

軟らかい特性を持つ Duffing 方程式の周期解とその分岐

— 幾つかの考え方に関するメモ —

川上 博

E-mail: h.kawakami@384.jp

2017.10.29

目次

1	軟らかい特性を持つ Duffing 方程式	2
1.1	問題の記述	2
1.2	外力のない方程式の平衡点	2
1.3	式 (2) の近似周期解	3
2	平均化方程式 (11) の解析	4
2.1	式 (11) の平衡点	4
2.2	$B = 0$ の場合の平衡点	5
2.3	$B \neq 0$ の場合の平衡点	5
2.4	平均化方程式 (11) の一般的性質	6
2.5	平衡点の安定性解析	7
3	調和平衡法と拡張 Hill 型方程式を用いた安定判別	10
3.1	調和平衡法	10
3.2	拡張 Hill 型変分方程式の解の概要	12
3.3	式 (56) の解の安定性	14
3.4	式 (58) の解の安定性	16
3.5	近似周期解の安定性	17
4	まとめ	19
4.1	考察した方程式とその近似周期解	19
4.2	近似解の性質	20

付録 A 三角関数の公式	22
A.1 三角関数の公式	22
付録 B Harmonic balance 法による近似周期解の安定性を調べる手順	22
B.1 変分方程式と拡張 Hill 型方程式での安定性判定	23
B.2 拡張 Hill 型方程式 (96) の安定性判定	23
B.3 変分方程式 (93) の安定性判定	24
B.4 拡張 Hill 型方程式 (96) の係数が満たす条件： (θ_0, θ_n) -平面の曲線	25

1 軟らかい特性を持つ Duffing 方程式

1.1 問題の記述

非線形微分方程式：

$$\frac{d^2v}{dt^2} + k \frac{dv}{dt} + c_1v + c_3v^3 = B_0 + B \cos \nu t \quad (1)$$

は,

- $c_1 > 0, c_3 > 0$ の仮定がある時, 硬い特性を持つ Duffing 方程式
- $c_1 > 0, c_3 < 0$ の仮定がある時, 軟らかい特性を持つ Duffing 方程式

と呼ばれている.

さて, このノートでは問題を鮮明にするため, 次式で与えられる Duffing 方程式の周期解について考える.

$$\frac{d^2v}{dt^2} + k \frac{dv}{dt} + c_1v - c_3v^3 = B \cos \nu t \quad (2)$$

ここに, $c_1 > 0, c_3 > 0$ と仮定する. 式 (2) では, 式 (1) と比較して, 係数 c_3 を正数とするため 3 次特性の符号を $-$ にした. また, B_0 を省略したのは, 周期解の近似を考えるときに, $B_0 = 0$ の場合でも定数を含む周期解を仮定することのあることを強調するため故意に式中から B_0 を無くしてある.

以下, このノートでは式 (2) が持つ周期解とその分岐について考えたい. そのため, 具体的には

- 周期 $2\pi/\nu$ を持つ周期解の近似解を構成し, その分岐現象を解析すること
- 位相幾何学的手法と数値計算により方程式が持つ大域的性質を解明すること (未検討)

などを検討したい.

1.2 外力のない方程式の平衡点

さて, 式 (2) において $B = 0$ の場合, すなわち外力がない場合:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + k \frac{dv}{dt} + c_1v - c_3v^3 = 0 \quad (3)$$

の平衡点を見ておこう。この方程式の平衡点 v_0 は

$$c_1 v_0 - c_3 v_0^3 = 0 \quad (4)$$

より,

$$v_0 = 0, \quad v_0^+ = \sqrt{\frac{c_1}{c_3}}, \quad v_0^- = -\sqrt{\frac{c_1}{c_3}} \quad (5)$$

の3点となる。ついでに、これらの平衡点の安定性についても見ておこう。平衡点 $v(t) = v_0$ からの変分方程式は

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + k \frac{d\xi}{dt} + (c_1 - 3c_3 v_0^2) \xi = 0 \quad (6)$$

なので、次の結果となる。

- $v_0 = 0$ の平衡点は

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + k \frac{d\xi}{dt} + c_1 \xi = 0 \quad (7)$$

より、 $k > 0, c_1 > 0$ である限り漸近安定である。

- $v_0^+ = \sqrt{\frac{c_1}{c_3}}, v_0^- = -\sqrt{\frac{c_1}{c_3}}$ の平衡点は

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + k \frac{d\xi}{dt} - 2c_1 \xi = 0 \quad (8)$$

より、どちらもサドルとなる。

1.3 式 (2) の近似周期解

外力のある方程式 (2) の近似周期解を

$$v(t) = z + x \cos \nu t + y \sin \nu t \quad (9)$$

と仮定し、平均化法を用いて x, y, z を求めることにしよう。定数項 z を加えてあるのは、前小節で見たように式 (3) には3個の平衡点があるからである。

平均化法では式 (9) の係数 x, y, z が νt に比べてゆっくりと変化する場合を想定して、これらが定数となる近似周期解の近傍の解の動きを表す自律系の方程式を導く*¹。

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \dot{z} + (\dot{x} + \nu y) \cos \nu t + (\dot{y} - \nu x) \sin \nu t \\ \ddot{v} &= \ddot{z} + (\ddot{x} + 2\nu \dot{y} - \nu^2 x) \cos \nu t + (\ddot{y} - 2\nu \dot{x} - \nu^2 y) \sin \nu t \end{aligned} \quad (10)$$

*¹ ここでは、時間微分 d/dt を $\dot{}$ を使って表した。今後も適当に両者の表現を使用する。

式 (9) と式 (10) を式 (2) に代入し、定数項、 $\cos \nu t$, $\sin \nu t$ のそれぞれの係数を右辺と左辺比較すると次式を得る。ただし

$$\ddot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, k\dot{x}, k\dot{y}$$

は、いずれも小さい値となることを想定して省略した*2。

$$\begin{aligned} \text{定数項の係数} &: \dot{z} = -\frac{A_0}{k}z \\ \sin \nu t \text{ の係数} &: \dot{x} = \frac{1}{2\nu}(-k\nu x + Ay) \\ \cos \nu t \text{ の係数} &: \dot{y} = \frac{1}{2\nu}(-Ax - k\nu y + B) \end{aligned} \quad (11)$$

ここに

$$\begin{aligned} A_0 &= c_1 - c_3(z^2 + \frac{3}{2}r^2) \\ A &= c_1 - \nu^2 - 3c_3(z^2 + \frac{1}{4}r^2) \end{aligned} \quad (12)$$

と置いた。

以上のことから、式 (9) の周期解を解析するには式 (11) で表される自律系を解析すればよいことが分かった*3。

2 平均化方程式 (11) の解析

2.1 式 (11) の平衡点

式 (11) の平衡点は次式を満足する。

$$\begin{aligned} A_0 z &= 0 \\ -k\nu x + Ay &= 0 \\ -Ax - k\nu y + B &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

ここに、 A_0, A は式 (12) で定義した：

$$A_0 = c_1 - c_3(z^2 + \frac{3}{2}r^2), \quad A = c_1 - \nu^2 - 3c_3(z^2 + \frac{1}{4}r^2)$$

*2 $k\dot{z}$ も小さくなることを想定して省略すると得られる方程式は、微分・代数方程式となる。ここでは残して3階の微分方程式としておいた。なお、平均化の方法はいくつかの流儀のようなものがある。このノートを書き終わった時点で気づいたが、ここでの方法で得た結果の式は、後の調和平衡法のそれと比べると式の順番や符号が一致していない。これを合わせるようにすればいいのだが、今回はそのままにした。

*3 調和平衡法と同じ程度の近似での解析ということですが...

