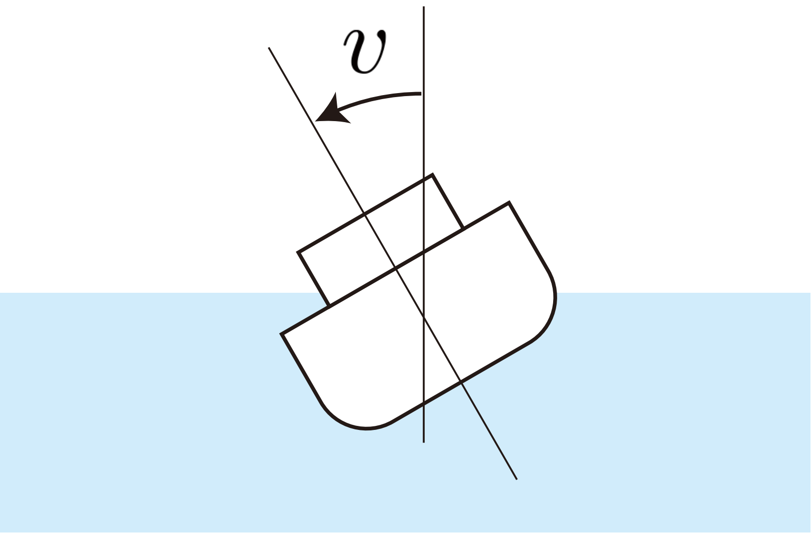
Duffing方程式に再会しました



$$\frac{d^2v}{dt^2} + k\frac{dv}{dt} + c_1 v - c_3 v^3 = B\cos\nu t$$

川上　博，上田哲史，美井野優

2017/12/16

アブストラクト：

　船の横揺れ角に関する簡単な非線形モデルは，軟らかい特性をもつDuffing方程式で表される.

　外力である波の振幅や周波数を大きくしてゆくと安定な周期解はすべて不安定となり，系は船の転覆を意味する状態となる.

　この現象をharmonic balance法とHill型方程式による安定判別法だけで，あるいは平均化法だけで，どこまで説明できるのだろうか.

　我々は，この状況設定に少し戸惑いながらも解析を進めてみた.
そこでみたものをお話しします.

Duffing 方程式

$$\frac{d^2v}{dt^2} + k\frac{dv}{dt} + c_1 v + c_3 v^3 = B\cos\nu t$$

硬い（復元力）特性をもつ方程式：c1>0, c3>0

$$\frac{d^2v}{dt^2} + k\frac{dv}{dt} + v^3 = B\cos\nu t$$

軟らかい（復元力）特性をもつ方程式：c1>0, c3<0

$$\frac{d^2v}{dt^2} + k\frac{dv}{dt} + v - v^3 = B\cos\nu t$$

Duffing 方程式の解析法

解析対象：周期解とその安定性，不変集合の大域的性質

解析方法：周期解とその安定性

① Harmonic balance法と変分方程式の近似解

② 近似周期解に関する平均化法

③ Poincaré写像と数値解析を組み合わせた方法

解の性質の違い：

① 硬い方程式では解は有界領域に留まる

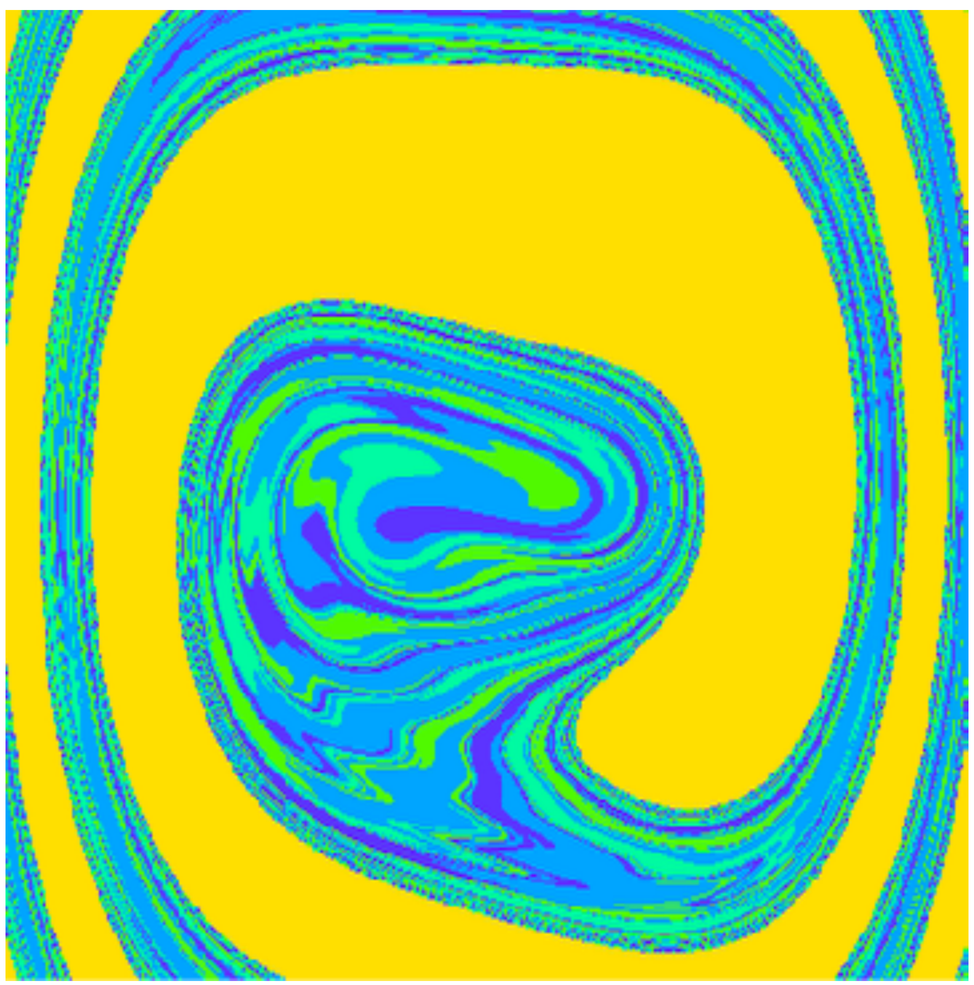
② 軟らかい方程式では有界領域から流れ去る解がある

Domains of Attraction

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 0.05\frac{dv}{dt} + v^3 = 0.1\cos t$$

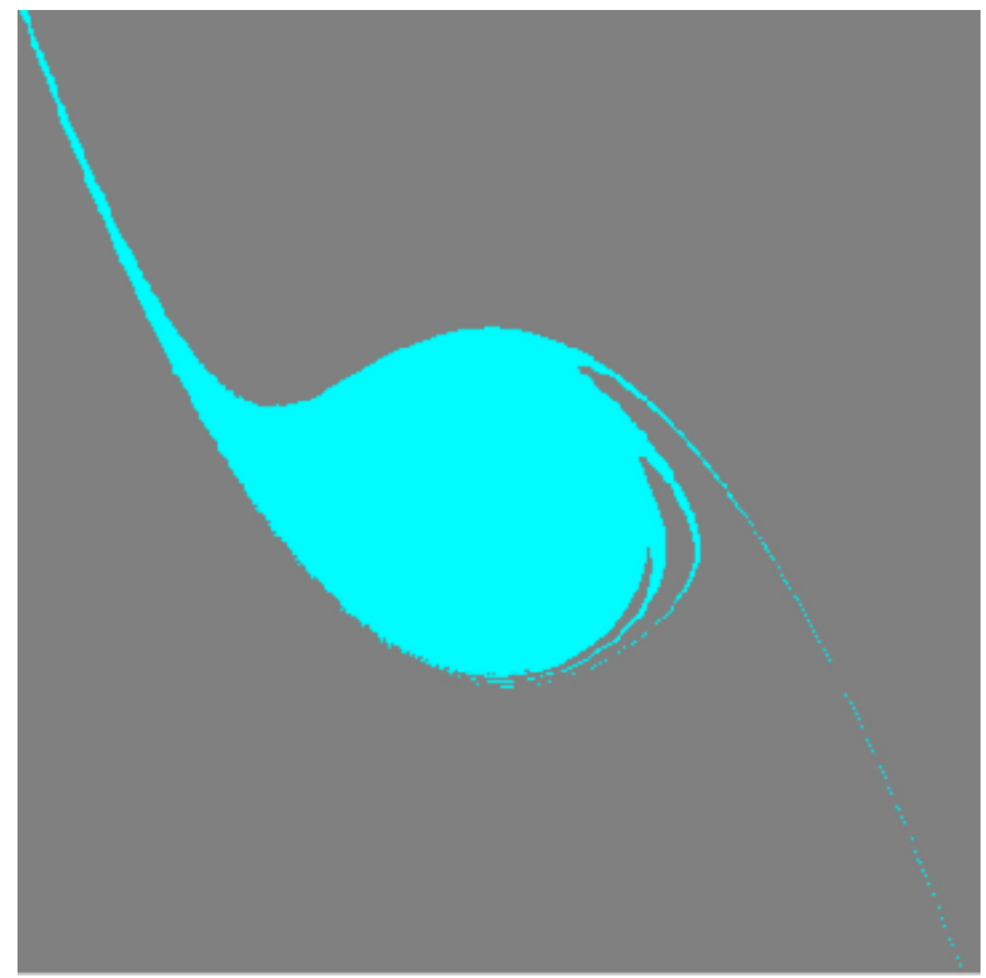
$$\frac{d^2v}{dt^2} + 0.05\frac{dv}{dt} + v - v^3 = 0.1\cos t$$

