow-fast 力学系モデルの構築

2.4.1 オペアンプの動特性

オペアンプの出力電圧 v_0 ももちろん動特性を持っている。それは、寄生キャパシタ、位相補償用キャパシタなどによって引き起こされる。ここでは、最も簡単なモデルとして次の1階微分方程式を仮定することにしよう、北野 [1], IT Application Report [2].

$$\mu \frac{dv_0}{dt} + v_0 = a(v_d) = a(pv_0 + qE - v) \quad (6)$$

ここに、 μ は R_2C_1 の値に比べて十分小さい数と仮定する^{*1}: $\mu \ll 1$.

^{*1} この仮定は、オペアンプの静特性が安定に観測されることからの帰結である。 v_0 の過渡現象は、「関数で表現してよい」ほどに速やかに消滅すると考える。

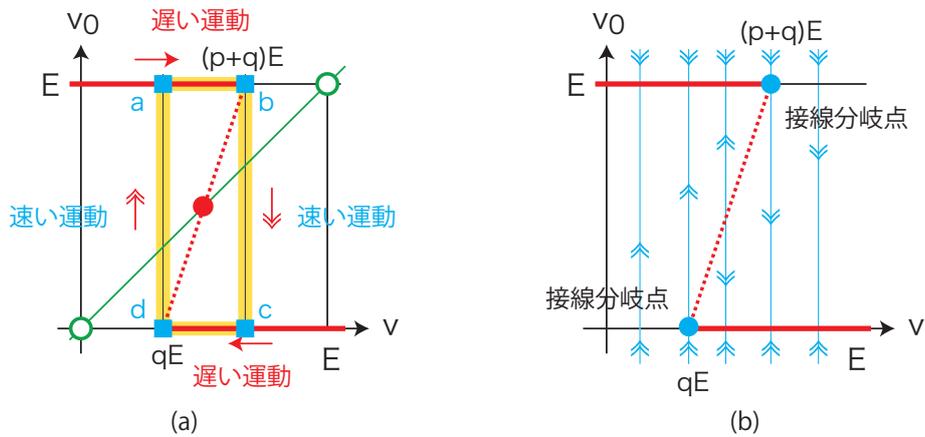


図5 式(7)の相平面図(a)と v を止めてみた速い運動の分岐図(b).

次の性質が直ちに導かれる。ただし、ここでは v の動きは、 v_0 のそれに比べてゆっくりしているので、止まっていると仮定しておこう。

1. 式(6)の平衡点集合は前小節で求めたオペアンプの動作点集合と一致する。
2. 式(6)の平衡点集合の中、 $v_0 = E$ と $v_0 = 0$ の部分の平衡点は安定、 $0 < v_0 < E$ の部分の平衡点は不安定である。
3. 点 $(v, v_0) = ((p+q)E, E)$ と点 $(v, v_0) = (qE, 0)$ では、安定平衡点と不安定平衡点が合体して消滅する平衡点の分岐が起こっている*2。
4. 以上のことを纏めると、図4(b)は、 v をパラメータと考えた、式(6)の平衡点の分岐図となっている。

2.4.2 Slow-fast 力学系モデル

v の動きも含めたこの回路の運動は、式(4)の第2式と式(6)を連立させてモデル化できる。改めてこれらの式を示すと次のslow-fast力学系モデルが得られる。

$$\begin{aligned}
 R_2 C_1 \frac{dv}{dt} + v &= v_0 \\
 \mu \frac{dv_0}{dt} + v_0 &= a(pv_0 + qE - v)
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

ここで、第1式はゆっくりした遅い運動を、第2式はそれに比べて非常に速い運動を表す。次の性質は直ちに導かれる。図5参照。

1. オペアンプの静特性を表す集合： $v_0 = a(pv_0 + qE - v)$ は、速い運動のnull cline（速度ゼ

*2 この分岐は平衡点の接線分岐 (tangent bifurcation) とかサドル・ノード分岐 (saddle-node bifurcation) とか呼ばれている。以下、接線分岐と呼ぶことにする。

口の集合) である。従って、この集合 (赤い線分) の上では遅い v の運動が見られる。この集合は遅い運動の乗る多様体 (slow manifold) と呼ばれている。

2. v を 0 から徐々に大きくしてゆくと、 $v = (p+q)E$, $v_0 = E$ (点 b) で 2 つの遅い多様体 (この場合は直線) が交わり、それ以上大きな v では消滅する。大雑把に言って、この点で速い運動の平衡点が接線分岐を起こす。同様な接線分岐は、 v を大きな値から小さくしていった時、 $v = qE$, $v_0 = 0$ (点 d) でも生じる。これらの点では状態が速い運動に乗って急変する。すなわち、点 b から点 c に、また、点 d から点 a に、それぞれ急変する。
3. 遅い多様体上の v の運動は、 $v_0 = E$ (赤い実線) 上では右に、 $v_0 = 0$ (赤い実線) 上では左に動く。直線分 $v_0 = \frac{1}{p}(v - qE)$ (赤い点線) 上では不安定である。点 $v = v_0 = \frac{1}{q}(v - qE)$ は 2 方向に不安定な平衡点である。
4. これらを総合して考えると、アトラクタとして観察される運動は、図中の点 abcd を結ぶ閉曲線からなるリミットサイクルである。
5. このリミットサイクルの周期 T を求めてみよう。図 6 参照。まず、速い運動は一瞬に起こると考えて経過時間は 0 と考える。線分 ab 上の運動は、方程式：