式 (13) の第 2 式と第 3 式より

$$[A^2 + (k\nu)^2] r^2 = B^2 \quad (14)$$

を得る。したがって式 (13) の平衡点は

$$\begin{aligned} A_0 z &= 0 \\ [A^2 + (k\nu)^2] r^2 &= B^2 \end{aligned} \quad (15)$$

より求めることができる。

2.2 $B = 0$ の場合の平衡点

外力のない場合 ($B = 0$ の場合) の平衡点を求めよう。この場合、式 (15) の第 2 式より $r = 0$ を得るので式 (15) の第 1 式は次式となる。

$$A_0 z = (c_1 - c_3 z^2) z = 0 \quad (16)$$

したがって、この場合の平衡点 $z = z_0$ は、次の 3 点である：

$$z_0 = 0, \quad z_0^+ = \sqrt{\frac{c_1}{c_3}}, \quad z_0^- = -\sqrt{\frac{c_1}{c_3}} \quad (17)$$

これらの平衡点は式 (5) の平衡点と一致している。また、安定性については式 (11) の第 1 式より、 z 軸は解の流れに対して不変であり、 $z_0 = 0$ は安定、 $z_0^+ = \sqrt{\frac{c_1}{c_3}}$ 、 $z_0^- = -\sqrt{\frac{c_1}{c_3}}$ は不安定となる*4。

2.3 $B \neq 0$ の場合の平衡点

2.3.1 $z_0 = 0$ の場合

式 (15) の第 1 式より、この平衡点 $z_0 = 0$ は常に存在する。この場合、周期解 (9) は次式となる。

$$v(t) = x \cos \nu t + y \sin \nu t \quad (18)$$

そこで式 (15) の第 2 式：

$$\left[\left(c_1 - \nu^2 - \frac{3}{4} c_3 r_0^2 \right)^2 + (k\nu)^2 \right] r_0^2 = B^2 \quad (19)$$

を満たす r_0^2 を求め、式 (13) の第 2 式と第 3 式より x_0 、 y_0 を計算すれば平衡点を決定できる。すなわち、

$$x_0 = \frac{AB}{A^2 + (k\nu)^2}, \quad y_0 = \frac{k\nu B}{A^2 + (k\nu)^2} \quad (20)$$

*4 これは z 軸上だけの話であり、 x, y 方向に関する安定性は別に検討する必要がある。

あるいは

$$x_0^2 = \frac{r_0^2}{1 + \left(\frac{k\nu}{A}\right)^2}, \quad y_0^2 = \frac{r_0^2}{1 + \left(\frac{A}{k\nu}\right)^2} \quad (21)$$

を得る.

2.3.2 $z_0 \neq 0$ の場合

同じく, 式 (15) の第 1 式より,

$$A_0 = c_1 - c_3(z_0^2 + \frac{3}{2}r_0^2) = 0 \quad (22)$$

したがって, 関係式

$$z_0^2 = \frac{c_1}{c_3} - \frac{3}{2}r_0^2 \quad (23)$$

を得る. これを式 (15) の第 2 式に代入して

$$\left[\left(-2c_1 - \nu^2 + \frac{15}{4}c_3r_0^2 \right)^2 + (k\nu)^2 \right] r_0^2 = B^2 \quad (24)$$

となる. これより, z_0, r_0 , すなわち, z_0, x_0, y_0 が求まる.

なお, 式 (23) に注意しよう. z_0 は根号の中が正の時のみ存在できるので, 条件

$$r_0^2 < \frac{2c_1}{3c_3} \quad (25)$$

が満たされるときにのみ平衡点は存在する. $r_0^2 = \frac{2c_1}{3c_3}$ の時は $z^2 = 0$ となるので 3 つの平衡点の z 座標は $z = 0$ で一致し, 1 つの平衡点へと合体する対称性のある分岐を起こす. いわゆる平衡点の分枝*5が起こる. この分岐点では式 (19) と式 (24) は同じとなる:

$$\left[\left(\frac{1}{2}c_1 - \nu^2 \right)^2 + (k\nu)^2 \right] \frac{2c_1}{3c_3} = B^2 \quad (26)$$

2.4 平均化方程式 (11) の一般的性質

思いつくままに平均化方程式 (11) の一般的な性質を列挙しておこう. まず, 方程式を再記しておく:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -\frac{1}{k}A_0z = h(x, y, z) \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{2\nu}(-k\nu x + Ay) = f(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{2\nu}(-Ax - k\nu y + B) = g(x, y, z) \end{aligned} \quad (27)$$

*5 branching, pitchfork bifurcation, flip などと呼ばれることがある.

ここに

$$\begin{aligned} A_0 &= c_1 - c_3(z^2 + \frac{3}{2}r^2) \\ A &= c_1 - \nu^2 - 3c_3(z^2 + \frac{1}{4}r^2) \end{aligned} \tag{28}$$

と置いた。この自律系は3次元空間 R^3 のベクトル場を定義している。平面：

$$P(x, y) = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z = 0\} \tag{29}$$

は、式 (27) の不変集合である。すなわち、この集合 $P(x, y)$ の中に初期値を持つ解は時間が経過しても $P(x, y)$ から離れることはない。また、楕円球面：

$$S(x, y, z) = \{(x, y, z) \in R^3 \mid A_0 = 0\} \tag{30}$$

を定義すると、この集合上では $\dot{z} = 0$ の性質がある。このことから、この楕円球面の外部に初期値を持つ解は時間の経過とともに発散する*⁶。したがって、式 (27) の有界な解の初期値としては S あるいは S の内部の点に限られる。また、 S の内部では $\dot{z} < 0$ なので、解は集合 P に近づくように運動する。更に、集合 P 上では

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = -2k\nu < 0 \tag{31}$$

なのでリミットサイクルは存在しない。

以上のことから、平衡点は集合 $S(x, y, z) \cup P(x, y)$ 上にあり、安定に観察できる解としては集合 $P(x, y)$ 上の平衡点ということになる。

2.5 平衡点の安定性解析

前小節の解析から平衡点は集合 $S(x, y, z) \cup P(x, y)$ 上にあることが分かったので、式 (27) を考える代わりに次の微分・代数方程式を考えることにしよう*⁷。

$$\begin{aligned} A_0 z &= h(x, y, z) = 0 \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{2\nu}(-k\nu x + Ay) = f(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{2\nu}(-Ax - k\nu y + B) = g(x, y, z) \end{aligned} \tag{32}$$

具体的には、2.3 節で取り扱った2つの場合の平衡点の安定性を検討する。簡単に、ここで式 (32) の平衡点の安定性を調べる方法を復習しておこう。以下の話では、平衡点や変分などは全て $h(x, y, z) = 0$ の関係を満たしていると仮定する。

*⁶ 厳密には、 S の外部でかつ P 上にない点を初期値とする解というべきであろう。

*⁷ 式 (27) を使って3次元解析をすべきだが、導出時に見たように z 軸方向への運動 kz は小さいと考え、省略した系で考えてみよう。

今、平衡点 (x_0, y_0, z_0) と変分 $(x_0 + \xi, y_0 + \eta, z_0)$ を与えると、変分方程式は次式となる：

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta = a\xi + b\eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x}\xi + \frac{\partial g}{\partial y}\eta = c\xi + d\eta\end{aligned}\tag{33}$$

ここに、 $a = \frac{\partial f}{\partial x}, b = \frac{\partial f}{\partial y}, c = \frac{\partial g}{\partial x}, d = \frac{\partial g}{\partial y}$ と置いた。そこで、この方程式の特性方程式は

$$\begin{vmatrix} a - \mu & b \\ c & d - \mu \end{vmatrix} = \mu^2 - (a + d)\mu + ad - bc = \mu^2 + a_1\mu + a_2 = 0\tag{34}$$

となる。ここでも、 $a_1 = -(a + d), a_2 = ad - bc$ と置いた。この係数 a_1, a_2 の符号をみることによって安定性を調べることができる：

1. 漸近安定な（不安定次元が 0 である）完全安定平衡点 ${}_0O$ ：条件 $a_1 > 0, a_2 > 0$ の時、
2. 不安定次元が 1 である平衡点（サドル） ${}_1O$ ：条件 $a_2 < 0$ の時、
3. 不安定次元が 2 である完全不安定平衡点 ${}_2O$ ：条件 $a_1 < 0, a_2 > 0$ の時、