$\dot{v}(0) \in [-2.0, 2.0]$

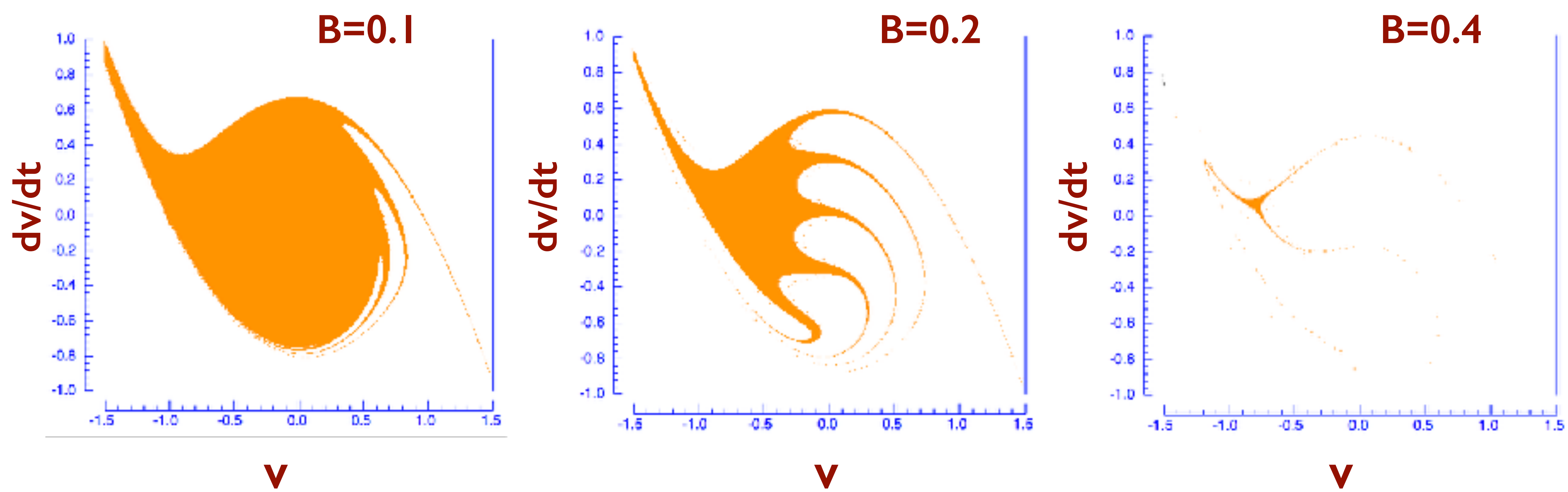


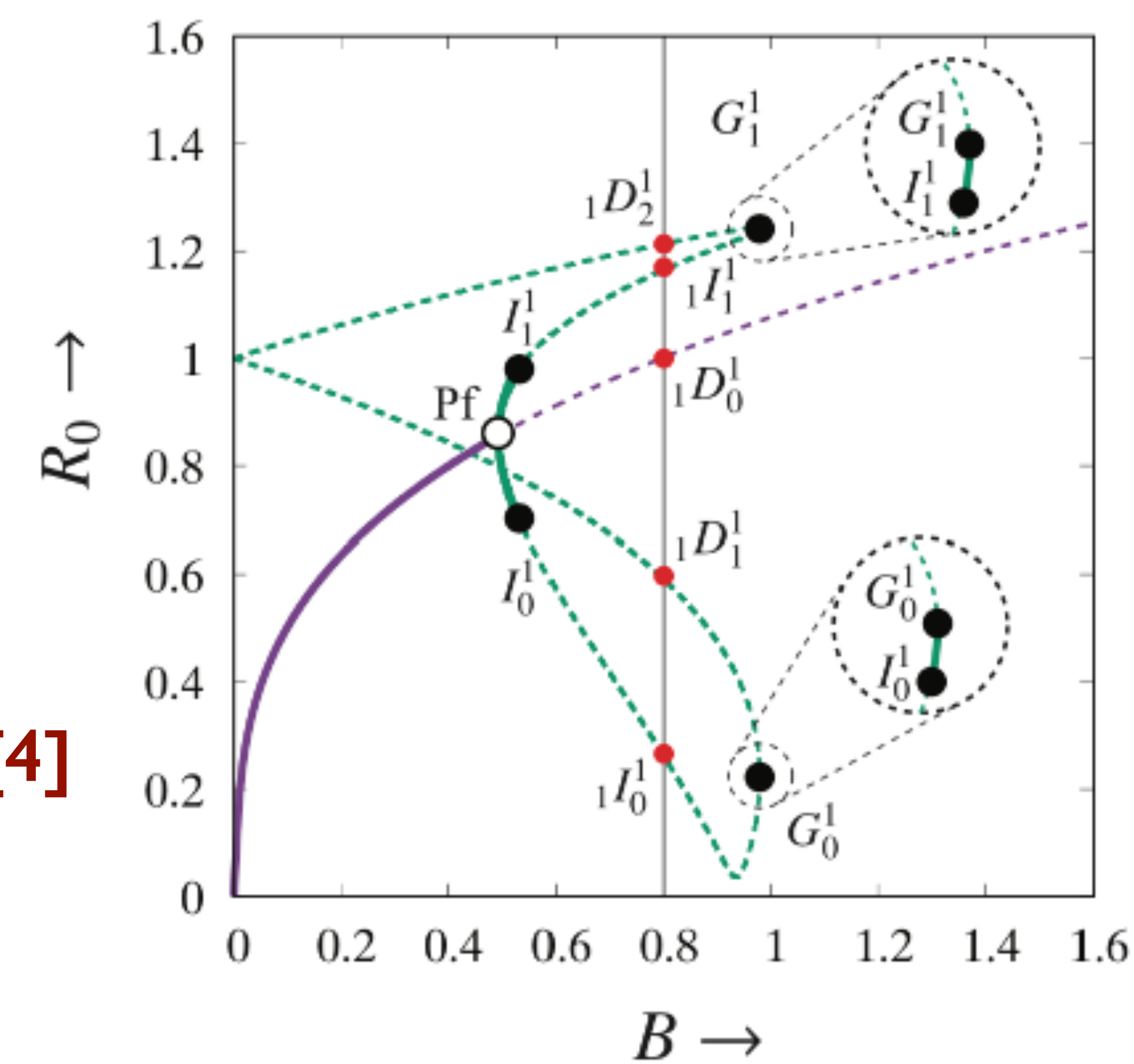
$v(0) \in [-2.0, 2.0]$

$\dot{v}(0) \in [-2.0, 2.0]$

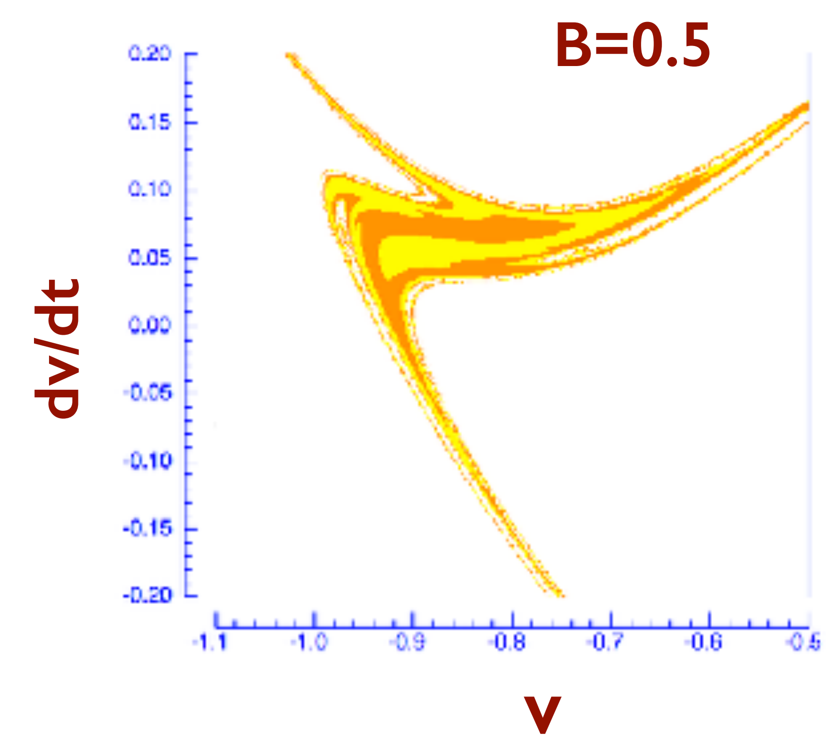


$v(0) \in [-2.0, 2.0]$


B=0.1
B=0.2
B=0.4
dv/dt
v

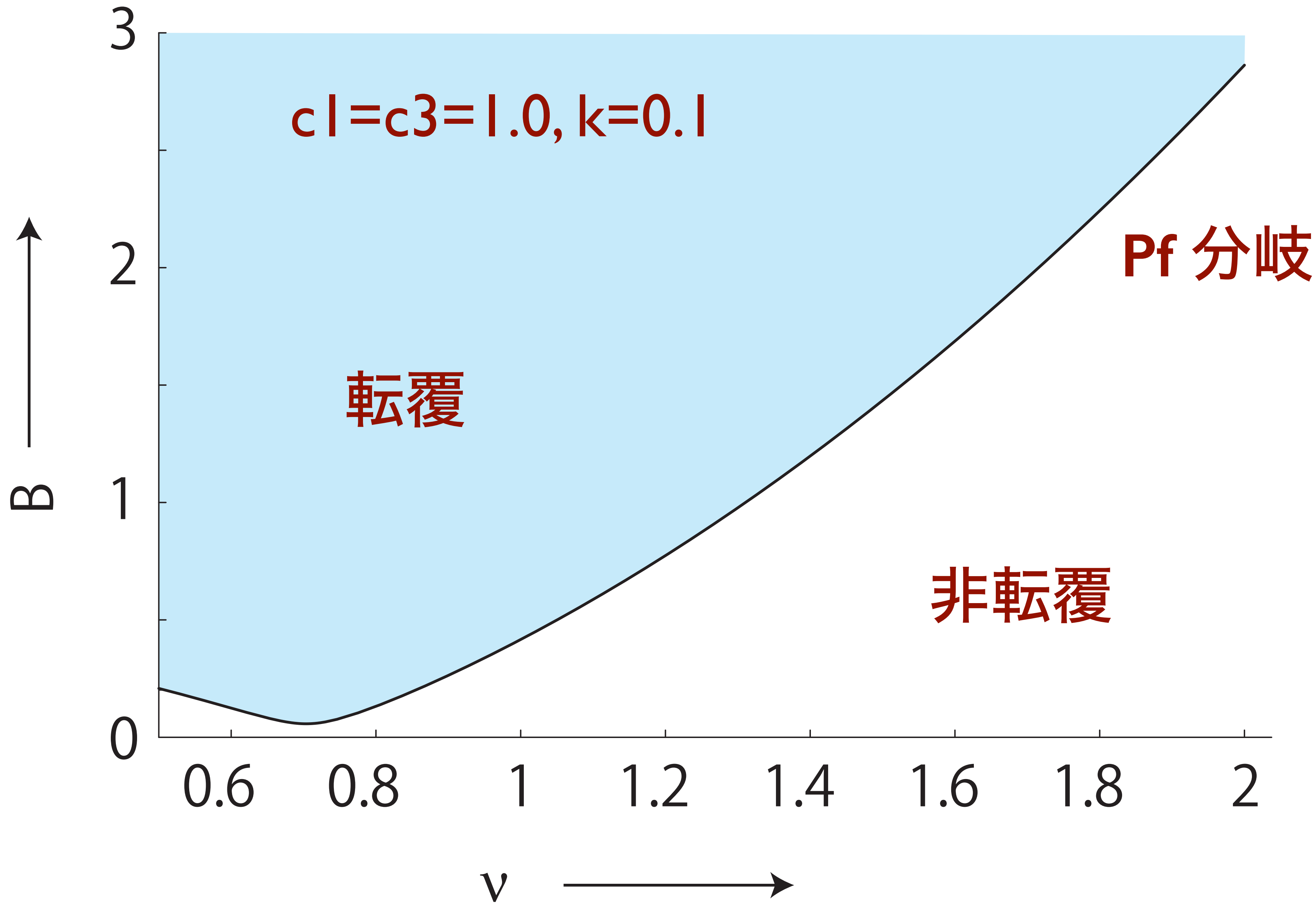

G_1^1
${}_1D_2^1$
${}_1I_1^1$
I_1^1
Pf
${}_1D_0^1$
${}_1D_1^1$
I_0^1
G_0^1
${}_1I_0^1$
$R_0 \rightarrow$
$B \rightarrow$

美井野[4]


B=0.5
dv/dt
v

転覆パラメータ

$$\frac{d^2v}{dt^2} + k\frac{dv}{dt} + c_1 v - c_3 v^3 = B\cos\nu t$$



少し用語の紹介

方程式の対称性とは

$$\ddot{x} + k\dot{x} + f(x) = B_0 + B\cos t$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -kx_2 - f(x_1) + B_0 + B\cos(\nu t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad t = \tau - \frac{\pi}{\nu}$$

状態の線形変換と時間シフトに対して方程式が不変

$$f(-x_1) = -f(x_1), \quad B_0 = 0$$

周期解の対称性

$$\ddot{v} + k\dot{v} + c_1 v - c_3 v^3 = B \cos \nu t$$

- 対称解

$$v_0(t) = x_0 \cos \nu t + y_0 \sin \nu t$$

- 非対称解

$$v_1(t) = z_0 + x_0 \cos \nu t + y_0 \sin \nu t$$

$$v_2(t) = -z_0 + x_0 \cos \nu t + y_0 \sin \nu t$$

調和平衡法(Harmonic Balance法)

$$\ddot{v} + k\dot{v} + c_1 v - c_3 v^3 = B\cos\nu t$$

- **非対称解** $v_0(t) = z + x\cos\nu t + y\sin\nu t$

$$\begin{aligned}
Z(x,y,z) &= A_0 z = 0 \\
X(x,y,z) &= Ax + k\nu y - B = 0 \\
Y(x,y,z) &= -k\nu x + Ay = 0 \\
A_0 &= c_1 - c_3(z^2 + 3r^2/2) \\
A &= c_1 - \nu^2 - 3c_3(z^2 + r^2/4)
\end{aligned}$$

