平成29年度光応用工学計算機実習

偏光～ジョーンズ計算法(I)
ジョーンズベクトルによる偏光の表示

徳島大学
大学院社会産業理工学研究部　光機能材料分野
（工学部 光応用工学科）
森 篤史

「偏光の表示法」の講義内容

- 偏光状態の分類
  - 直線偏光、円偏光
  - 楕円偏光
  - 偏光板、フレネルの菱面体
- 偏光の表示法
  - ストークスパラメータとポアンカレ球
  - ジョーンズベクトル
  - ストークスベクトル

偏光状態の分類と偏光素子

- 横波 $\mathbf{a} \perp \mathbf{E}$
  - z方向へ伝搬する光波の場合

$$\mathbf{a} = (0,0,1) \qquad \mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$$

- 直行する電場の2成分の相互関係による分類
  - 境界面への入射の際のS成分とP成分のことではない
- 自然光
  - 無偏光＝ランダム偏光
  - 偏光状態の制御など

複素振幅と実在波(復習)

- オイラーの公式　$\exp(i\phi) = \cos\phi + i\sin\phi$
- 三角関数　$\cos\phi = \mathrm{Re}\left[\exp(i\phi)\right]$　　$\sin\phi = \mathrm{Im}\left[\exp(i\phi)\right]$
- 複素振幅　$\psi = u_0 \exp(-i\varphi)$　　$\psi = u_0 \exp\left[-i\left(\omega t - \mathbf{k}\bullet\mathbf{r}\right)\right]$
- 実在波　$u = \mathrm{Re}\,\psi = u_0\cos\varphi$　　位相が進む(遅れる)
- 初期位相　$\psi = \psi_0 \exp(-i\varphi)$　　$\psi_0 = u_0 \exp(i\phi_0)$

$$\psi = u_0 \exp\left[-i\left(\varphi - \phi_0\right)\right] \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{x0} e^{-i\left(\varphi - \phi_{x0}\right)} \\ E_{y0} e^{-i\left(\varphi - \phi_{y0}\right)} \end{bmatrix}$$

参考文献

- 「光学の原理I」「光学の原理III」（マックス・ボルン、エルミ・ウォルフ著、草川徹、横川英輔訳、東海大学出版会）
- “Optics” (E. Hecht, Addison Wesley) 3rd. ed.
- 「フォトニクス基礎」（梅垣真祐著、倍風館）
- 「光学の基礎」（左貝潤一著、コロナ社）

- 複素振幅と初期位相は、Hecht (ヘクト)のものを採用

$\exp(-i\omega t + \cdots)$

初期位相の符号は**k・r**と合わせる

直線偏光、円偏光

- 光波の進行方向をz方向にとる $\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{x0}\cos(\varphi - \phi_{x0}) \\ E_{y0}\cos(\varphi - \phi_{y0}) \end{bmatrix}$
  $\varphi \equiv \omega t - kz$
- 初期位相の差$\Delta\phi$を定義 $\Delta\phi \equiv \phi_{x0} - \phi_{y0}$ ← ストークスパラメータの定義を自然なものにするためにxからyを引くように定義（Hechtから変更）
- φを消去→楕円の方程式の一般形

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{x0}}\frac{E_y}{E_{y0}}\cos\Delta\phi = \sin^2\Delta\phi$$

詳細は省略

- 直線偏光： $\Delta\phi = n\pi$ $\quad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$
- 円偏光： $E_{x0} = E_{y0}$ かつ $\Delta\phi = \pi/2 + n\pi$ $\quad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

直線偏光の意味

- E_xとE_yの関係式

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2-2\frac{E_x}{E_{x0}}\frac{E_y}{E_{y0}}\cos\Delta\phi=\sin^2\Delta\phi$$

$$\Delta\phi=n\pi \qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2\mp2\frac{E_x}{E_{x0}}\frac{E_y}{E_{y0}}=0$$