となる。なお、式 (31) が成り立つので、完全不安定平衡点は式 (32) には存在しない。

ついでに、平衡点の分岐についても見ておこう。2.3.2 で検討した分岐は、

$${}_0O + 2 \times {}_1O \Leftrightarrow {}_1O\tag{35}$$

と表すことができる。

2.5.1 $z_0 = 0$ の場合：集合 P 上の平衡点の安定性

この場合の方程式は

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{2\nu}(-k\nu x + Ay) = f(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{2\nu}(-Ax - k\nu y + B) = g(x, y, z)\end{aligned}\tag{36}$$

ここに

$$A = c_1 - \nu^2 - \frac{3}{4}c_3r^2, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

と置いた。平衡点でのヤコビ行列の要素は次式となる。

$$\begin{aligned}a &= \frac{\partial f}{\partial x} = -k\nu + \frac{\partial A}{\partial x}y_0 = -k\nu - \frac{3}{2}c_3x_0y_0 \\ b &= \frac{\partial f}{\partial y} = A + \frac{\partial A}{\partial y}y_0 = A - \frac{3}{2}c_3y_0^2 \\ c &= \frac{\partial g}{\partial x} = -A - \frac{\partial A}{\partial x}x_0 = -A + \frac{3}{2}c_3x_0^2 \\ d &= \frac{\partial g}{\partial y} = -k\nu - \frac{\partial A}{\partial y}x_0 = -k\nu + \frac{3}{2}c_3x_0y_0\end{aligned}\tag{37}$$

そこで, $a_1 = -(a + d), a_2 = ad - bc$ を計算すると次式を得る.

$$\begin{aligned} a_1 &= -(a + d) = 2k\nu \\ a_2 &= ad - bc = A^2 + (k\nu)^2 - \frac{3}{2}c_3Ar_0^2 \end{aligned} \quad (38)$$

他方, 式 (37) の応答曲線は

$$[A^2 + (k\nu)^2] r_0^2 = B^2 \quad (39)$$

で与えられるので, これを微分して次式を得る.

$$\frac{dB^2}{dr^2} = A^2 + (k\nu)^2 - \frac{3}{2}c_3Ar_0^2 = a_2 \quad (40)$$

したがって, 次の結果を得る.

1. a_1 は式 (38) の第 1 式よりいつも正となる. そこで, $a_2 > 0$ なら完全安定, $a_2 < 0$ ならサドルとなる.
2. 式 (40) より $\frac{dB^2}{dr^2} = a_2$ が成り立つ. すなわち, 応答特性が ν を固定して (B, r) 平面の特性で見ると $\frac{dB^2}{dr^2} > 0$ の部分で完全安定, $\frac{dB^2}{dr^2} < 0$ でサドルとなる.

2.5.2 $z_0 \neq 0$ の場合: 集合 P 上の平衡点の安定性

この場合は, 前小節の A を

$$A = -2c_1 - \nu^2 + \frac{15}{4}c_3r_0^2 \quad (41)$$

に変更するだけである. したがって, 平衡点でのヤコビ行列の要素は次式となる*⁸.

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial f}{\partial x} = -k\nu + \frac{\partial A}{\partial x}y_0 = -k\nu + \frac{15}{2}c_3x_0y_0 \\ b &= \frac{\partial f}{\partial y} = A + \frac{\partial A}{\partial y}y_0 = A + \frac{15}{2}c_3y_0^2 \\ c &= \frac{\partial g}{\partial x} = -A - \frac{\partial A}{\partial x}x_0 = -A - \frac{15}{2}c_3x_0^2 \\ d &= \frac{\partial g}{\partial y} = -k\nu - \frac{\partial A}{\partial y}x_0 = -k\nu - \frac{15}{2}c_3x_0y_0 \end{aligned} \quad (42)$$

そこで

$$\begin{aligned} a_1 &= -(a + d) = 2k\nu \\ a_2 &= ad - bc = A^2 + (k\nu)^2 + \frac{15}{2}c_3Ar_0^2 \end{aligned} \quad (43)$$

*⁸ この計算ではうっかり係数 $1/2\nu$ を掛けるのを忘れていた. 全体に掛かるので結果は正しい.

となる.

他方, 応答曲線 (39) に対する $\frac{dB^2}{dr^2}$ は次式となる.

$$\frac{dB^2}{dr^2} = A^2 + (k\nu)^2 + \frac{15}{2}c_3Ar_0^2 = a_2 \quad (44)$$

したがって, $\frac{dB^2}{dr^2} > 0$ を得る. この結果, 平衡点は (x, y) -平面方向には完全安定となる. ただし, z -軸方向には不安定なので 3次元空間では不安定となる.

3 調和平衡法と拡張 Hill 型方程式を用いた安定判別

3.1 調和平衡法

以下, 簡単に調和平衡法と Hill 型方程式を用いた安定判別を用いて周期解を計算してみよう. 考察する方程式は式 (2) とする. この方程式の近似周期解として

$$v(t) = z + x \cos \nu t + y \sin \nu t \quad (45)$$

を仮定し, これを式 (2) に代入し, 定数項, $\cos \nu t$, $\sin \nu t$ の係数を取り出すと次式を得る.

$$\text{定数項の係数} : Z(x, y, z) = A_0z = 0$$

$$\cos \nu t \text{ の係数} : X(x, y, z) = Ax + k\nu y - B = 0 \quad (46)$$

$$\sin \nu t \text{ の係数} : Y(x, y, z) = -k\nu x + Ay = 0$$

ここに

$$A_0 = c_1 - c_3(z^2 + \frac{3}{2}r^2) \quad (47)$$

$$A = c_1 - \nu^2 - 3c_3(z^2 + \frac{1}{4}r^2)$$

と置いた. 式 (46) を解いて実根 x_0, y_0, z_0 が求められると, 式 (45) の形をした 1 つの近似周期解

$$v_0(t) = z_0 + x_0 \cos \nu t + y_0 \sin \nu t \quad (48)$$

を得る. 式 (46) の実根を求めるには, 式 (46) から次の応答曲線の式を求め, これを r^2, z について解くとよい.

$$\begin{aligned} A_0z &= 0 \\ (A^2 + (k\nu)^2)r^2 &= B^2 \end{aligned} \quad (49)$$

応答曲線の 1 例を図 1 に示した.