- **対称解** $v_0(t) = x\cos\nu t + y\sin\nu t$

応答曲線

$$A_0 z = 0$$

$$(A^2 + (k\nu)^2)r^2 = B^2$$

$$A_0 = c_1 - c_3(z^2 + 3r^2/2)$$

$$A = c_1 - \nu^2 - 3c_3(z^2 + r^2/4)$$

対称解：z=0

$$(A^2 + (k\nu)^2)r^2 = B^2$$

$$A = c_1 - \nu^2 - 3c_3 r^2/4$$

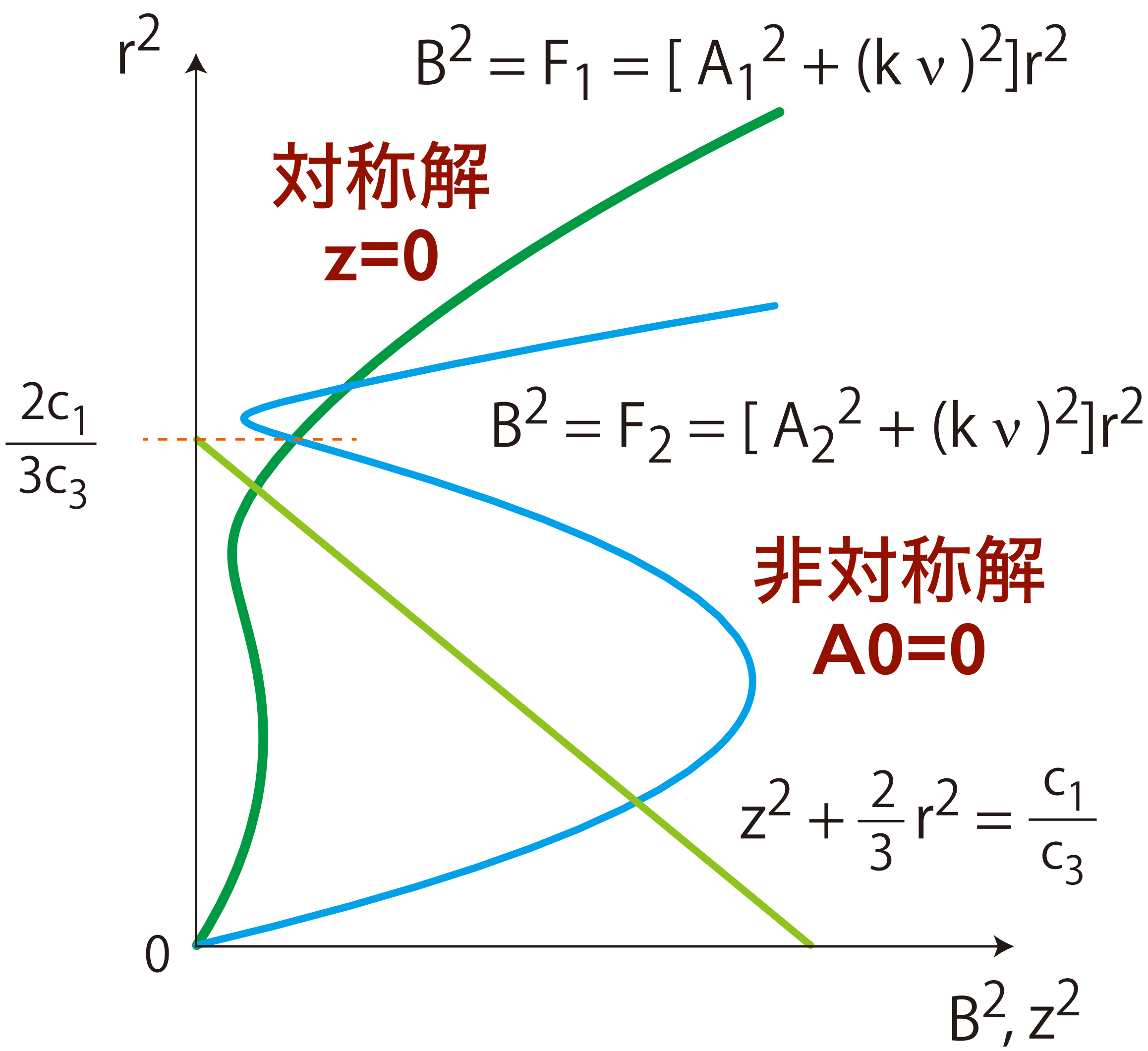
非対称解：A0=0

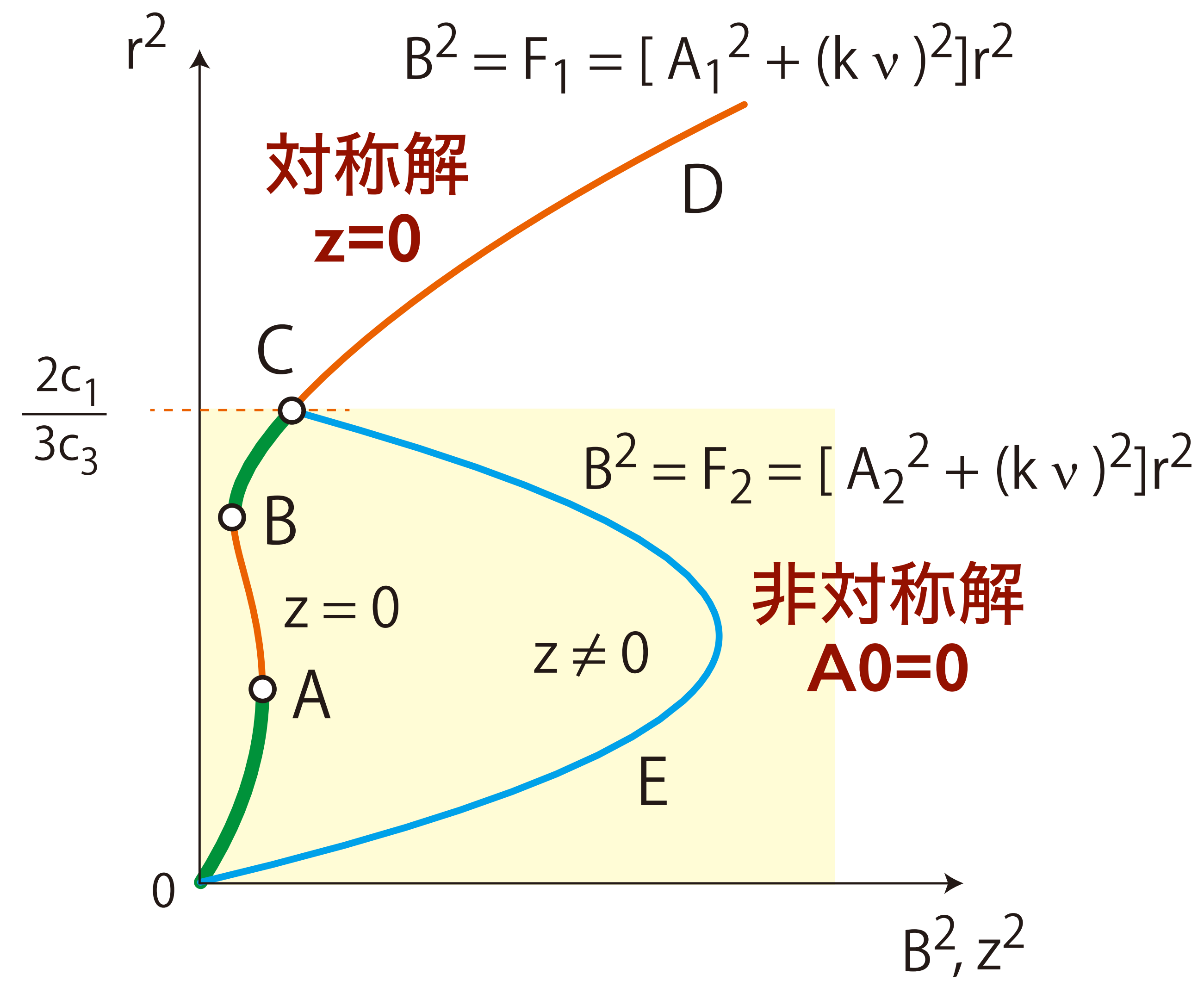
$$(A^2 + (k\nu)^2)r^2 = B^2$$

$$A = -2c_1 - \nu^2 + 15c_3 r^2/4$$

$$z^2 = c_1/c_3 - 3r^2/2$$

応答曲線の例


r^2
$B^2 = F_1 = [A_1{}^2 + (k\nu)^2]r^2$
対称解
z=0
$\frac{2c_1}{3c_3}$
$B^2 = F_2 = [A_2{}^2 + (k\nu)^2]r^2$
非対称解
A0=0
$z^2 + \frac{2}{3}r^2 = \frac{c_1}{c_3}$
0
B^2, z^2


r^2
$B^2 = F_1 = [A_1{}^2 + (k\nu)^2]r^2$
対称解
z=0
D
C
$\frac{2c_1}{3c_3}$
$B^2 = F_2 = [A_2{}^2 + (k\nu)^2]r^2$
B
$z = 0$
$z \neq 0$
非対称解
A0=0
A
E
0
B^2, z^2

平均化法での対称性

$$v_0(t) = z + x\cos\nu t + y\sin\nu t$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{2\nu}(-k\nu x + Ay) \\ \dot{y} = \dfrac{1}{2\nu}(-Ax - k\nu y + B) \\ \dot{z} = -\dfrac{A_0}{k} z \end{cases}$$

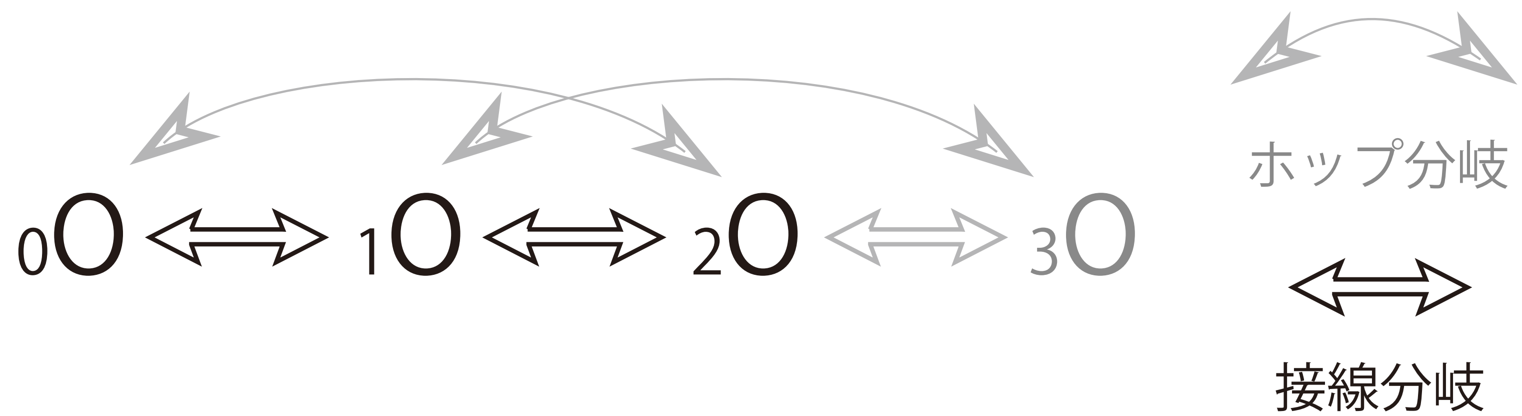
$$A_0 = c_1 - c_3\left(z^2 + \frac{3}{2}r^2\right)$$

$$A = c_1 - \nu^2 - 3c_3\left(z^2 + \frac{1}{4}r^2\right)$$

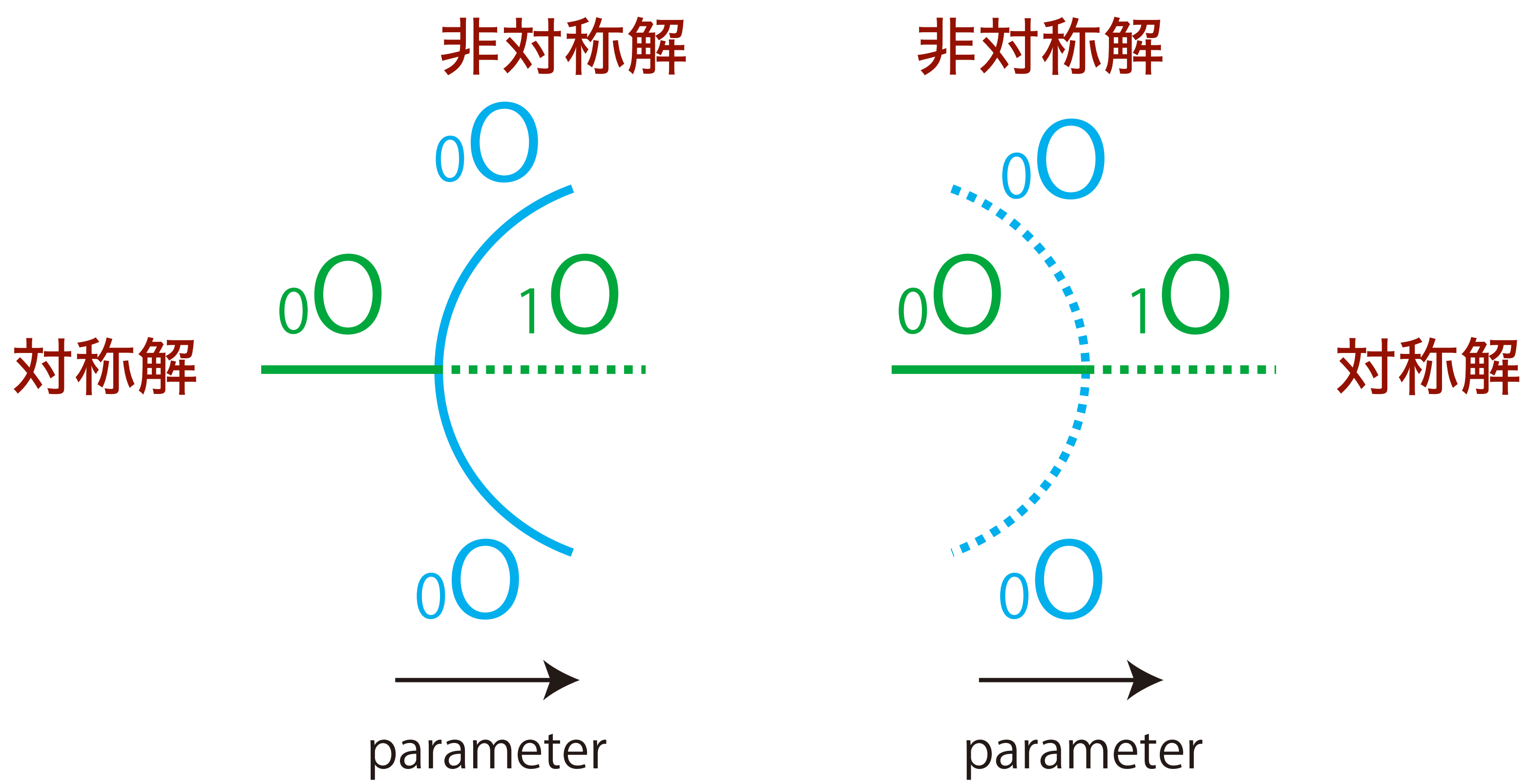
$$P : R^3 \to R^3$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