$$R_2 C_1 \frac{dv}{dt} + v = E$$

の解で決まる。そこで点 a ($v = qE$) から点 b ($(p+q)E$) まで動く時間 T_1 を求める。 $v(0) = qE$ を出発する解 $v(t)$ は

$$v(t) = (q-1)E e^{-\frac{1}{R_2 C_1} t} + E$$

となる。したがって、 $t = T_1$ で $v(T_1) = (p+q)E$ となる条件を入れると T_1 が求められる。

$$T_1 = R_2 C_1 \ln \frac{q-1}{p+q-1} \quad (8)$$

同様に、線分 cd 上の運動にかかる時間 T_2 は次式となる。

$$T_2 = R_2 C_1 \ln \frac{p+q}{q} \quad (9)$$

そこで、リミットサイクルの周期 T は次式となる。

$$T = R_2 C_1 \ln \frac{q-1}{p+q-1} + R_2 C_1 \ln \frac{p+q}{q} = R_2 C_1 \ln \frac{(q-1)(p+q)}{(p+q-1)q} \quad (10)$$

2.5 Hybrid 系としての定式化

運動を定常状態、すなわちリミットサイクル上の状態、に制限すると次のような 2 つの有限状態機械 (FSM: Finite State Machine) を定義することができる。すなわち、アナログ・デジタル混在系 (hybrid 力学系) を考えることができる。図 7 参照。

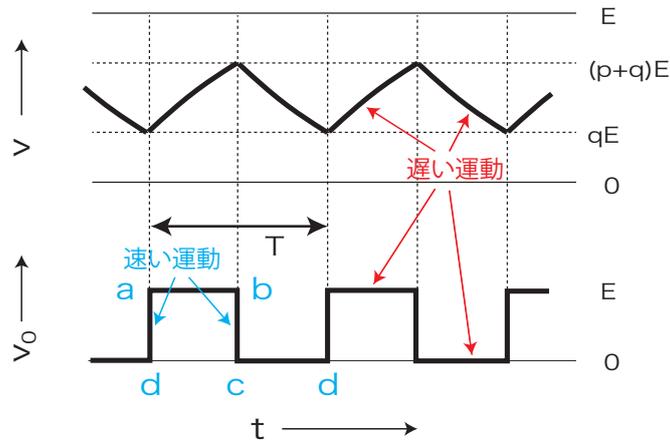


図6 リミットサイクルの波形.

1. まず, モード0とモード1の2つのモードを定義しよう. 各モードは1ビットのデジタル状態 v_0 と線分 $M = [qE, (p+q)E]$ 上のアナログ状態 $v \in M$ を持つ.
2. モードの定義

- モード0 : デジタル状態を $v_0 = 0$ で定義する. アナログ状態には

$$R_2 C_1 \frac{dv}{dt} + v = 0 \quad (11)$$

でベクトル場を定義する.

- モード1 : デジタル状態を $v_0 = 1$ で定義する. アナログ状態には

$$R_2 C_1 \frac{dv}{dt} + v = E \quad (12)$$

でベクトル場を定義する.

3. モード間の遷移の定義

- モード0からモード1への遷移 : モード0にあるアナログ状態が点 $v = qE$ に到達すると, モード0からモード1へのモードの遷移が起こる. この遷移でアナログ状態 v はモード1の $v = qE$ に移る.
- モード1からモード0への遷移 : モード1にあるアナログ状態が点 $v = (p+q)E$ に到達すると, モード1からモード0へのモードの遷移が起こる. この遷移でアナログ状態 v はモード0の $v = (p+q)E$ に移る.

この系の運動は, 次のように見るとよい.

1. まず, 系の初期状態を与えよう. 最初にモード0かあるいはモード1に初期値を与える. ここではモード0に与えてみよう : デジタル状態はモードから直接 $v_0 = 0$ となる. アナログ状態 $v(0)$ は, $v(0) \in M = [qE, (p+q)E]$ の任意の点を与えるとよい.

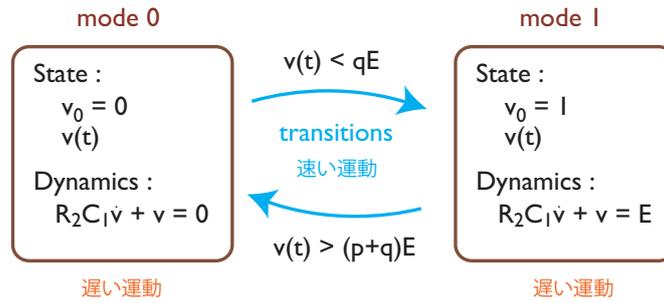


図7 アナログ・デジタル混在系 (hybrid 力学系) の定義.