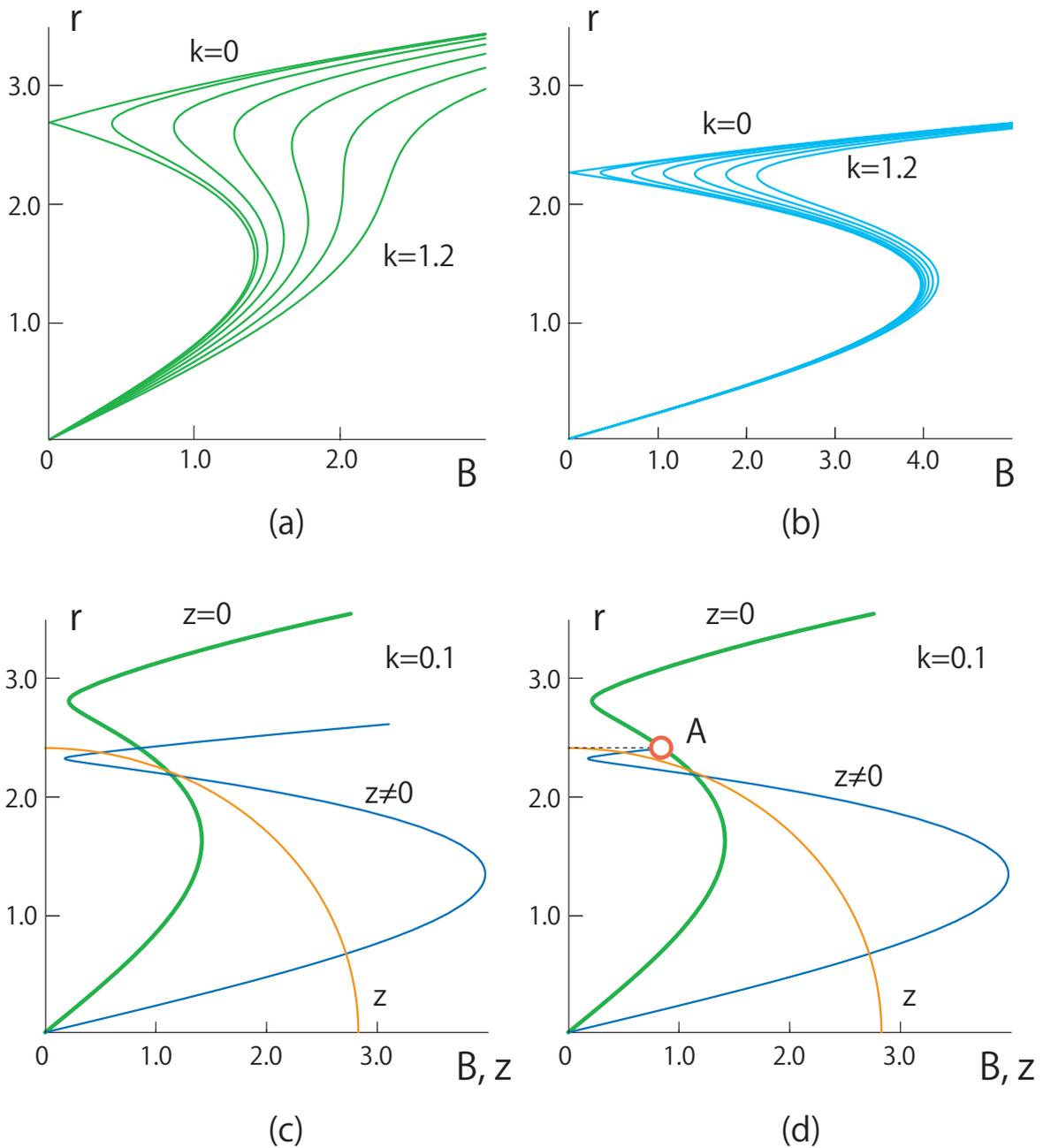


図1 応答曲線の例. パラメータは $c_1 = 2.0$, $c_3 = 1/4$, $\nu = 0.8$. (a) 応答曲線 (50) の例. $k = 0.0$ から $k = 1.2$ まで, 0.2 刻みで k を変化させた. (b) 応答曲線 (52) の例. k の刻みは (a) と同じ. (c) $k = 0.1$ の場合の応答曲線: (a) と (b) を単に重ねて描いた図. (d) $z = 0$ となる応答曲線 (52) の解は点 A で応答曲線 (50) と一致し, それ以上大きな r の値に対して解を持たない. すなわち, 点 A で分岐が起こる.

3.1.1 応答曲線の性質

式 (49) の解は、その第 1 式の性質から次の 2 つの場合に分けて考えると分かりやすい。

1. $z = 0$ を満たす場合：この場合は第 1 式は自動的に満たされるので、第 2 式

$$(A^2 + (k\nu)^2) r^2 = B^2 \quad (50)$$

を解けばよいだけである。ここに、

$$A = c_1 - \nu^2 - \frac{3}{4}c_3r^2$$

となる。この場合は、式 (2) の原点近傍の定数項を持たない周期解を考えていることになる。

他方、応答曲線 (50) に対する $\frac{dB^2}{dr^2}$ は次式となる。式 (40) 参照。

$$\frac{dB^2}{dr^2} = A^2 + (k\nu)^2 - \frac{3}{2}c_3Ar_0^2 \quad (51)$$

この式は後で周期解の安定性を調べるときに利用する。

2. $A_0 = 0$ を満たす場合： $A_0 = 0$ より、 r と z は楕円

$$z^2 + \frac{3}{2}r^2 = \frac{c_1}{c_3}$$

の上にあるので、この関係を第 2 式に代入して

$$(A^2 + (k\nu)^2) r^2 = B^2 \quad (52)$$

を解けばよい。ここに

$$A = -2c_1 - \nu^2 + \frac{15}{4}c_3r^2$$

である。この周期解は式 (2) の外力がゼロの場合の不安定な平衡点 $\pm\sqrt{\frac{c_1}{c_3}}$ の近傍にできた解と

言える。振幅 $r^2 = \frac{2c_1}{3c_3}$ となった時に $z = 0$ の場合に合体する。図 1(d) 参照。

3.2 拡張 Hill 型変分方程式の解の概要

次に、周期解 $v_0(t)$ の安定性を検討しよう。これにはいくつかの方法があると思われるが、ここでは $v_0(t)$ からの変分 $v(t) = v_0(t) + \xi(t)$ を用いて安定性を調べる林先生の方法を使うことにする、文献 [2] Chaps. 2,3 参照。まず変分方程式を導こう。先ほどの式を式 (2) に代入し、 ξ に関する線形項を取り出すと次式となる。

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + k\frac{d\xi}{dt} + (c_1 - 3c_3v_0^2)\xi = 0 \quad (53)$$

更に、この方程式を拡張 Hill 型方程式に変換するため変換：

$$\xi(t) = \exp(-kt/2)\eta(t) \quad (54)$$

を行うと式 (53) は次式となる.

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + (c_1 - \frac{k^2}{4} - 3c_3v_0^2)\eta = 0 \quad (55)$$

この式に式 (48) を代入し、係数の周期関数を整理すると次の拡張 Hill 型方程式を得る*⁹.

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + (\theta_0 + \theta_{1c} \cos \nu t + \theta_{1s} \sin \nu t + \theta_{2c} \cos 2\nu t + \theta_{2s} \sin 2\nu t)\eta = 0 \quad (56)$$

ここに、次式と置いた：

$$\begin{aligned} \theta_0 &= -\frac{k^2}{4} + c_1 - 3c_3 \left(z^2 + \frac{1}{2}r^2 \right) \\ \theta_{1c} &= -6c_3xz, \quad \theta_{1s} = -6c_3yz \\ \theta_1^2 &= \theta_{1c}^2 + \theta_{1s}^2 = (6c_3zr)^2 \\ \theta_{2c} &= -\frac{3}{2}c_3(x^2 - y^2), \quad \theta_{2s} = -3c_3xy \\ \theta_2^2 &= \theta_{2c}^2 + \theta_{2s}^2 = \left(\frac{3}{2}c_3r^2 \right)^2 \end{aligned} \quad (57)$$

また、解 $v_0(t)$ に定数項がない場合：すなわち $z = 0$ となる場合は次式となる.

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + (\theta_0 + \theta_{1c} \cos 2\nu t + \theta_{1s} \sin 2\nu t)\eta = 0 \quad (58)$$

ここに、次式と置いた：

$$\begin{aligned} \theta_0 &= -\frac{k^2}{4} + c_1 - \frac{3}{2}c_3r^2 \\ \theta_{1c} &= -\frac{3}{2}c_3(x^2 - y^2), \quad \theta_{1s} = -3c_3xy, \\ \theta_1^2 &= \theta_{1c}^2 + \theta_{1s}^2, \quad \theta_1 = \pm \frac{3}{2}c_3r^2 \end{aligned} \quad (59)$$

2つの方程式では、係数の周期関数がそれぞれ異なる周期 $2\pi/\nu$ と π/ν を持つことに注意しよう.

式 (56) 解は、概略次の性質を持つ.

1. 線形方程式なので2つの1次独立な解を持つ. それらはいずれも

$$\eta(t) = \exp(\mu t)\phi(t) \quad (60)$$

*⁹ 拡張 Hill 型方程式という名称は、文献 [2] にある extended form of Hill's equation の訳のつもりです.