平衡点とその分岐

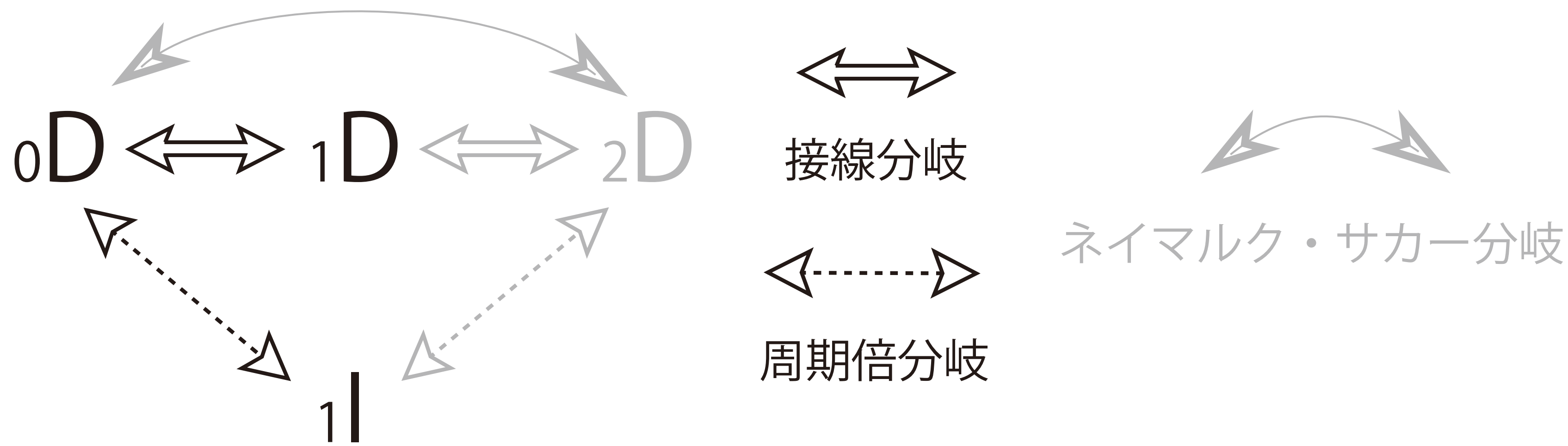


$_0O$
$_1O$
$_2O$
$_3O$
ホップ分岐
接線分岐

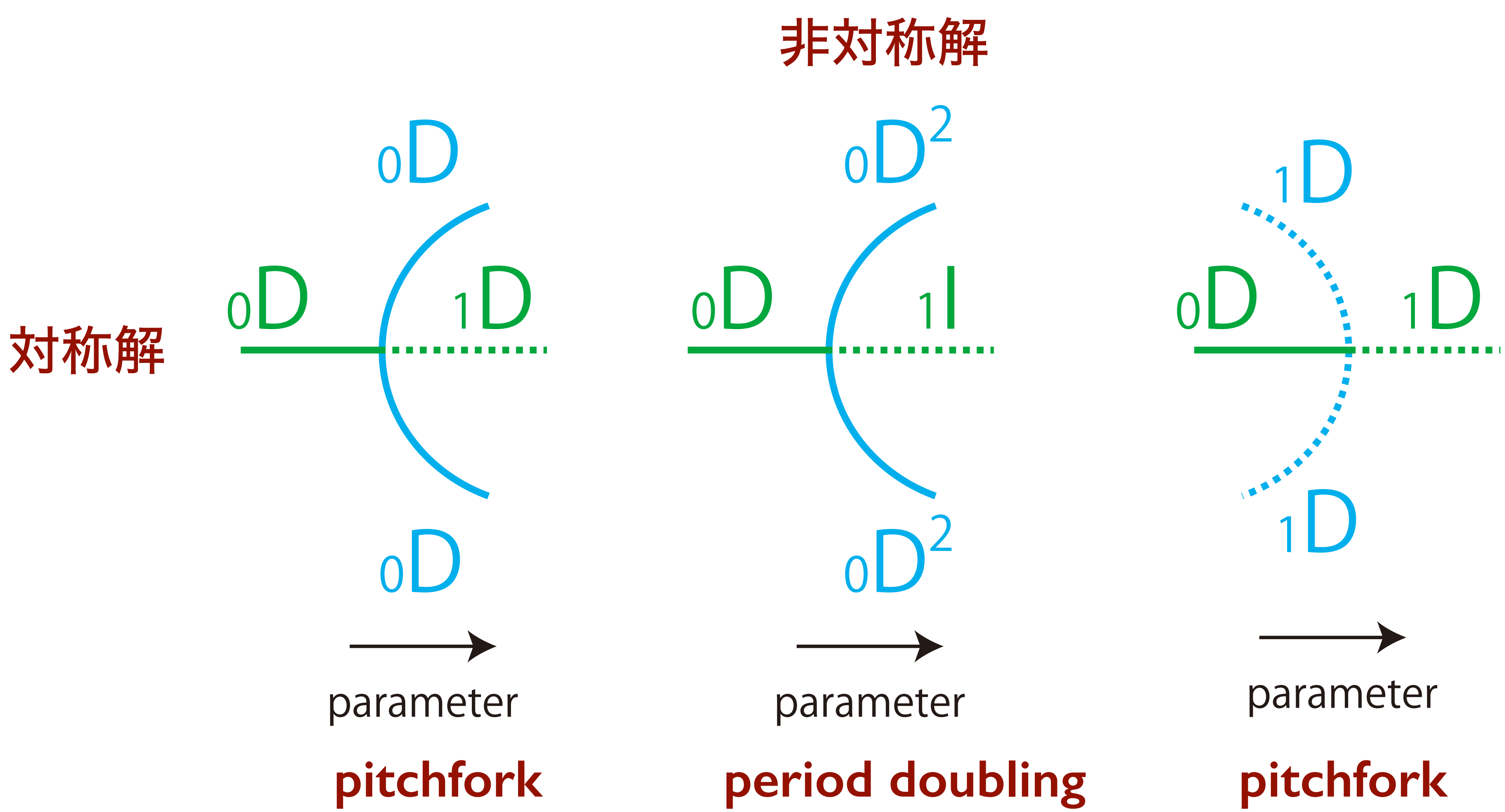


非対称解
$_0O$
$_0O$
$_1O$
対称解
$_0O$
parameter
非対称解
$_0O$
$_0O$
$_1O$
対称解
$_0O$
parameter