- 直線の方程式

$$E_y=\pm\frac{E_{y0}}{E_{x0}}E_x$$

- (E_x,E_y)の軌跡

$\pm\theta$方向の直線 $\quad \theta=\tan^{-1}\left(E_{y0}/E_{x0}\right)$

Δφの定義をHechtに合わせると、nの奇遇が逆になる

円偏光の意味

- E_xとE_yの関係式 $$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2-2\frac{E_x}{E_{x0}}\frac{E_y}{E_{y0}}\cos\Delta\phi=\sin^2\Delta\phi$$

$$E_{x0}=E_{y0}\quad \text{かつ}\quad \Delta\phi=\pi/2+n\pi\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

- 円の方程式 $$E_x^2+E_y^2=E_0^2\qquad E_0\equiv E_{x0}=E_{y0}$$

- 右回り円偏光 $\psi_y=\psi_x e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i\psi_x$
  - nが偶数のとき(E_x,E_y)の軌跡は円を時計回り

- 左回り円偏光 $\psi_y=\psi_x e^{i\frac{\pi}{2}}=i\psi_x$
  - nが奇数のとき(E_x,E_y)の軌跡は反時計周り

$$\begin{aligned}\psi_y&=E_0\exp\left[-i\left(\varphi-\phi_{y0}\right)\right]\\&=E_0\exp\left[-i\left(\varphi-\phi_{x0}+\phi_{x0}-\phi_{y0}\right)\right]\\&=E_0\exp\left[-i\left(\varphi-\phi_{x0}\right)-i\Delta\phi\right]\\&=\psi_x e^{-i\Delta\phi}\end{aligned}$$

円偏光の回転方向

- 観測者が光を受ける方向から見たときの(E_x,E_y)の回転方向（時間進行に従って回転する方向）

$\psi_x = \cos(\omega t - kz) - i\sin(\omega t - kz)$ として

$\psi_y = \psi_x e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\psi_x$ のとき

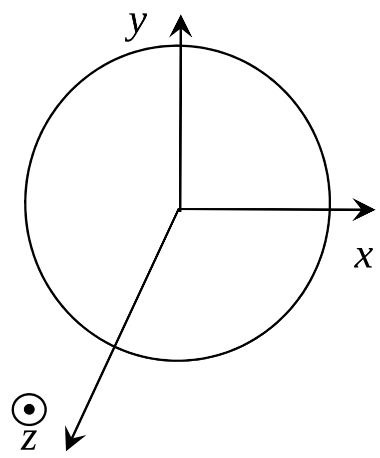
$$\psi_y = \psi_x e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\psi_x = -\sin(\omega t - kz) - i\cos(\omega t - kz)$$

$$\mathrm{Re}\left[\psi_x, \psi_y\right] = \left[\cos(\omega t - kz), -\sin(\omega t - kz)\right]$$

$\psi_y = \psi_x e^{i\frac{\pi}{2}} = i\psi_x$ のとき

$$\psi_y = \psi_x e^{i\frac{\pi}{2}} = i\psi_x = \sin(\omega t - kz) + i\cos(\omega t - kz)$$

$$\mathrm{Re}\left[\psi_x, \psi_y\right] = \left[\cos(\omega t - kz), \sin(\omega t - kz)\right]$$



楕円偏光

- 一般の場合の偏光状態は楕円偏光

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2-2\frac{E_x}{E_{x0}}\frac{E_y}{E_{y0}}\cos\Delta\phi=\sin^2\Delta\phi$$

- (E_x,E_y)の軌跡の軌跡は楕円
  - 楕円の方程式を標準形に直すには、二次形式を座標軸の回転によって変形するのがエレガントだろう

$$\begin{bmatrix} E_x & E_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/E_{x0}^2 & -\cos\Delta\phi/E_{x0}E_{y0} \\ -\cos\Delta\phi/E_{x0}E_{y0} & 1/E_{y0}^2 - \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}=\sin^2\Delta\phi$$

  - 偏光楕円率と主軸方位角 @ ストークスパラメータ

偏光板、フレネルの菱面体

- 偏光状態の分類はできたけれども
  - 自然光はランダム偏光
  - 特定の偏光をどのようにして作るのか
- ブルースター角の利用
  - ブルスター角では、P偏光成分の振幅反射率はゼロ
  - 入射面に垂直な直線偏光（S偏光成分のみが反射）
- 波長板ー複屈折媒質
- その他
- 偏光板;フレネルの菱面体