の形をしている。ここに $\phi(t)$ は周期 $4\pi/\nu$ または $2\pi/\nu$ の周期関数である。この定理は Floquet-Lyapounov の定理と呼ばれている。 μ を特性指数 (characteristic exponent), $m = \exp(2\pi\mu/\nu)$ を特性乗数 (characteristic multiplier) という。

2. そこで μ の値と周期関数 $\phi(t)$ によって次の場合に分かれる。

(a) $\mu^2 = -\omega^2 < 0$ の場合, すなわち $\exp(\mu t) = \exp(\pm i\omega t)$, $i = \sqrt{-1}$ の場合: 解 (60) は一般に 2 重周期関数となり, 有界となるので安定である。

(b) $\mu^2 = 0$ の場合,

- $m = \exp(0) = 1$ の場合: 周期関数 $\phi(t)$ は, 周期 $2\pi/\nu$ を持ち, 解 (60) も同じ周期の周期関数となる。
- $m = \exp(i2\pi/\nu) = -1$ の場合: 周期関数 $\phi(t)$ は, 周期 $4\pi/\nu$ を持ち, 解 (60) も同じ周期の周期関数となる。

(c) $\mu^2 > 0$ の場合, すなわち $m = \exp(2\pi\mu/\nu) > 1$ あるいは $m = \exp(2\pi\mu/\nu) < -1$ の場合: 解は時間の経過とともに発散する。したがって, 解 (60) は不安定となる^{*10}。

式 (58) の解についても周期関数の周期が異なるだけで同様な性質がある。

3.3 式 (56) の解の安定性

次の関数 $\phi_n(t)$ を周期関数の近似関数と考え, 調和平衡法により μ に関する式を導き, 安定性を調べる。

$$\eta_n(t) = \exp(\mu t)\phi_n(t) = \exp(\mu t) \left(a \cos \frac{n}{2}\nu t + b \sin \frac{n}{2}\nu t \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (61)$$

ここに, a, b は任意定数である。この式を式 (56) 代入して, 特性指数 μ^2 を求めると, 解 $\eta_n(t)$ の安定性が吟味できる。

3.3.1 $n = 0$ で $\phi_0(t) = a$ (定数) の場合

最も簡単な例として $n = 0$ で $\phi_0(t) = a$ (定数) の場合を考えてみよう。

$$\eta_0(t) = \exp(\mu t)\phi_0(t) = \exp(\mu t)a \quad (62)$$

を式 (56) に代入し, 整理して定数項を取り出すと

$$(\mu^2 + \theta_0)a \exp(\mu t) = 0 \Leftrightarrow (\mu^2 + \theta_0) = 0 \quad (63)$$

を得る。したがって次の結果となる。

^{*10} 2 階の微分方程式なので μ の値は 2 つあり, それらを μ_1, μ_2 とすれば, 式 (56) 解では, $T = 2\pi/\nu$ とおいて, $\exp(\mu_1 T) \times \exp(\mu_2 T) = 1$ の性質がある。したがって, $\exp(\mu_1 T) > 1$ ならば $0 < \exp(\mu_2 T) = 1/\exp(\mu_1 T) < 1$ となる。原点はサドル型 (我々は D 型と呼んでいる) の不安定となる。 $\exp(\mu_1 T) < -1$ ならば $-1 < \exp(\mu_2 T) = 1/\exp(\mu_1 T) < 0$ となる。原点はこの場合もサドル型 (我々は I 型と呼んでいる) の不安定となる。

1. $\mu^2 < 0$ の場合, すなわち $\theta_0 > 0$ の場合: 解は一般に周期関数となり, 有界となるので $\eta_0(t)$ は安定である.
2. $\mu^2 = 0$ の場合, すなわち $\theta_0 = 0$ の場合: 関数 $\eta_0(t)$ は安定となる^{*11}.
3. $\mu^2 > 0$ の場合, すなわち $\theta_0 < 0$ の場合: 解 $\eta_0(t) = \exp(\mu t)a$ は時間の経過とともに発散する. したがって不安定となる.

3.3.2 $n = 1$ で $\phi_1(t) = a \cos \frac{1}{2}\nu t + b \sin \frac{1}{2}\nu t$ の場合

$$\eta_1(t) = \exp(\mu t)\phi_1(t) = \exp(\mu t) \left(a \cos \frac{1}{2}\nu t + b \sin \frac{1}{2}\nu t \right) \quad (64)$$

を式 (56) に代入し, 整理して $\cos \frac{1}{2}\nu t, \sin \frac{1}{2}\nu t$ の項を抜き出すと

$$\begin{aligned} \left(\mu^2 - \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 + \theta_0 + \frac{1}{2}\theta_{1c} \right) a + \left(2\mu\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{1}{2}\theta_{1s} \right) b &= 0 \\ \left(-2\mu\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{1}{2}\theta_{1s} \right) a + \left(\mu^2 - \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 + \theta_0 - \frac{1}{2}\theta_{1c} \right) b &= 0 \end{aligned} \quad (65)$$

を得る. 任意の定数 a, b に対してこの式がゼロでない解を持つためには次式が成立しなければならない.

$$\begin{vmatrix} \mu^2 - \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 + \theta_0 + \frac{1}{2}\theta_{1c} & 2\mu\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{1}{2}\theta_{1s} \\ -2\mu\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{1}{2}\theta_{1s} & \mu^2 - \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 + \theta_0 - \frac{1}{2}\theta_{1c} \end{vmatrix} = 0 \quad (66)$$

そこでこの式を μ^2 について解くと次式となる.

$$\mu^2 = -\left(\theta_0 + \left(\frac{\nu}{2}\right)^2\right) \pm \sqrt{4\theta_0\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\theta_1^2} \quad (67)$$

したがって次の結果となる.

1. $\mu^2 < 0$ の場合: 解は一般に周期関数となり, 有界となるので $\eta_1(t)$ は安定である.
2. $\mu^2 = 0$ の場合: 関数 $\eta_1(t)$ は安定となる.
3. $\mu^2 > 0$ の場合: 解 $\eta_1(t)$ は時間の経過とともに発散する.

3.3.3 $n = 2$ で $\phi(t) = a \cos \nu t + b \sin \nu t$ の場合

この場合は, 次の小節で扱う $z = 0$ の場合の $n = 1$ とまったく同様なので省略する.

^{*11} この場合, $\eta_0(t)$ は安定であるが, もう一つの一次独立な解が不安定となる場合が多い. したがって, このパラメータでは一般解は不安定となる場合が多いので注意する必要がある.

3.4 式 (58) の解の安定性

同様に、次の関数 $\phi_n(t)$ を周期関数の近似関数と考え、調和平衡法により μ に関する式を導く。

$$\eta_n(t) = \exp(\mu t)\phi_n(t) = \exp(\mu t)(a \cos nvt + b \sin nvt), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (68)$$

ここに、 a, b は任意定数である。この式を式 (58) 代入して、 $\eta_n(t)$ の安定性が吟味できる。

3.4.1 $n = 0$ で $\phi(t) = a$ の場合

式 (56) の $n = 0$ の場合と同様である。

3.4.2 $n = 1$ で $\phi(t) = a \cos vt + b \sin vt$ の場合

$n = 1$ の $\phi_1(t) = a \cos vt + b \sin vt$ (a, b は定数) の場合を考える。

$$\eta_1(t) = \exp(\mu t)\phi_1(t) = \exp(\mu t)(a \cos vt + b \sin vt) \quad (69)$$

を式 (58) に代入し、整理して $\cos vt, \sin vt$ の項を抜き出すと

$$\begin{aligned} \left(\mu^2 - \nu^2 + \theta_0 + \frac{1}{2}\theta_{1c} \right) a + \left(2\mu\nu + \frac{1}{2}\theta_{1s} \right) b &= 0 \\ \left(-2\mu\nu + \frac{1}{2}\theta_{1s} \right) a + \left(\mu^2 - \nu^2 + \theta_0 - \frac{1}{2}\theta_{1c} \right) b &= 0 \end{aligned} \quad (70)$$

を得る。任意の定数 a, b に対してこの式がゼロでない解を持つためには次式が成立しなければならない。

$$\begin{vmatrix} \mu^2 - \nu^2 + \theta_0 + \frac{1}{2}\theta_{1c} & 2\mu\nu + \frac{1}{2}\theta_{1s} \\ -2\mu\nu + \frac{1}{2}\theta_{1s} & \mu^2 - \nu^2 + \theta_0 - \frac{1}{2}\theta_{1c} \end{vmatrix} = 0 \quad (71)$$

そこでこの式を μ^2 について解くと次式となる。

$$\mu^2 = -(\theta_0 + \nu^2) \pm \sqrt{4\theta_0\nu^2 + \frac{1}{4}\theta_1^2} \quad (72)$$