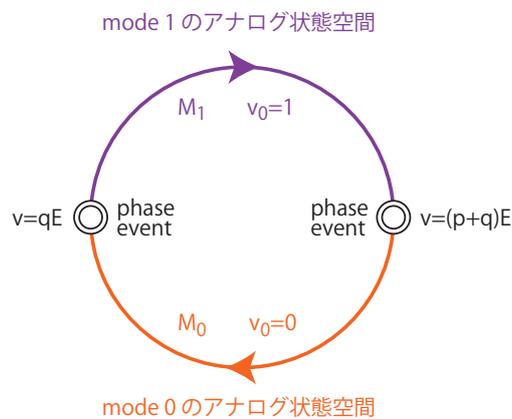


図8 アナログ状態の相空間：貼り合わせ多様体.

2. 状態の時間発展とモードの遷移：アナログ状態 $v(t)$ は式 (11) に従って変化する．この場合は 0 に向かって指数関数的に減衰する．点 $v = qE$ に到達した時点でモードの遷移を引き起こす．アナログ状態によって起こるイベントなのでフェーズ・イベントと呼ぶことにしよう．状態は速い運動に乗ってモード 1 へ遷移する*3．
3. モード 1 においても同様な状態の時間発展とモードの遷移が起こり，系の運動は弛張振動となる．
4. アナログ状態の相空間（貼り合わせ多様体）：2つのモードのアナログ状態空間を抜き出してフェーズ・イベントの定義どおり貼り合わせ，系の運動全体を見通せる多様体を考えると便利である．これを貼り合わせ多様体と呼ぶことにしよう．この例では，モード 0 とモード 1 の線分 M を端どおし同値とみなした「円状の集合」がこれにあたる．図 8 参照．図中，フェーズ・イベントが起こる値でモードの飛び（遷移）がある．この点でデジタル状態 v_0 は値を変える．アナログ状態は 2つの M ，それぞれを M_0, M_1 とした，上を指数関数波で循環する．図 6 の波形を参照．

*3 これらの変化は slow-fast 系から hybrid 系を定義した定義通りの運動である．

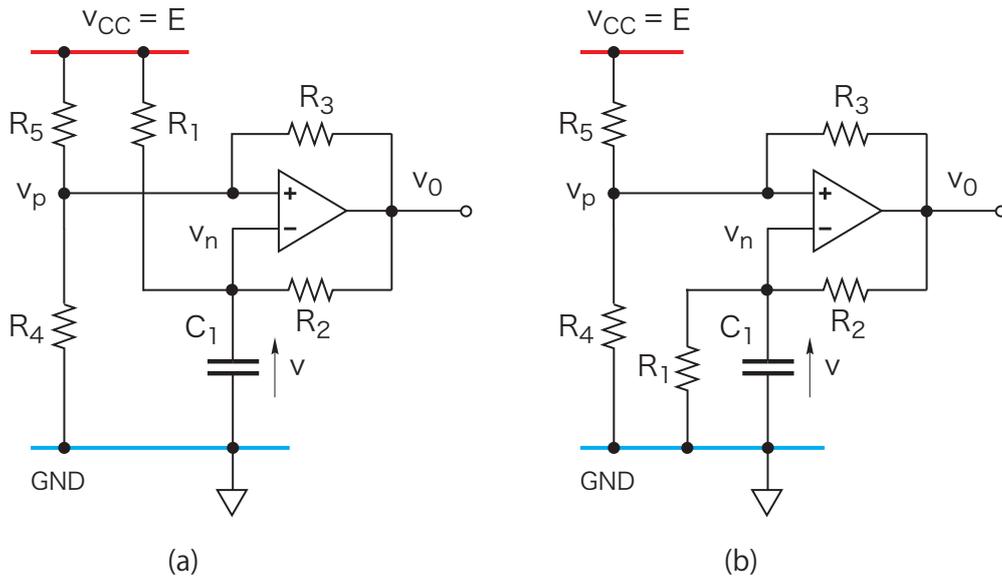


図9 単安定マルチバイブレータ回路 (a), (b).

3 単安定マルチバイブレータの解析

次に、図9の単安定マルチバイブレータを解析しよう。解析方法は無安定マルチバイブレータのそれと同様である。

更に、これらの回路は、無安定マルチバイブレータ回路とマイナス入力の抵抗接続のみが異なるだけである。従って、この部分のみを解析すればいい。ここで、図9の2つの回路の違いは抵抗 R_1 の接続先にあることに注意しよう。この違いが、遅い状態の平衡点の位置を変化させる。

3.1 単安定マルチバイブレータ回路 (a) の解析

3.1.1 遅い多様体上に安定平衡点を作る

キャパシタ C_1 に関する回路方程式を求めよう。

$$C_1 \frac{dv}{dt} = \frac{E - v}{R_1} + \frac{v_0 - v}{R_2}$$

より、遅い状態 v の微分方程式は次式となる。

$$C_1 \frac{dv}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v = \frac{E}{R_1} + \frac{v_0}{R_2} \quad (13)$$