偏光板

- 偏光板ー直線偏光子（linear polarizer）
  - 一方向の偏光のみを透過させる（透過軸）
  - マルスの法則

$$I(\theta) = \frac{c\varepsilon_0}{2} E_0^2 \cos^2 \theta$$

透過軸と振動方向との角θ

- 導線格子（wire-glid）偏光子
  - 導線の方向⊥透過軸
  - c.f. ポリビニールアルコールフィルム
- 積層平行平面板
  - S偏光成分とP偏光成分の透過率の違いの利用

$$T_p \geq T_s$$

フレネルの菱面体

- 全反射の際の位相のずれの利用

$$\frac{\phi_s}{2} = \tan^{-1}\left[(n_2/\mu_2)\sqrt{(n_1^2/n_2^2)\sin^2\theta_i - 1} \Big/ (n_1/\mu_1)\cos\theta_i \right]$$

$$\frac{\phi_P}{2} = \tan^{-1}\left[(n_1/\mu_1)\sqrt{(n_1^2/n_2^2)\sin^2\theta_i - 1} \Big/ (n_2/\mu_2)\cos\theta_i \right]$$

- 偏光状態の変換

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{x0} e^{-i(\varphi - \phi_{x0})} \\ E_{y0} e^{-i(\varphi - \phi_{y0})} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{x0} e^{-i(\varphi - \phi_{x0} - \phi_P)} \\ E_{y0} e^{-i(\varphi - \phi_{y0} - \phi_S)} \end{bmatrix}$$

- 90°　の相対位相差を加えるように設計

フレネルの菱面体

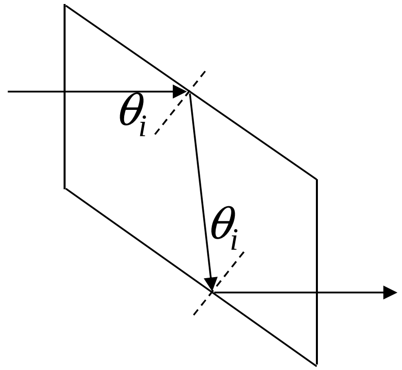
- 全反射の際の相対位相シフト　$\Delta\phi = \phi_P - \phi_S$

$$\frac{\Delta\phi}{2} = \tan^{-1}\left[\frac{\left[(n_1/\mu_1)^2 - (n_2/\mu_2)^2\right]}{\left[(n_1/\mu_1)^2 (\mu_1/\mu_2) - (n_2/\mu_2)^2 (\mu_2/\mu_1)\right]} \frac{\cos\theta_i \sqrt{n_1^2 \sin^2\theta_i - n_2^2}}{n_1 \sin^2\theta_i}\right]$$

- μ_1=μ_2の場合

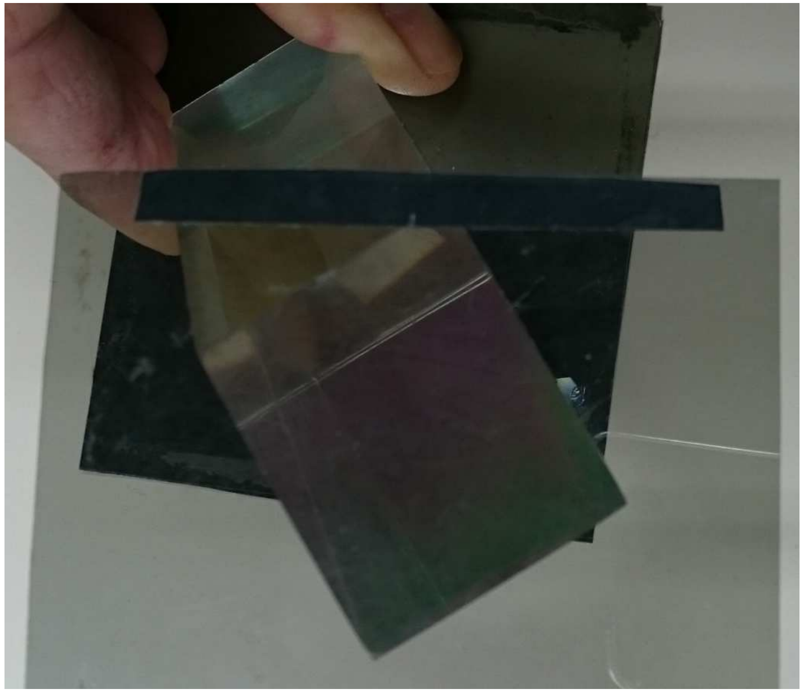
$$\frac{\Delta\phi}{2} = \tan^{-1}\frac{\cos\theta_i \sqrt{n_1^2 \sin^2\theta_i - n_2^2}}{n_1 \sin^2\theta_i}$$