周期解とその分岐

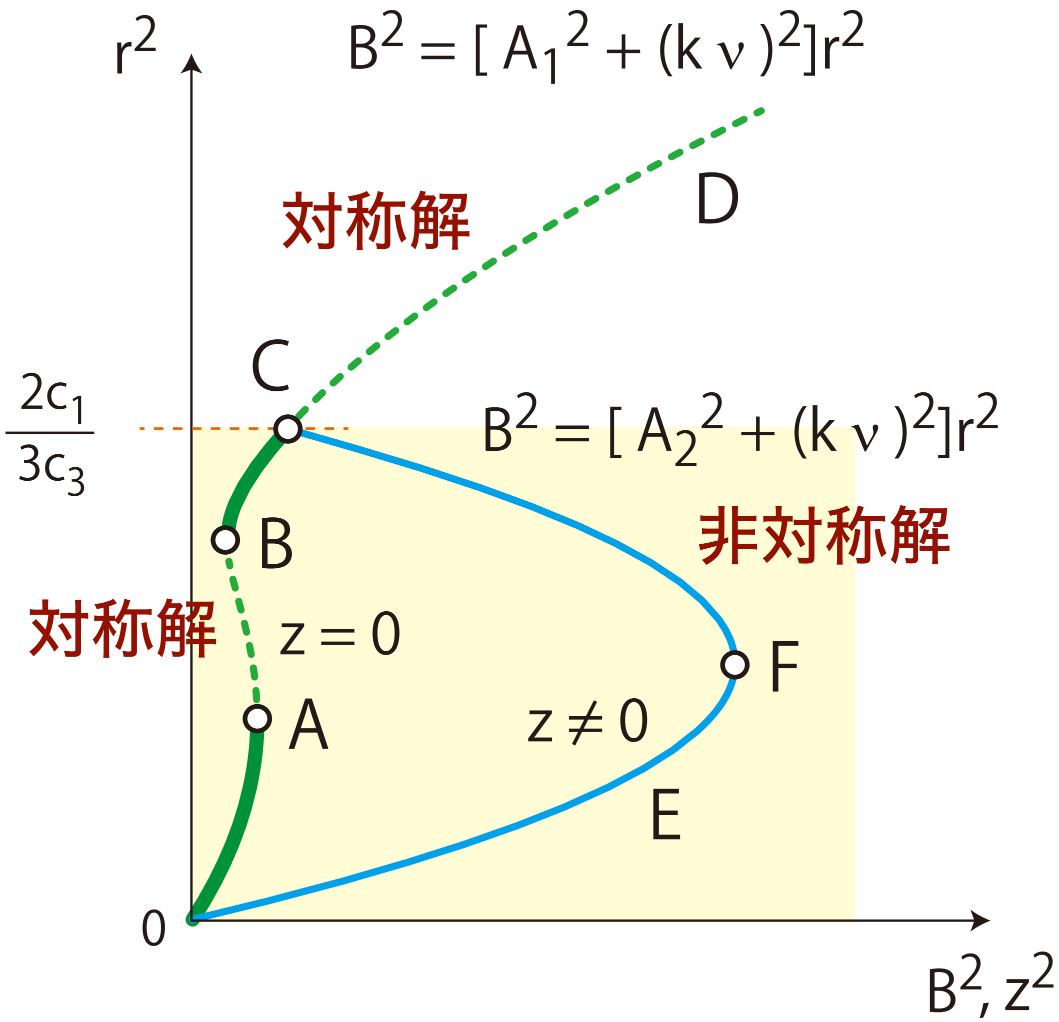


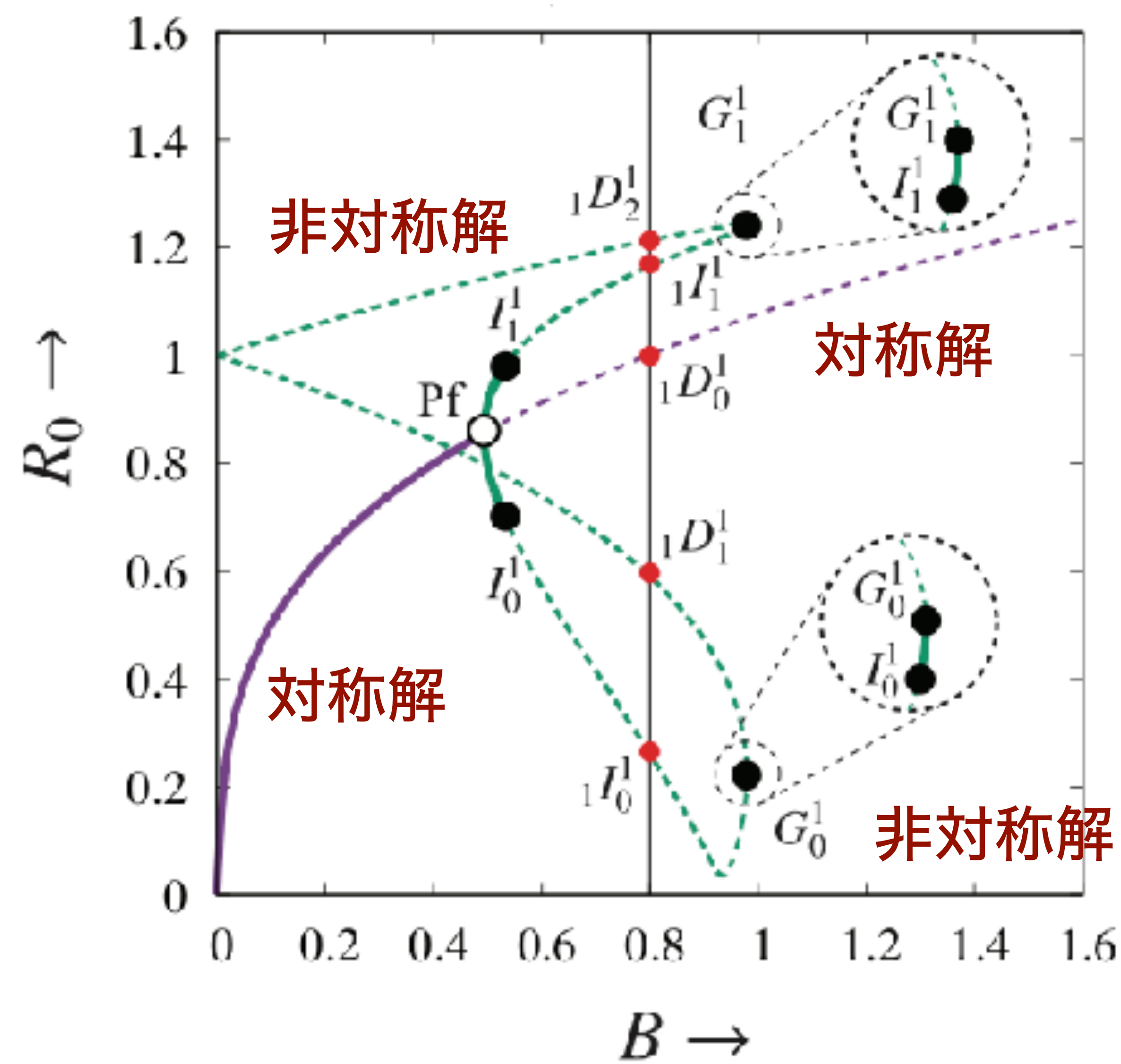
$_0D$
$_1D$
$_2D$
$_1I$
接線分岐
周期倍分岐
ネイマルク・サカー分岐



非対称解
対称解
$_0D$
$_0D$
$_1D$
$_0D$
$_0D^2$
$_0D$
$_1I$
$_0D^2$
$_1D$
$_0D$
$_1D$
$_1D$
parameter
parameter
parameter
pitchfork
period doubling
pitchfork