もちろん、速い運動に関する回路方程式は式 (6) と同じとなる。従って、この回路の状態方程式は

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v &= \frac{E}{R_1} + \frac{v_0}{R_2} \\ \mu \frac{dv_0}{dt} + v_0 &= a(pv_0 + qE - v) \end{aligned} \quad (14)$$

となる。

今、仮に変数 v_0 を固定してパラメータとしてみたとき、この方程式の平衡点 v^* がどうなるか見てみよう。

- $v_0 = E$ のとき、平衡点は $v^* = E$ となる。これは無安定マルチバイブレータの場合と同じである。
- $v_0 = 0$ のとき、平衡点は $v^* = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$ となる。この点は無安定マルチバイブレータの場合と異なる。

そこで、条件：

$$q = \frac{\frac{1}{R_5}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} < \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (15)$$

を満たすように抵抗値を選ぶことにしよう。すると平衡点 $v^* = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$ はアトラクタとなる。これで単安定マルチバイブレータの機能が作られた。図 10(a) の相平面図とトリガー入力により平衡点をずらしたときの波形図 (b) を参照。なお、トリガー入力とは、平衡点 v^* にいるアナログ状態を適当な位置に動かし、状態を不安定にする信号のことである。この入力としては、回路の適当な接続点に電圧を加える、使用されている抵抗の値を一瞬変化させるなどの方法が考えられる。

たとえば、抵抗 R_2 に並列に抵抗 r_2 を挿入し合成抵抗値 R_2 を小さくし、平衡点の位置 v^* を qE より小さくすると、平衡点は一瞬なくなり、速い運動が引き起こされる。すなわち、図 10(a) の点 a から b, b から c への遅い運動, c から d への速い運動, そして元の平衡点 v^* への遅い運動が生成できる*4。

3.1.2 回路の応答

前小節の終わりで簡単に説明してしまったが、一応思いつく事柄を列挙しておこう。

1. この回路にはアトラクタは平衡点 $(v, v_0) = (v^*, 0)$ しかない。つまり、任意の初期値から出発した運動は最終的にはこの平衡点に収束する。言い換えると、この平衡点は大域的に漸近安定である。
2. 安定平衡点は、接線分岐点 $(v, v_0) = (qE, 0)$ の近くに位置している。平衡点の位置を変化させ、分岐点より小さくすることで平衡点を消滅させると、運動は slow-fast 系の運動に入る。すなわち、図 10(a) の点 a,b,c,d を一巡する運動に入る。この大きな遅い運動を一度だけ発

*4 抵抗 R_2 を小さくする時間は、運動が一巡する時間に比べて十分小さいと仮定した。

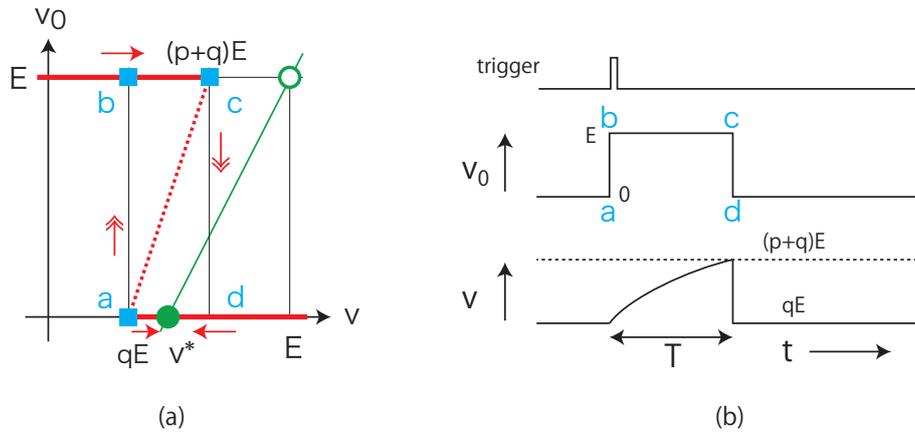


図 10 相平面図 (a) と波形 (b).

生ずる現象をスパイク振動 (spiking) を起こすと呼ぶことにする. この運動のあることが単安定マルチバイブレータと呼ばれる所以と思われる.

3. 平衡点を消滅させ続けると, 回路は無安定マルチバイブレータとして動作する. すなわち, スパイクが連続して発生する.
4. 単安定マルチバイブレータが作り出す上述のようなベクトル場は, 脳科学の分野では興奮性の場 (excitable vector field) と呼ばれているようだ, E. M. Izhikevich [3].

3.1.3 応答の制御

平衡点や分岐点の位置をずらしてスパイク振動を制御する問題が考えられる. 光センサーで抵抗の値を変え, 無安定, 単安定の間を行き来する LED ホタルを作ってみよう.

回路の一例を図 11 に示した. このホタルは, 明るい環境では単安定マルチバイブレータとして働き, 暗い環境では無安定マルチバイブレータとして働く. 図 12 の相平面図参照. このホタルの暗い環境での同期問題は興味ある未知の問題と考えられる.