したがって次の結果となる。

1. $\mu^2 < 0$ の場合、すなわち $\left(\theta_0 - \nu^2 + \frac{\theta_1}{2}\right) \left(\theta_0 - \nu^2 - \frac{\theta_1}{2}\right) > 0$ の場合：解は一般に 2 重周期関数となり、有界となるので $\eta_1(t)$ は安定である。
2. $\mu^2 = 0$ の場合、すなわち $\theta_0 - \nu^2 = \pm \frac{\theta_1}{2}$ の場合：関数 $\eta_1(t)$ は安定となる。
3. $\mu^2 > 0$ の場合、すなわち $\left(\theta_0 - \nu^2 + \frac{\theta_1}{2}\right) \left(\theta_0 - \nu^2 - \frac{\theta_1}{2}\right) < 0$ の場合：解 $\eta_1(t)$ は時間の経過とともに発散する。したがって不安定となる。

3.5 近似周期解の安定性

理由も明らかにせず，変分方程式 (53) を式 (54) で拡張 Hill 方程式 (55) に変換し，解析を進めてきた．しかし，元の近似周期解 (48) の安定性を調べるには，変分 $\xi(t)$ の原点の安定性を問題にしなければならぬ．そこで変換式 (54)

$$\xi(t) = \exp(-kt/2)\eta(t)$$

にこれまで解析してきた $\eta(t)$ を代入して

$$\xi(t) = \exp(-kt/2)\eta(t) = \exp(-kt/2) \exp(\mu t)\phi_n(t) \quad (73)$$

の安定性を見ることとなる．このことから，漸近安定となる条件は

$$\text{Real part}(-k/2 \pm \mu) < 0 \quad (74)$$

となる． μ が実数の場合この条件は

$$0 < k \quad \text{and} \quad \mu^2 < \frac{k^2}{4} \quad (75)$$

となる．

3.5.1 $n = 0$ の場合の定数解の安定性

この場合，式 (53) の定数解が漸近安定となる条件は次式となる．

$$\mu^2 = -\theta_0 < \left(\frac{k}{2}\right)^2 \quad (76)$$

3.5.2 $z \neq 0, n = 1$ の場合の周期解 (48) の漸近安定条件

式 (67) より

$$\mu^2 = -\left(\theta_0 + \left(\frac{\nu}{2}\right)^2\right) \pm \sqrt{4\theta_0\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\theta_1^2} < \left(\frac{k}{2}\right)^2 \quad (77)$$

この条件式を整理すると次式を得る．

$$\left(\theta_0 - \left(\frac{\nu}{2}\right)^2\right)^2 + \frac{k^2}{2} \left(\theta_0 + \left(\frac{\nu}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{k}{2}\right)^4 > \frac{1}{4}\theta_1^2 \quad (78)$$

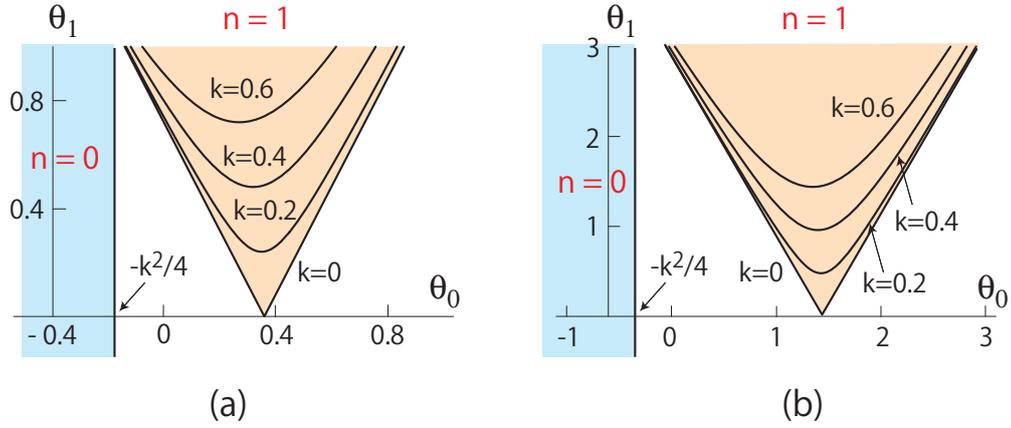


図2 不安定領域の例. パラメータは $c_1 = 2.0$, $c_3 = 1/4$, $\nu = 1.2$. (a) $z \neq 0$, $n = 0, 1$ の不安定領域の例. $k = 0.0$ から $k = 0.6$ まで, 0.2 刻みで k を変化させた. (b) $z = 0$, $n = 0, 1$ の不安定領域の例. 式 (76),(78),(80) の不等号を反転させて不安定領域を求めた.

3.5.3 $z = 0$, $n = 1$ の場合の周期解の安定性

この場合は,

$$v_0(t) = x_0 \cos \nu t + y_0 \sin \nu t$$

安定性を調べる拡張 Hill 方程式は式 (58) である. 特性指数 μ は式 (72) と計算できた. 近似周期解 $v_0(t)$ は, 式 (75) より,

$$\mu^2 = -(\theta_0 + \nu^2) \pm \sqrt{4\theta_0\nu^2 + \frac{1}{4}\theta_1^2} < \left(\frac{k}{2}\right)^2 \quad (79)$$

の時, 安定となる. この式から根号無くすると

$$(\theta_0 - \nu^2)^2 + \frac{k^2}{2} (\theta_0 + \nu^2) + \left(\frac{k}{2}\right)^4 > \frac{1}{4}\theta_1^2 \quad (80)$$

となる. これはまた, 次式と表すことができる.

$$\begin{vmatrix} \theta_0 + \frac{k^2}{4} - \nu^2 + \frac{\theta_{1c}}{2} & \frac{\theta_{1s}}{2} + k\nu \\ \frac{\theta_{1s}}{2} - k\nu & \theta_0 + \frac{k^2}{4} - \nu^2 - \frac{\theta_{1c}}{2} \end{vmatrix} > 0 \quad (81)$$

更に, 式 (46) のヤコビ行列式でも表すことができる.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - \frac{3}{2}c_3x^2 & k\nu - \frac{3}{2}c_3xy \\ -k\nu - \frac{3}{2}c_3xy & A - \frac{3}{2}c_3y^2 \end{vmatrix} > 0 \quad (82)$$

ここに,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial x} &= A - \frac{3}{2}c_3x^2 = \theta_0 + \frac{k^2}{4} - \nu^2 + \frac{\theta_{1c}}{2} \\
\frac{\partial X}{\partial y} &= -\frac{3}{2}c_3xy + k\nu = \frac{\theta_{1s}}{2} + k\nu \\
\frac{\partial Y}{\partial x} &= -\frac{3}{2}c_3xy - k\nu = \frac{\theta_{1s}}{2} - k\nu \\
\frac{\partial Y}{\partial y} &= A - \frac{3}{2}c_3y^2 = \theta_0 + \frac{k^2}{4} - \nu^2 - \frac{\theta_{1c}}{2}
\end{aligned} \tag{83}$$

である. この行列式は, 次の値を持つ:

$$\begin{vmatrix} A - \frac{3}{2}c_3x^2 & k\nu - \frac{3}{2}c_3xy \\ -k\nu - \frac{3}{2}c_3xy & A - \frac{3}{2}c_3y^2 \end{vmatrix} = A^2 - \frac{3}{2}c_3Ar^2 + k^2\nu^2 = \frac{dB^2}{dr^2} \tag{84}$$

この最後の関係は, 応答曲線の式 (49) の微分 (51) である. したがって, 曲線の $\frac{dB^2}{dr^2} > 0$ 部分の解は安定, $\frac{dB^2}{dr^2} < 0$ 部分の解は不安定となる.

4 まとめ

思いつくままに結果をまとめてみよう.

4.1 考察した方程式とその近似周期解

考察した方程式は式 (2) であった. この方程式には, 原点近傍に存在する定数項を持たない対称性のある基本調波周期解と, 定数項を含んだ原点からずれた周期解の 2 種類の解が存在する. これら 3 個の周期解が外力の振幅や周波数の変化に対してどのような分岐を起こすかが問われる問題であった. そこでこれらの近似周期解として

1. 定数項 z を含まない基本調波周期解:

$$v(t) = x \cos \nu t + y \sin \nu t \tag{85}$$

2. 定数項 z を含んだ基本調波周期解:

$$v(t) = z + x \cos \nu t + y \sin \nu t, \quad z \neq 0 \tag{86}$$

を考え, これらを 2 つの近似解法: 平均化法と調和平衡法で解析した. その際, それぞれの周期解の振幅特性を与える式は次式となった.