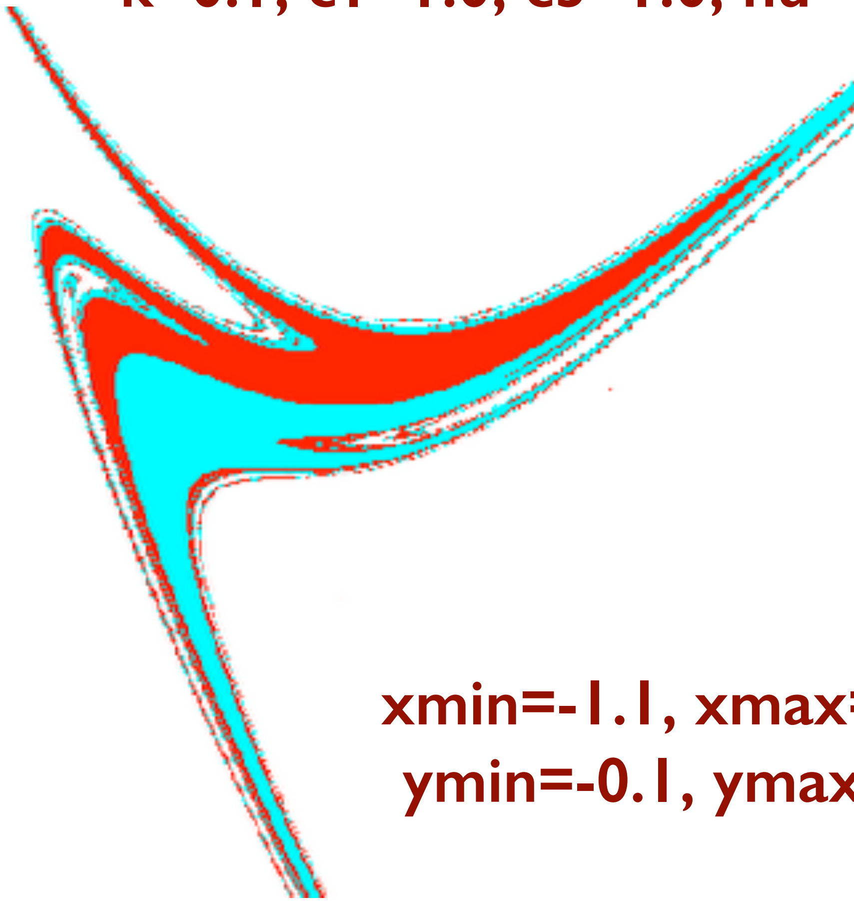
super-critical pitchfork bifurcation



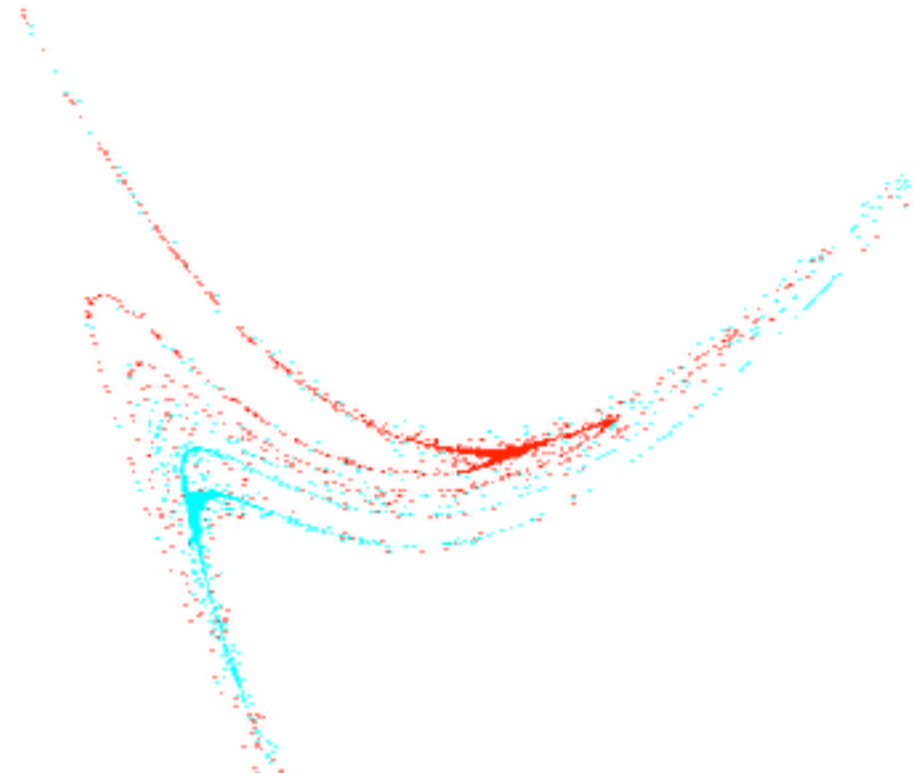


美井野[4]から転載

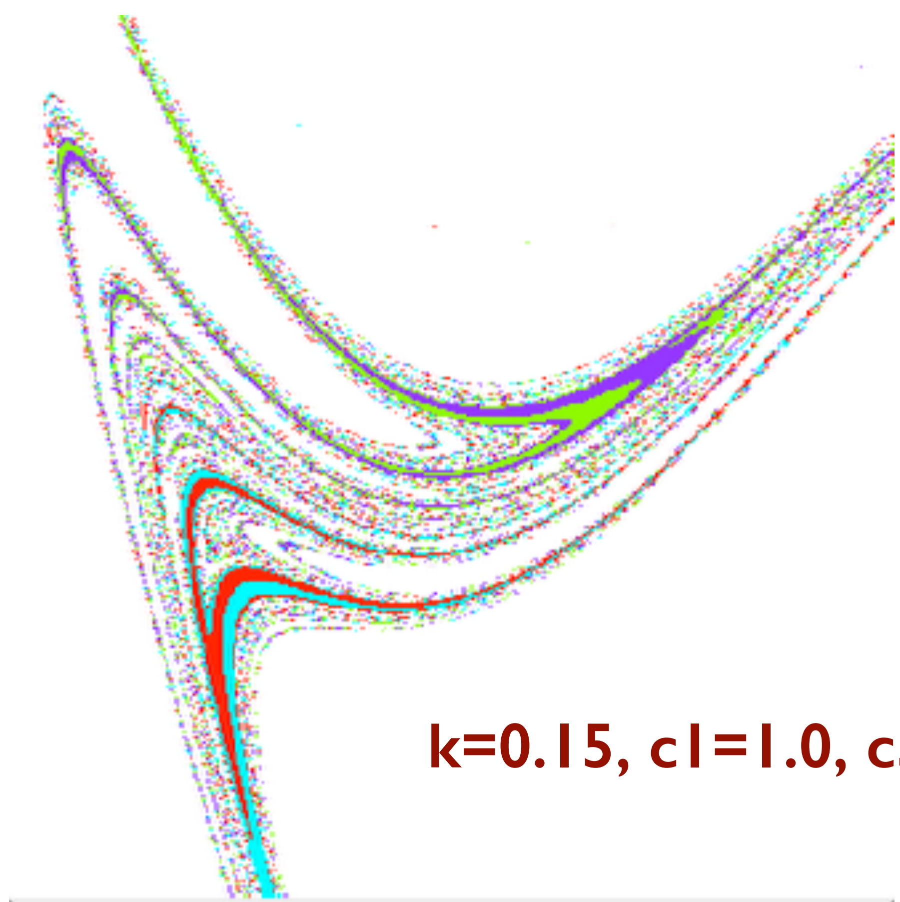
k=0.1, c1=1.0, c3=1.0, nu=1.0, B=0.52



xmin=-1.1, xmax=-0.4,
ymin=-0.1, ymax=0.3



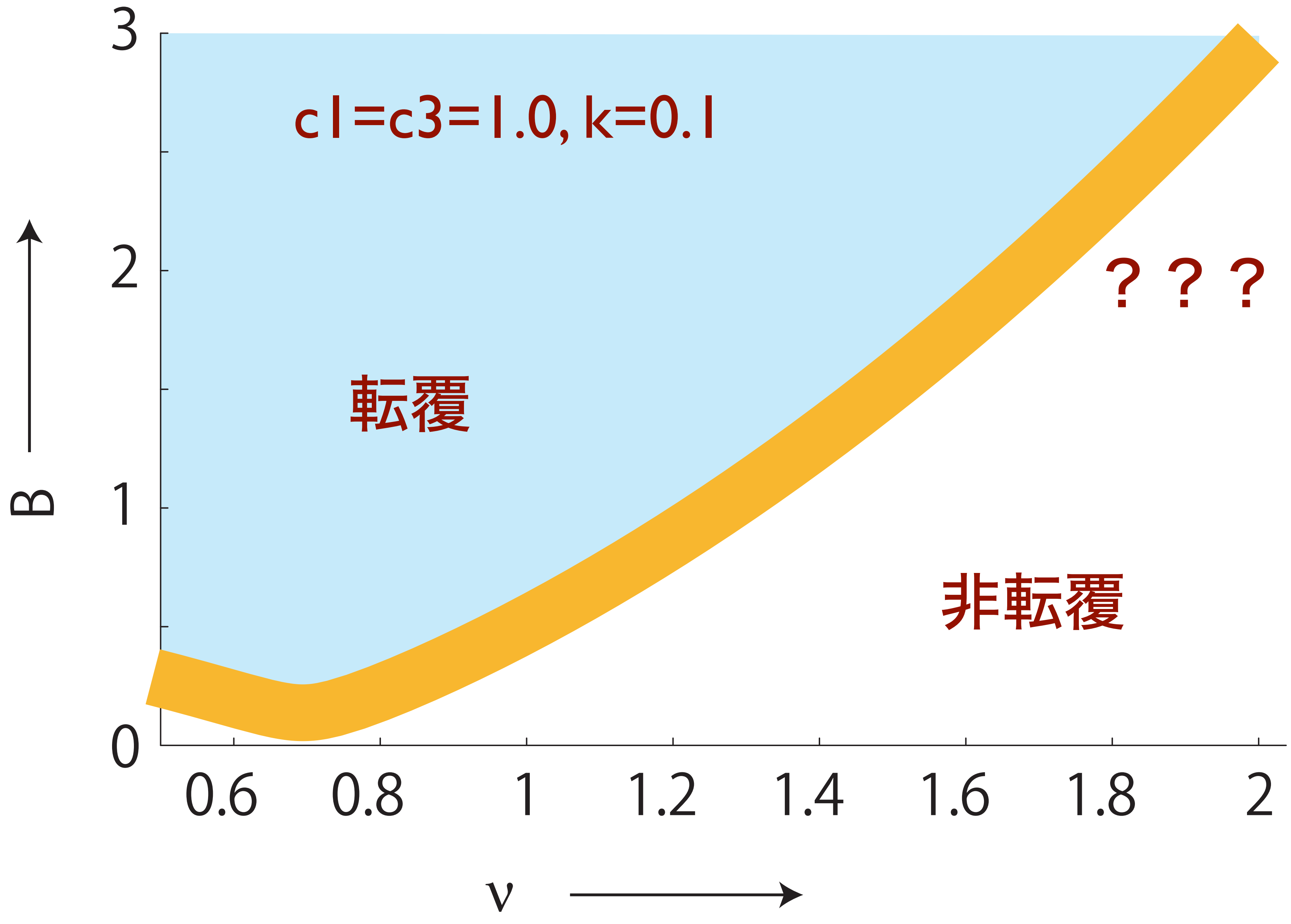
k=0.05, c1=1.0, c3=1.0, nu=1.0, B=0.52