3.2 単安定マルチバイブレータ回路 (b) の解析

この回路についてもまず, キャパシタ C_1 に関する回路方程式を求めよう.

$$C_1 \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R_1} = \frac{v_0 - v}{R_2}$$

より, 遅い状態 v の微分方程式は次式となる.

$$C_1 \frac{dv}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v = \frac{v_0}{R_2} \quad (16)$$

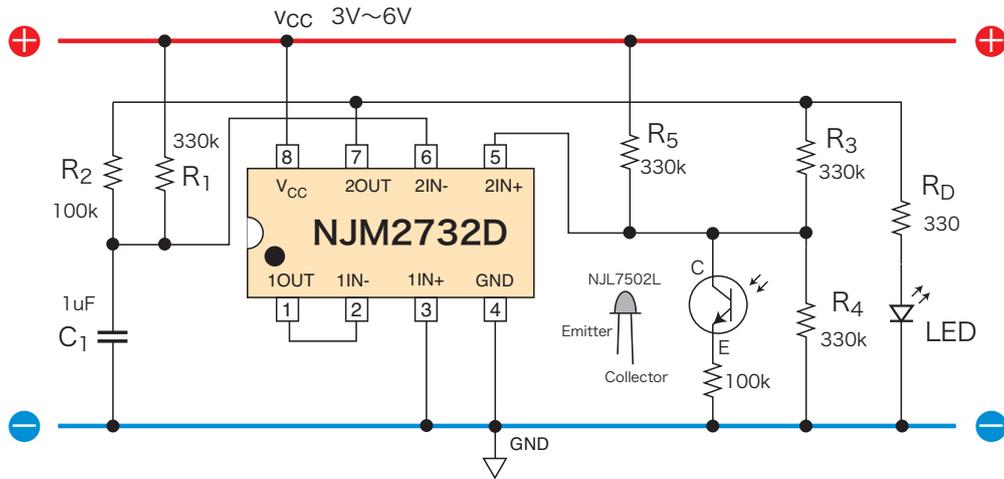


図 11 興奮性の LED ホタル.

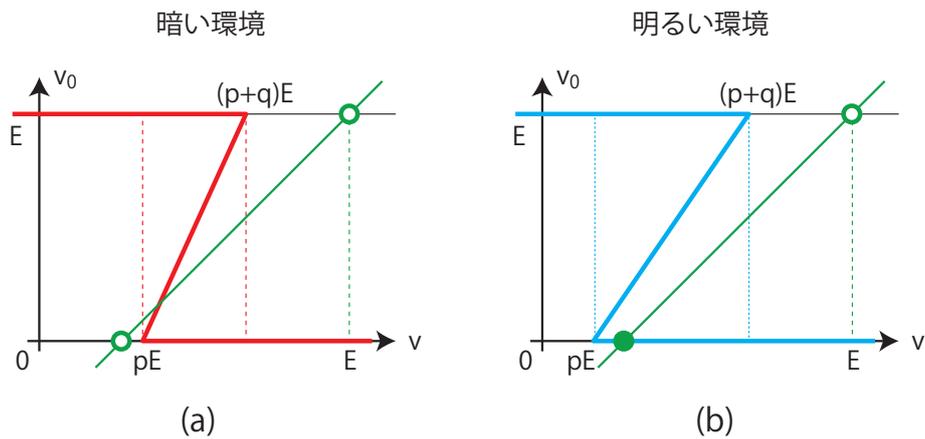


図 12 興奮性の LED ホタルの相平面図.

速い運動に関する回路方程式は式 (6) と同じなので、この回路の状態方程式は

$$\begin{aligned}
 C_1 \frac{dv}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v &= \frac{v_0}{R_2} \\
 \mu \frac{dv_0}{dt} + v_0 &= a(pv_0 + qE - v)
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

となる。そこで

$$v^* = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E, \quad v_0 = E
 \tag{18}$$

が平衡点の候補となる。条件

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} < p + q = \frac{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}}
 \tag{19}$$

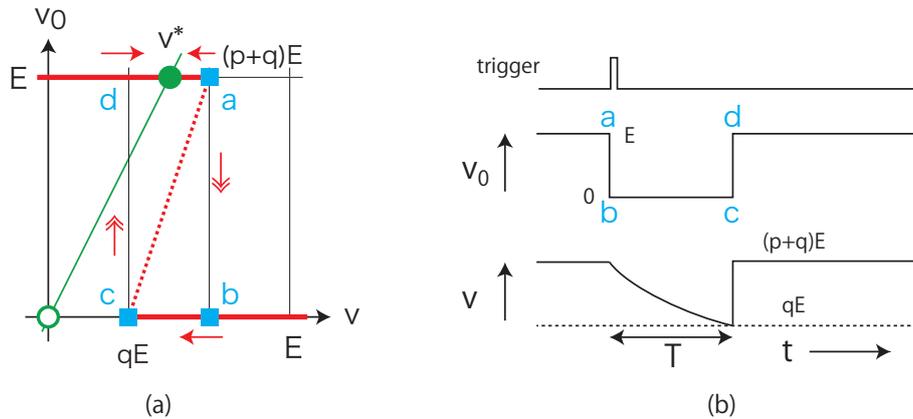


図 13 相平面図 (a) と波形 (b).