1. 定数項 z を含まない基本調波周期解の振幅を与える応答曲線：

$$\begin{aligned} F_1(r^2) &= (A_1^2 + (k\nu)^2)r^2 - B^2 \\ A_1 &= c_1 - \nu^2 - \frac{3}{4}c_3r^2 \end{aligned} \quad (87)$$

2. 定数項 z を含んだ基本調波周期解の振幅を与える応答曲線：

$$\begin{aligned} F_2(r^2) &= (A_2^2 + (k\nu)^2)r^2 - B^2 \\ A_2 &= -2c_1 - \nu^2 + \frac{15}{4}c_3r^2 \\ z^2 + \frac{3}{2}r^2 &= \frac{c_1}{c_3} \end{aligned} \quad (88)$$

4.2 近似解の性質

性質1 定数項 z を含んだ基本調波周期解が存在できる範囲は $0 \leq r^2 \leq \frac{2c_1}{3c_3}$ である。この解は2個

存在し、 $r = 0$ の時 $z = \pm \sqrt{\frac{c_1}{c_3}}$ となっている。式 (88) の $F_2(r^2)$ に関する応答曲線がどのようになろうとも $r^2 > \frac{2c_1}{3c_3}$ に F_2 の解は存在しないことに注意しよう。また、この解はいつも不安定である。理由は $0 \leq r^2 \leq \frac{2c_1}{3c_3}$ で $\theta_0 \leq 0$ となるからである。

性質2 式 (87) の $F_1(r^2)$ に関する応答曲線と式 (88) の $F_2(r^2)$ に関する応答曲線は、 $r^2 = \frac{2c_1}{3c_3}$ で交わり、 $r^2 > \frac{2c_1}{3c_3}$ で $F_1(r^2)$ に関する応答曲線は不安定となる。これは $F_1(r^2)$ の解が $r^2 > \frac{2c_1}{3c_3}$ で $\theta_0 \leq 0$ となるからである。

性質3 式 (87) の $r^2 < \frac{2c_1}{3c_3}$ での解の安定性については式 (59) より

$$\theta_0 = -\frac{k^2}{4} + c_1 \pm \theta_1, \quad \theta_1 = \pm \frac{3}{2}c_3r^2 \quad (89)$$

となるので、この直線が (θ_0, θ_1) 平面で不安定領域に入ったパラメータで不安定となる。解の安定性と応答曲線の一例を図3に示した。

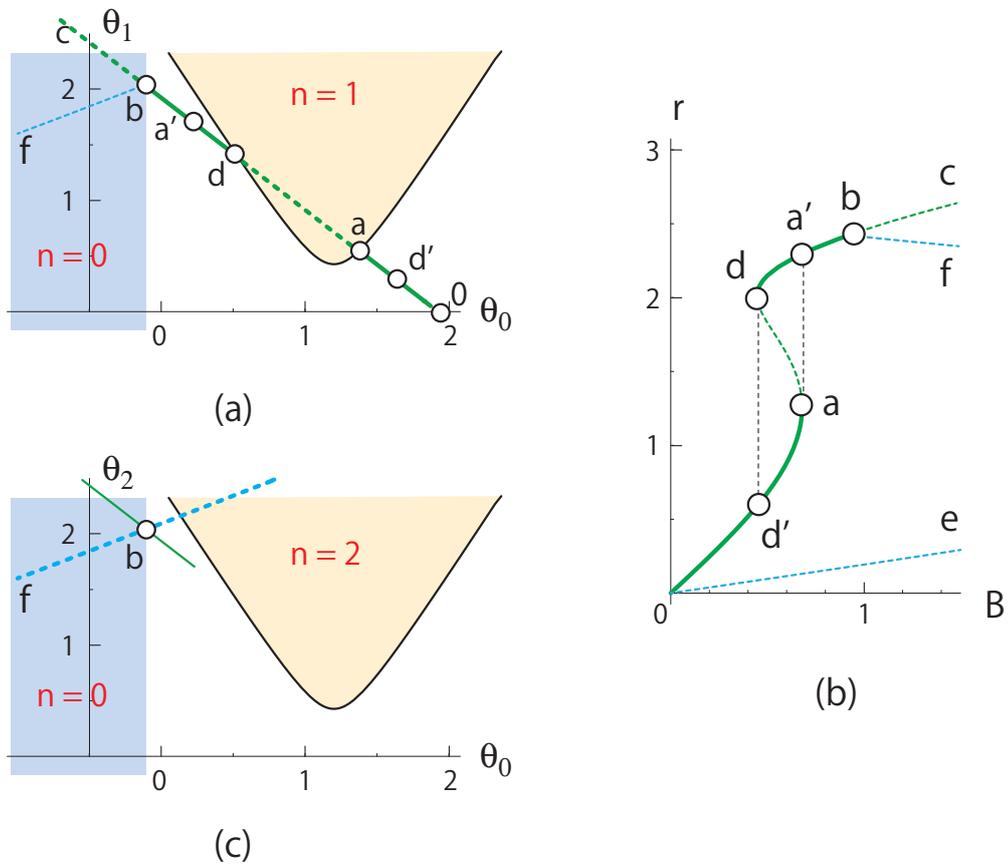


図3 解の安定性を示す図と応答曲線の例. (a) 解 (85) の安定性を調べるために描いた式 (89) の直線と曲線 (80). パラメータは $c_1 = 2.0$, $c_3 = 1/4$, $\nu = 1.1$, $k = 0.2$. (b) 応答の存在範囲と安定性を加えた図. 水色の曲線 $0efb$ は z を含んだ基本調波周期解の振幅曲線で点 b で $z = 0$ の周期解に合体する. この点は周期解の pitchfork 分岐に対応する. F_1 の曲線は $0-a$ と $d-b$ の部分で安定, 点線の部分で不安定である. 点 a と d では接線分岐 (tangent bifurcation, fold) が起こっている. (c) 解 (86) の安定性を調べるために描いた直線と曲線. $n = 0$ と $n = 2$ の不安定領域を示している. この図は図 (a) と同じ図となる.

参考文献

- [1] J. J. Stoker: Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems, Interscience Publishers, 1966.
- [2] Ch. Hayashi: Nonlinear Oscillations in Physical Systems, McGraw-Hill Book Co., 1964.
- [3] 梅田直哉, 牧敦夫: 多項式型の復元力を持つ横揺れ運動方程式の分岐と転覆限界についての考察, ゼミノート, 2017年9月5日

付録 A 三角関数の公式

A.1 三角関数の公式

$$v = x \cos t + y \sin t \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$v^2 = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \cos 2t + xy \sin 2t$$

$$v^3 = \frac{3}{4}r^2 x \cos t + \frac{3}{4}r^2 y \sin t + \frac{1}{4}(x^2 - 3y^2)x \cos 3t + \frac{1}{4}(3x^2 - y^2)y \sin 3t$$

$$v = z + x \cos t + y \sin t \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$v^2 = z^2 + \frac{1}{2}r^2 + 2xz \cos t + 2yz \sin t + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \cos 2t + xy \sin 2t$$

$$v^3 = z \left(z^2 + \frac{3}{2}r^2 \right) + 3x \left(z^2 + \frac{1}{4}r^2 \right) \cos t + 3y \left(z^2 + \frac{1}{4}r^2 \right) \sin t + \frac{3}{2}z(x^2 - y^2) \cos 2t + 3xyz \sin 2t \\ + \frac{1}{4}x(x^2 - 3y^2) \cos 3t + \frac{1}{4}y(3x^2 - y^2) \sin 3t$$

付録 B Harmonic balance 法による近似周期解の安定性を調べる手順

具体的な方程式を与えて、手順を考える。方程式

$$\frac{d^2v}{dt^2} + k \frac{dv}{dt} + c_1 v - c_3 v^3 = B \cos \nu t \quad (90)$$

の近似周期解を

$$v(t) = z + x \cos \nu t + y \sin \nu t \quad (91)$$

とし、Harmonic balance 法で計算し、解

$$v_0(t) = z_0 + x_0 \cos \nu t + y_0 \sin \nu t \quad (92)$$

を得たとする。この解の安定性を調べる手順を考えるのがここでの問題である。この方法は林先生 [2] に断片的にしかし詳しく述べられている。また、拡張 Hill 型方程式の解を二つの角周波数の三角関数を仮定した場合についても計算がなされている。

B.1 変分方程式と拡張 Hill 型方程式での安定性判定

$v_0(t)$ からの変分 $\xi(t)$ に関する変分方程式は

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + k\frac{d\xi}{dt} + (c_1 - 3c_3v_0^2)\xi = 0 \quad (93)$$

となる. $k\frac{d\xi}{dt}$ の項をなくすため変換:

$$\xi(t) = \exp\left(-\frac{k}{2}t\right)\eta(t) \quad (94)$$

を行うと, 次式を得る.