k=0.15, c1=1.0, c3=1.0, nu=1.0, B=0.545

転覆パラメータ

$$\frac{d^2v}{dt^2} + k\frac{dv}{dt} + c_1 v - c_3 v^3 = B\cos\nu t$$



周期解とその安定性：解析方法の比較

① Harmonic balance法と変分方程式の近似解

・対称解と非対称解が合体するpitchfork分岐が起こる
ことはわかるが，安定性と分岐は正しく解析できなかった

・周期倍分岐については，解析可能かどうか再検討が必要

② 近似周期解に関する平均化法

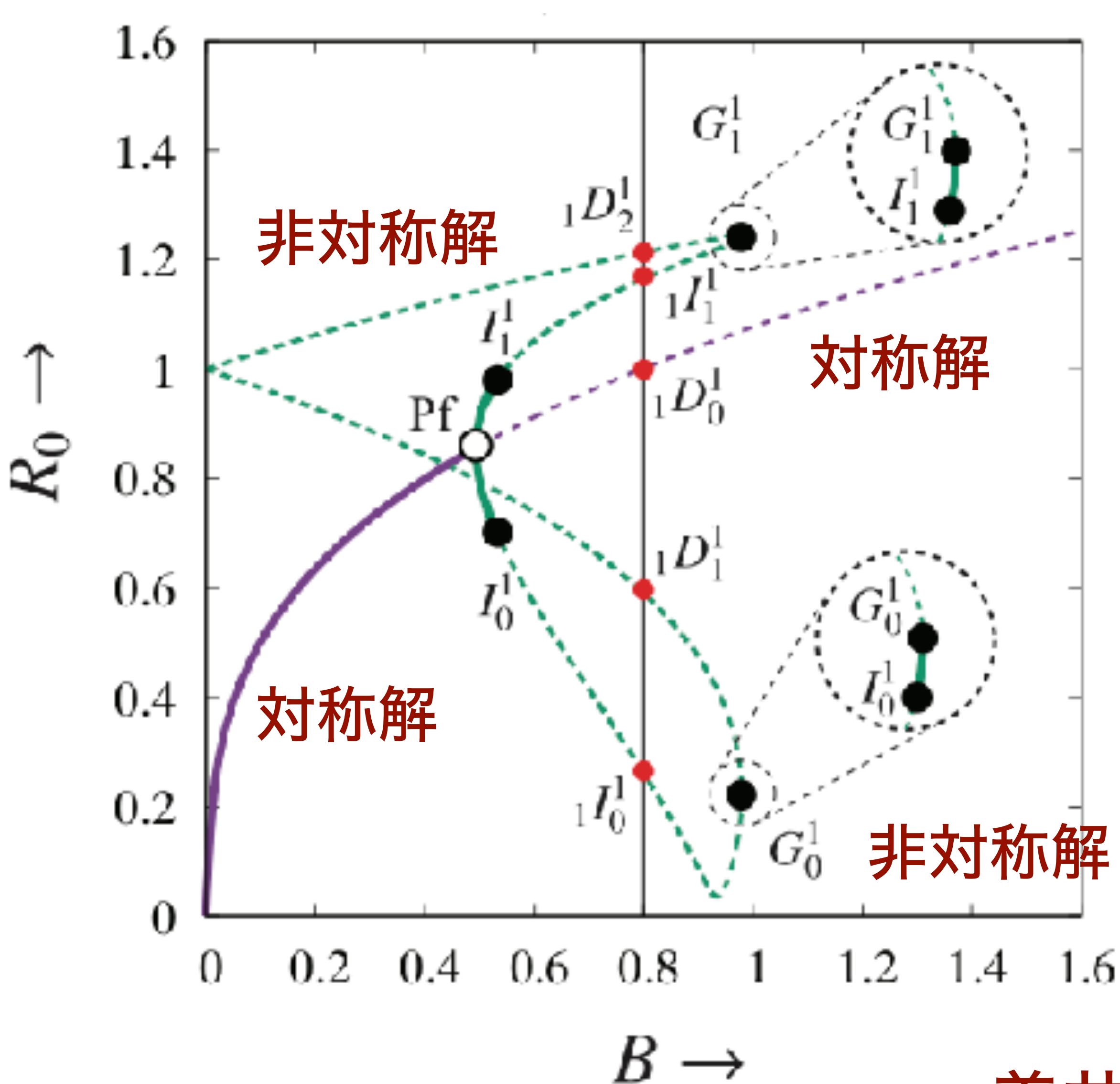
・平均化方程式の導出過程ついても検討が必要
代数・微分方程式 vs 遅速微分方程式