を満たすように抵抗値を定めると、この平衡点は安定となる。図 13 参照。

これら 2つの回路の違いは、遅い多様体のどこに安定平衡点を配置するかの違いと言える。図 9(a) の回路では $v_0 = 0$ の状態、すなわちモード 0 で安定に留まるように、また図 (b) の回路ではモード 1 で安定に留まるように設計されている。このノートでは前者の回路をデジタル・ハイの状態が安定 (stable high) な回路、後者の回路をデジタル・ロウの状態が安定 (stable low) な回路と呼ぶことにしよう。

4 双安定マルチバイブレータの解析

最後に、図 14(a) の双安定マルチバイブレータを簡単に見ておこう。このノートの流れとしては、図 9 の 2つの単安定マルチバイブレータを合わせた回路を作れば良い。すなわち、2つの遅い運動をする線分上に 1 つずつ安定平衡点を作ればよい。実際、図 14(a) の回路はそうになっている。図 14(b) 参照。

4.1 遅い運動の回路方程式

オペアンプの - 入力端子での流入電流に関する Kirchhoff の法則から次式を得る。

$$C_1 \frac{dv}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{R_2} \right) v = \frac{E}{R_1} + \frac{v_0}{R_2} \quad (20)$$

この方程式の平衡点は、

- $v_0 = 0$ の時、

$$v^* = \frac{\frac{1}{r_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{R_2}} E \quad (21)$$

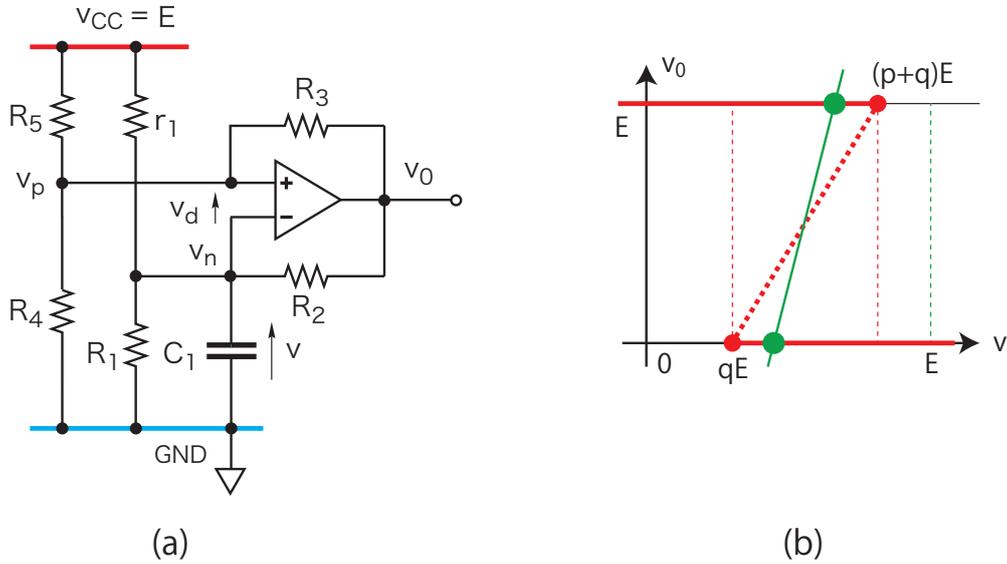


図 14 双安定マルチバイブレータ回路.

- $v_0 = E$ の時,

$$v^* = \frac{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{R_2}} E \quad (22)$$

となる. したがって, 次の条件が成り立つように抵抗の値を定めると, この回路は 2 つの安定平衡点を持つ. 図 14(b) 参照.

$$\frac{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{R_2}} < p + q, \quad p < \frac{\frac{1}{r_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (23)$$

具体的な例として, $R_3 = R_4 = R_5 = 330k$, $R_1 = r_1 = 100k$, $R_2 = 1M$ と選ぶと条件を満足する.

なお, 抵抗 R_2 を開放除去すると 2 つの安定平衡点の座標が同じ値:

$$v^* = \frac{\frac{1}{r_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{r_1}} E = \frac{R_1}{R_1 + r_1} E \quad (24)$$

となる. したがってこの場合は双安定となる条件が少し簡単になる.

$$p < \frac{R_1}{R_1 + r_1} < p + q \quad (25)$$

4.2 トリガー入力回路

安定平衡点に落ち着いた状態を動かせるためには, オペアンプの入力電圧 v_p または v_n を短い時間変化させるとよい. 図 15(a)(b) の回路はその 1 例を示している.