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \left(c_1 - \frac{k^2}{4} - 3c_3v_0^2\right)\eta = 0 \quad (95)$$

この式に式 (92) を代入し, 係数の周期関数を整理すると次の拡張 Hill 型方程式を得る.

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + p(t)\eta = 0 \quad (96)$$

ここに, 次式と置いた:

$$p(t) = c_1 - \frac{k^2}{4} - 3c_3v_0^2 = \theta_0 + \theta_{1c}\cos\nu t + \theta_{1s}\sin\nu t + \theta_{2c}\cos 2\nu t + \theta_{2s}\sin 2\nu t \quad (97)$$

$$\theta_0 = -\frac{k^2}{4} + c_1 - 3c_3\left(z_0^2 + \frac{1}{2}r_0^2\right)$$

$$\theta_{1c} = -6c_3x_0z_0, \quad \theta_{1s} = -6c_3y_0z_0$$

$$\theta_1^2 = \theta_{1c}^2 + \theta_{1s}^2 = (6c_3z_0r_0)^2$$

$$\theta_{2c} = -\frac{3}{2}c_3(x_0^2 - y_0^2), \quad \theta_{2s} = -3c_3x_0y_0$$

$$\theta_2^2 = \theta_{2c}^2 + \theta_{2s}^2 = \left(\frac{3}{2}c_3r_0^2\right)^2$$

$$z_0^2 + \frac{3}{2}r_0^2 = \frac{c_1}{c_3}, \quad r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$$

(98)

B.2 拡張 Hill 型方程式 (96) の安定性判定

式 (96) の解の安定性を調べる問題を考える. 次の関数 $\phi_n(t)$ を周期関数の近似関数と考え, 調和平衡法により μ に関する式を導く.

$$\eta_n(t) = \exp(\mu t)\phi_n(t) = \exp(\mu t)\left(a\cos\frac{n}{2}\nu t + b\sin\frac{n}{2}\nu t\right), \quad n = 0, 1, 2 \quad (99)$$

ここに, a, b は任意定数である. この式を式 (96) 代入して, $\eta_n(t)$ の安定性を調べる.

B.2.1 $n = 0$ で $\phi_0(t) = a$ の場合

$$\mu^2 = -\theta_0 \quad (100)$$

B.2.2 $n = 1$ で $\phi_1(t) = a \cos \frac{1}{2}\nu t + b \sin \frac{1}{2}\nu t$ の場合

$$\mu^2 = -(\theta_0 + (\frac{\nu}{2})^2) \pm \sqrt{4\theta_0(\frac{\nu}{2})^2 + \frac{1}{4}\theta_1^2} \quad (101)$$

B.2.3 $n = 2$ で $\phi_2(t) = a \cos \nu t + b \sin \nu t$ の場合

$$\mu^2 = -(\theta_0 + \nu^2) \pm \sqrt{4\theta_0\nu^2 + \frac{1}{4}\theta_1^2} \quad (102)$$

B.3 変分方程式 (93) の安定性判定

変分 $\xi(t)$ の原点の安定性を問題にしなければならない。そこで変換式 (94)

$$\xi(t) = \exp(-kt/2)\eta(t)$$

にこれまで解析してきた $\eta_n(t)$ を代入して

$$\xi(t) = \exp(-kt/2)\eta(t) = \exp(-kt/2) \exp(\mu t)\phi_n(t) \quad (103)$$

の安定性を見ることとなる。このことから、漸近安定となる条件は

$$\text{Real part}(-k/2 \pm \mu) < 0 \quad (104)$$

となる。 μ が実数の場合この条件は

$$k > 0 \quad \text{and} \quad \frac{k^2}{4} > \mu^2 \quad (105)$$

となる。

B.3.1 $n = 0$ の場合

$$\mu^2 = -\theta_0 < \frac{k^2}{4} \quad (106)$$

B.3.2 $n = 1$ の場合

$$\mu^2 = -\left(\theta_0 + \left(\frac{\nu}{2}\right)^2\right) \pm \sqrt{4\theta_0\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\theta_1^2} < \frac{k^2}{4} \quad (107)$$

すなわち、等価な条件として次式を得る.

$$\left(\theta_0 - \left(\frac{\nu}{2}\right)^2\right)^2 + \frac{k^2}{2} \left(\theta_0 + \left(\frac{\nu}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{k}{2}\right)^4 > \frac{1}{4}\theta_1^2 \quad (108)$$

B.3.3 $n = 2$ の場合

$$\mu^2 = -(\theta_0 + \nu^2) \pm \sqrt{4\theta_0\nu^2 + \frac{1}{4}\theta_2^2} < \frac{k^2}{4} \quad (109)$$

すなわち、等価な条件として次式を得る.

$$(\theta_0 - \nu^2)^2 + \frac{k^2}{2} (\theta_0 + \nu^2) + \left(\frac{k}{2}\right)^4 > \frac{1}{4}\theta_2^2 \quad (110)$$

B.4 拡張 Hill 型方程式 (96) の係数が満たす条件 : (θ_0, θ_n) - 平面の曲線

式 (98) の係数 θ_n , $n = 0, 1, 2$ は, z_0, x_0, y_0 の関数と考えてよい. そこでこれらの式から z_0, x_0, y_0 を消去して (θ_0, θ_n) , $n = 1, 2$ の関係を求めると, (θ_0, θ_n) - 平面の曲線が得られる.

B.4.1 $n = 0$ の場合

$$\theta_0 = -\frac{k^2}{4} - 2c_1 + 3c_3r_0^2 \quad (111)$$

B.4.2 $n = 1$ の場合

$$\theta_1^2 = (6c_3)^2 \left(\frac{c_1}{c_3} - \frac{3}{2}r_0^2\right) r_0^2 = -6 \left(\theta_0 + \frac{k^2}{4}\right) \left(\theta_0 + \frac{k^2}{4} + 2c_1\right) \quad (112)$$

B.4.3 $n = 2$ の場合

$$\theta_0 = -\frac{k^2}{4} - 2c_1 \pm 2\theta_2, \quad \theta_2 = \pm \frac{3}{2}c_3r_0^2 \quad (113)$$

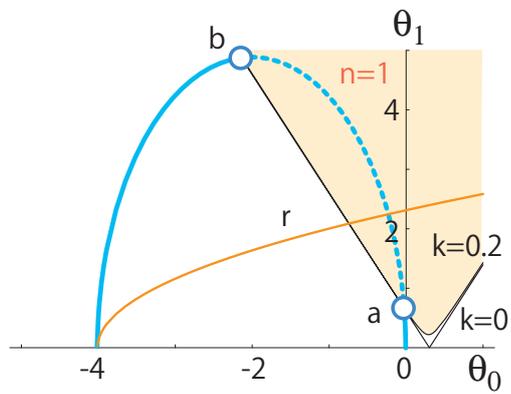


図4 解の安定性を示す図. 式 (108) の領域 (オレンジ色で着色した領域で不安定) と式 (112) の曲線 (水色の曲線, 点線部分が不安定領域の中に入っている). パラメータは $c_1 = 2.0$, $c_3 = 1/4$, $\nu = 1.1$, $k = 0.2$.