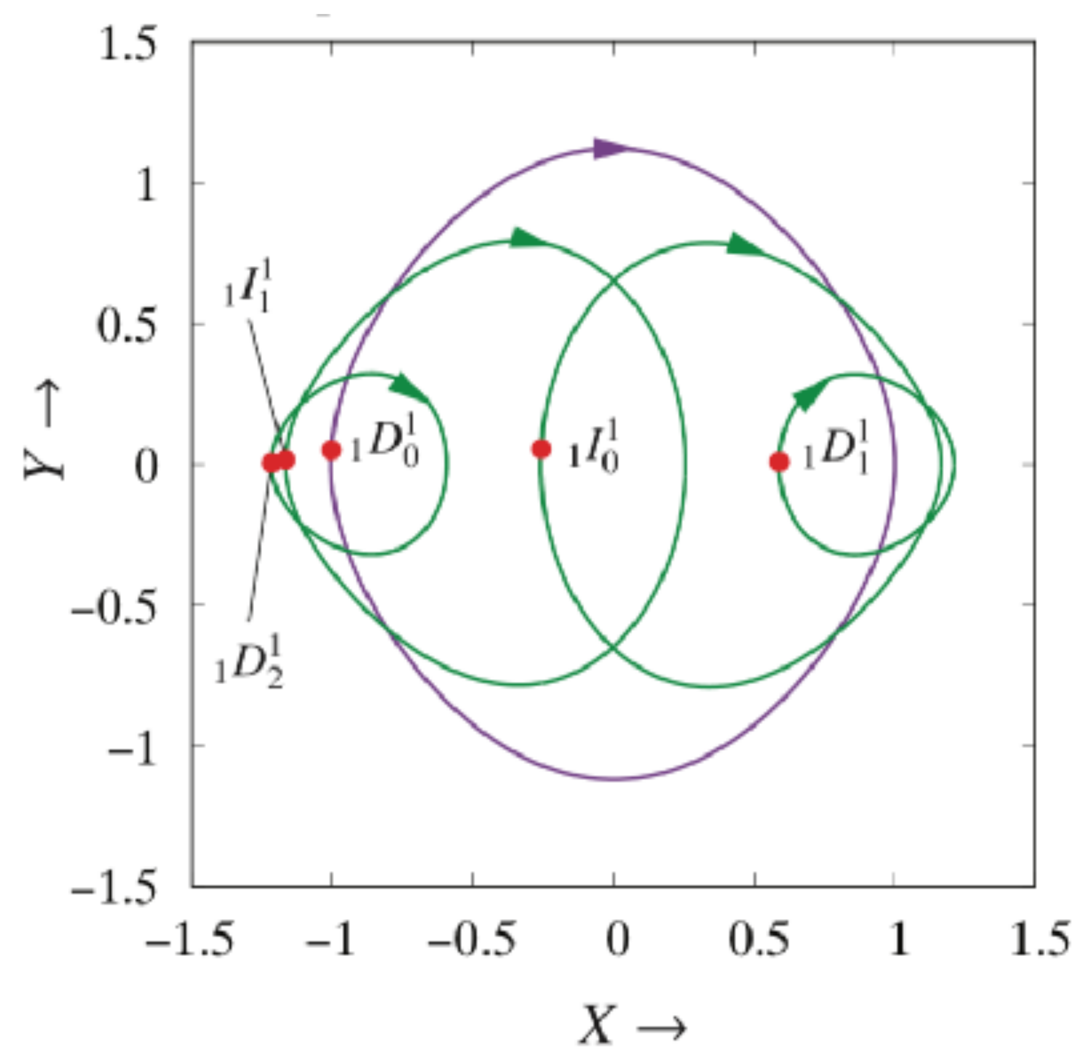
③ Poincaré写像と数値解析を組み合わせた方法

・唯一の解析手段である

・不安定不変集合の構造を明らかにする

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 0.05\frac{dv}{dt} + v - v^3 = 0.8\cos t$$





美井野[4]から転載

５つの固定点の存在は，無限個の周期点やカオスの存在を示唆する

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0.1\frac{dx}{dt} + x^3 = 5.8\cos t$$

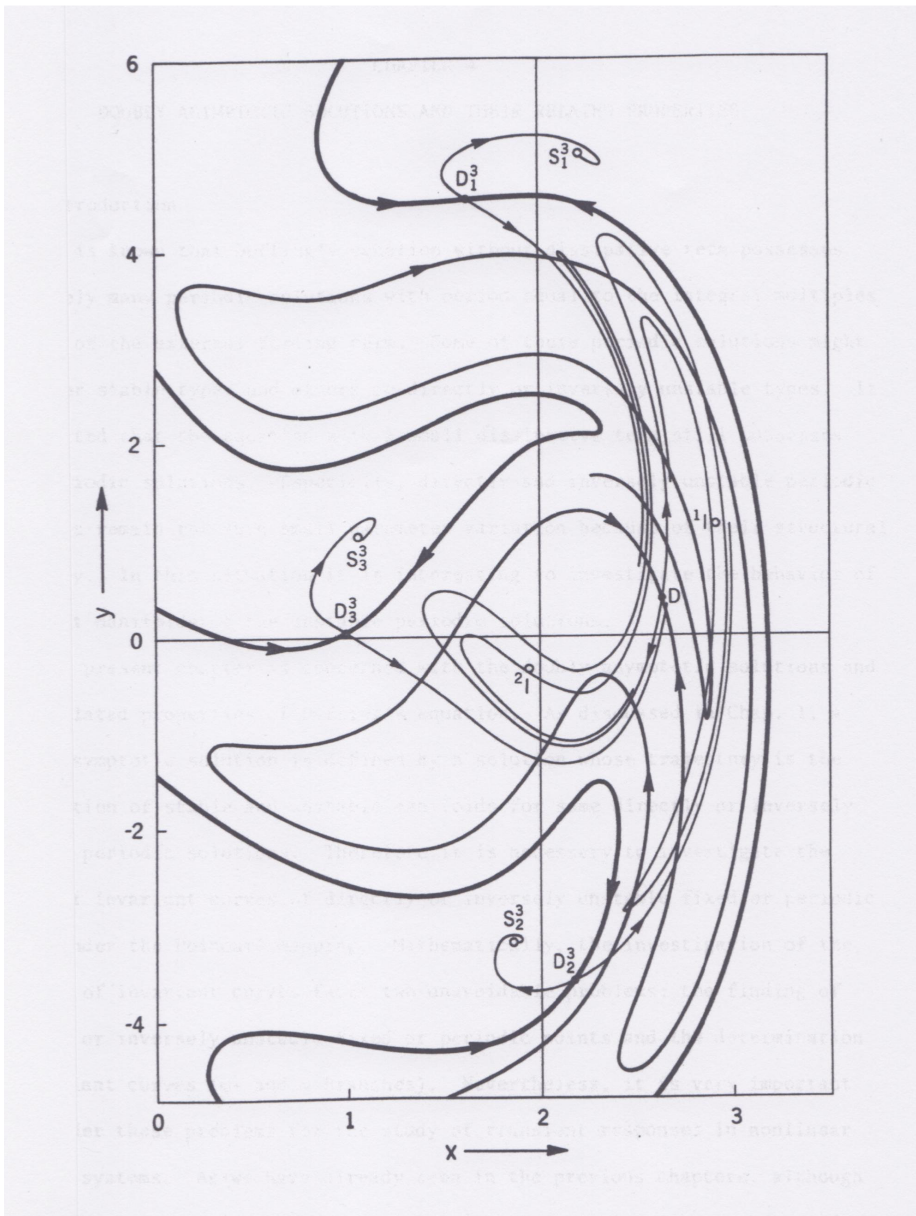
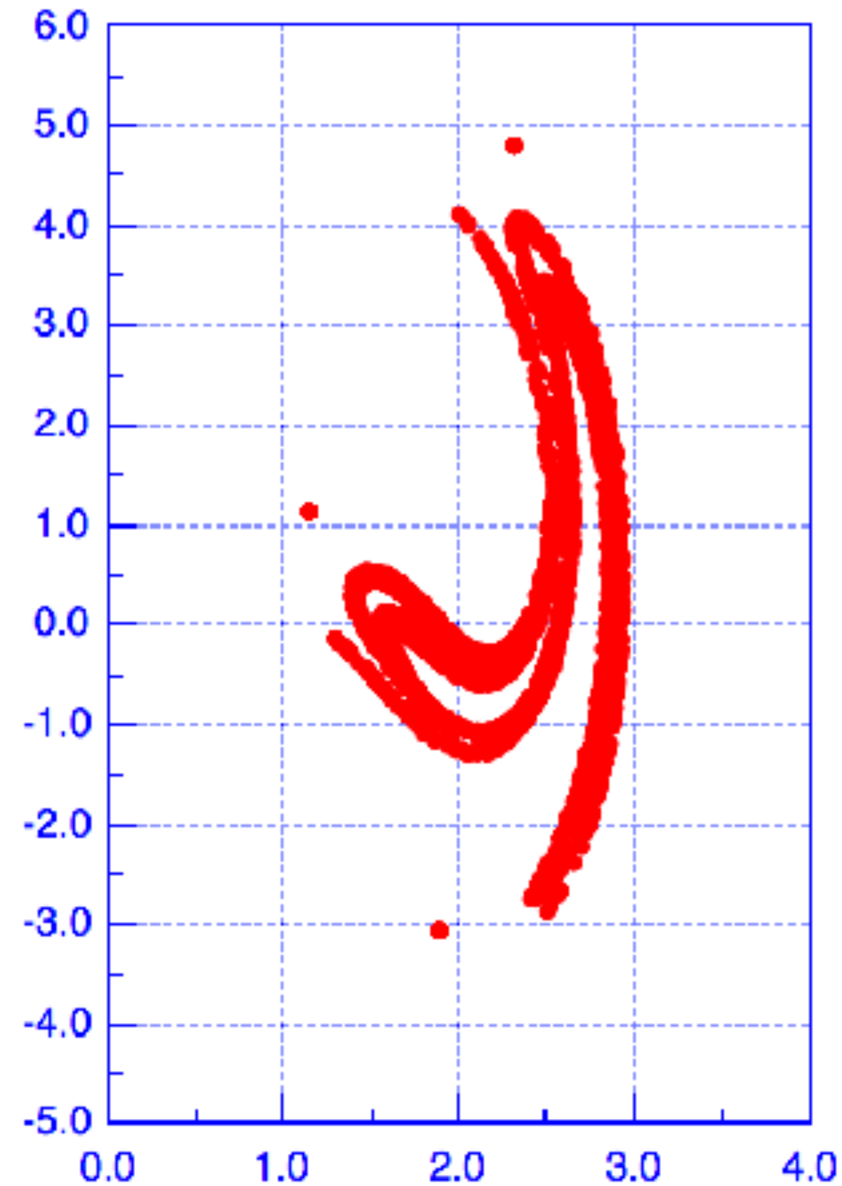


Fig. 3.19. Fixed and 3-periodic points and invariant curves of the mapping for Eq. (3.14).



３つの固定点の存在から無限個の周期点やカオスがあることが分かる[5]

c3の符号が変わると世界が変わる！

文献

[1] 梅田直哉，牧敦生：多項式型の復原力を持つ横揺れ運動方程式の分岐と転覆限界についての考察，2017年9月，上田研究室ゼミ資料

[2] 菅信，田口晴邦：斜め追波中の船の転覆について，日本造船学会論文集, vol. 168, pp.211-220, 1991

[3] 川上博：軟らかい特性を持つDuffing方程式の周期解とその分岐, 2017年10月，上田研究室ゼミ資料

[4] 美井野優：軟化型Duffing方程式における分岐集合の数値的導出, 2017年10月，上田研究室ゼミ資料

[5] H. Kawakami: Qualitative study on the solutions of Duffing's equation, Dr. thesis, December, 1973