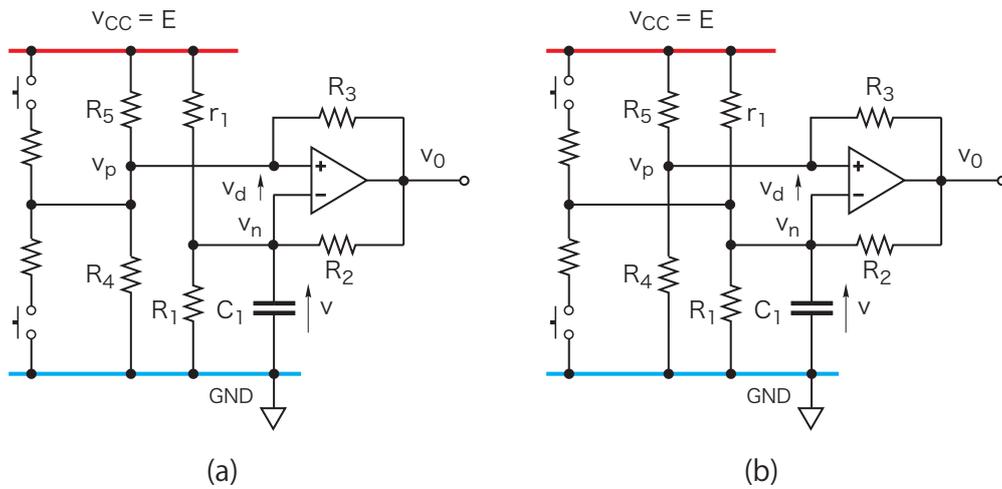


図 15 双安定マルチバイブレータのためのトリガー回路.

5 むすび

オペアンプ・マルチバイブレータの3タイプについて概観した。ここではオペアンプを1個用いた回路を考えたが、2個以上用いた回路も数多く知られている。これらをまとめて分類し、全体像をつかむ作業は面白そうであるが、ここでは1個で実現したマルチバイブレータについて復習しておく。

5.1 マルチバイブレータの回路図

このノートで取り上げた回路は、図 16(a), (b1), (b2), (c) の回路である。また、これらの相平面図は、図 17(a), (b1), (b2), (c) となる。これらの回路に共通した性質としては次の諸点が考えられる。

1. ヒステリシス特性は同じである。これは正の入力端子電圧 v_p へのフィードバック効果が同じであることに起因している。このことから早い運動のベクトル場は同じとなる。その null cline である遅い運動が乗る「遅い多様体」は、モード0とモード1で表された2つの安定な線分に分かれている。
2. 負の入力端子電圧 v_n へのフィードバック効果がどうなるかでタイプの異なるマルチバイブレータを設計できる。すなわち、遅い運動をどう設計するかで幾つかのマルチバイブレータに分かれる。具体的には、2つの安定な遅い多様体の上の運動がどうなるかで決まる。
3. 2つの遅い多様体、モード0とモード1、のいずれにも平衡点がないベクトル場を定義した時、回路は無安定マルチバイブレータと呼ばれる。アトラクタは弛張振動となる。図 16(a) の回路を参照。

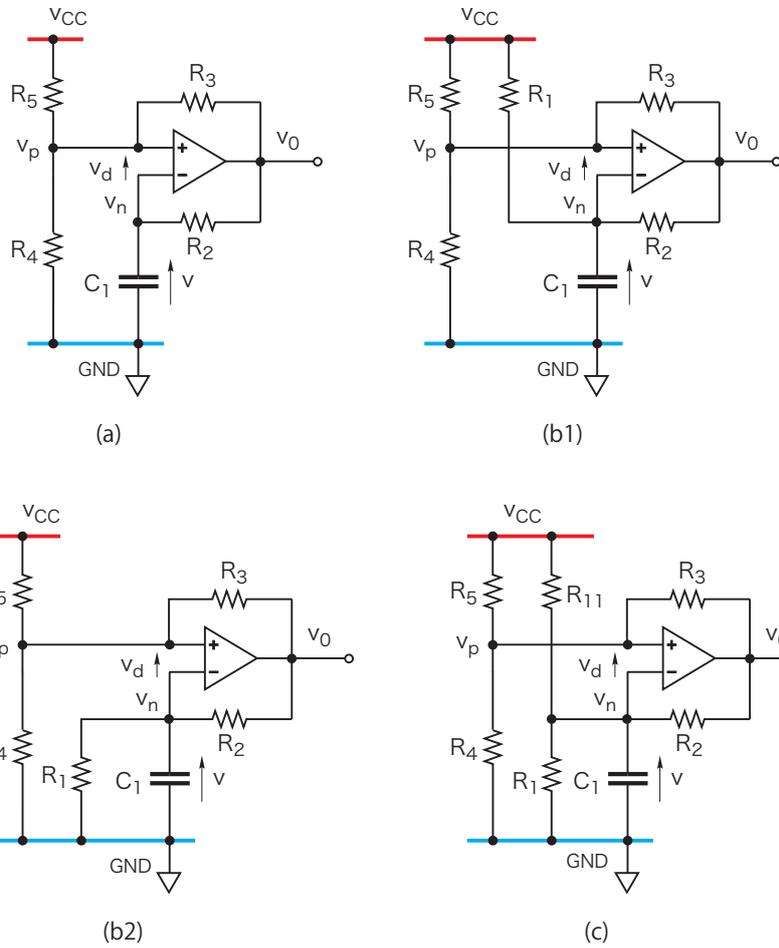


図 16 オペアンプ・マルチバイブレータ回路. (a) 無安定回路, (b1, b2) 単安定回路, (c) 双安定回路.

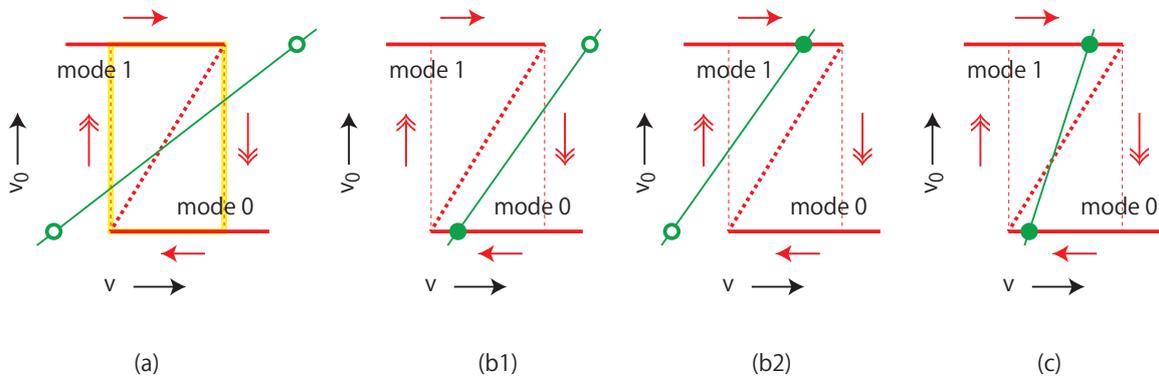


図 17 マルチバイブレータの相平面図. (a) 無安定回路, (b1, b2) 単安定回路, (c) 双安定回路.

4. 2つの遅い多様体のいずれかに1つの平衡点を定義した時、回路は単安定マルチバイブレータと呼ばれる。トリガー入力により一度スパイク振動をする。図 16(b1, b2) の回路を参照。
5. 2つの遅い多様体の両方に1つずつ平衡点を定義した時、回路は双安定マルチバイブレータと呼ばれる。図 16(c) の回路を参照。双安定回路はラッチ、フリップフロップなどとも呼ばれデジタル回路では記憶素子として基本的である。このことからであろう、ここで挙げた回路などは紹介された例を見たことがない。

5.2 マルチバイブレータに関連する幾つかの問題

最後に、興味深い今後の問題についてであるが、これも色々と考えられる。

1. マルチバイブレータの解析という点からは、オペアンプを2個以上使った、言わば結合マルチバイブレータの解析法を開発する問題が考えられる。オペアンプを2個使った対称性を持つ回路は、真空管やトランジスタを用いた回路からの類推で作ることができる、A.A. Andronov et al. [4]. これらを解析しながら一般的な解析法を見出せるかどうかポイントであろう。
2. 遅い運動が乗る多様体の次元が高くなると力学系の問題として興味が出てくる。実際、このノートで扱った線分上の単純な流れの場合は、ほとんど自明の流れであり、どんなアプローチでも解析できたであろう。貼り合わせ多様体の次元があがり、相空間に複数個のアトラクタがある系について解析されることを期待したい。
3. slow-fast 力学系を分岐問題に適用して、つまり分岐パラメータに動きを定義して新しい slow-fast 系を作り、アトラクタの生成や分岐問題を解くことを試みることは有益かもしれない。3.1.3 で述べた「興奮性の LED ホタル」は、この試みの回路への応用とも考えられる。これも、もう少し複雑な運動になるとおもしろくなるであろう。
4. slow-fast 系の数値計算については、昔から stiff 系の積分問題として知られている。これは、ハイブリッド系としてモデル化し、速い運動はモードの遷移と割り切り、遅い運動のみ求積する方法が実用的と思われる。このことについても今後の研究が期待される。

参考文献

- [1] 北野正雄：電子回路の基礎，倍風館，2000 年。
この本は電子回路の本としては特異な部類に入る本のように思える。我々から見ると力学系と電子回路とのちょうど真ん中に位置する立場で書かれた本のように思えて大変有益である。第 10 章発振回路は，ぜひ目を通しておくとよい。
- [2] Texas Instruments Application Report SLOA013A: Effect of parasitic capacitance in Op Amp circuits, 2000.
線形特性の部分だけを使うとすると，動特性＝周波数特性なので周波数特性だけを議論するのが常道なのですが，飽和特性も込めてどう取り扱えばいいのか。考えさせてください。
- [3] E. M. Izhikevich：Dynamical Systems in Neuroscience—The Geometry of Excitability and Bursting —, MIT Press, 2007.
Excitable の意味を教えてくださいそうな興味深い本である。
- [4] A.A. Andropov, A.A. Pitt and S.E. Khaikin: Theory of Oscillators, Pergamon Press, 1966.
最後の第 10 章で，slow-fast 系の丁寧な説明がなされている。