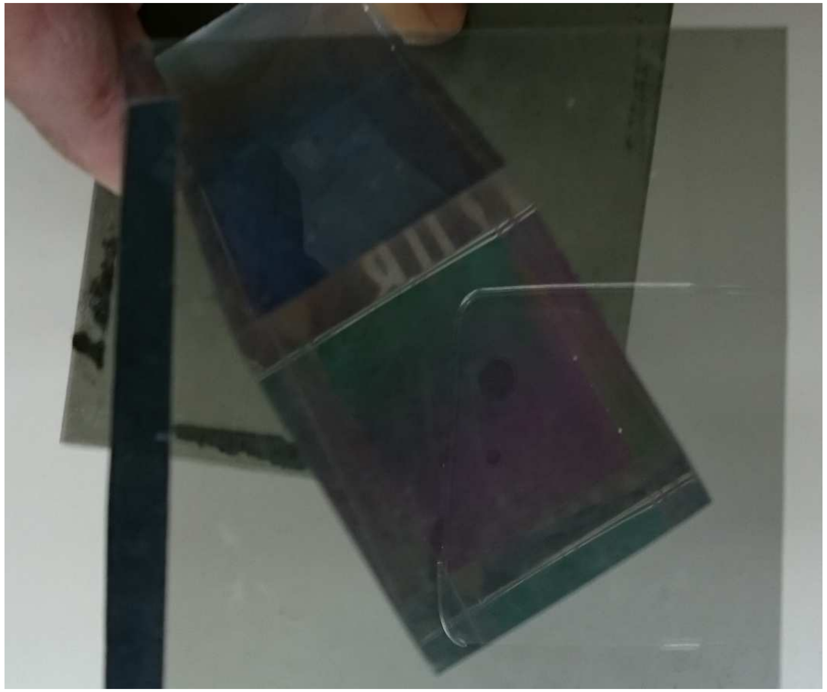
- 2回の内部反射で90°の相対位相差
  - n_1/n_2≧1.4966
- n_1/n_2=1.4966の場合、θ_i=51.785



フレネルの菱面体

- 試作品をお見せします





偏光の表示法

- 完全偏光と不完全偏光（部分偏光）、無偏光
- 楕円偏光　$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2-2\frac{E_x}{E_{x0}}\frac{E_y}{E_{y0}}\cos\Delta\phi=\sin^2\Delta\phi$$
- 直線偏光　$\Delta\phi=m\pi;\ m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$
- 右回り円偏光　$E_{x0}=E_{y0},\ \Delta\phi=\pi/2+2m\pi;\ m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$
- 左回り円偏光　$E_{x0}=E_{y0},\ \Delta\phi=-\pi/2+2m\pi;\ m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$

$\Rightarrow$ 偏光状態の統一的、総合的な表示方法

ストークスパラメータ

- ストークスパラメータS_0,S_1 , S_2 , S_3の定義

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2-2\frac{E_x}{E_{x0}}\frac{E_y}{E_{y0}}\cos\Delta\phi=\sin^2\Delta\phi$$

$$S_0=\left\langle E_{x0}^2\right\rangle+\left\langle E_{y0}^2\right\rangle$$

$$S_1=\left\langle E_{x0}^2\right\rangle-\left\langle E_{y0}^2\right\rangle$$

$$S_2=2\left\langle E_{x0}E_{y0}\cos\Delta\phi\right\rangle$$

$$S_3=2\left\langle E_{x0}E_{y0}\sin\Delta\phi\right\rangle$$

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix} E_{x0}(t)e^{-i\left[\omega t-kz-\phi_{x0}(t)\right]} \\ E_{y0}(t)e^{-i\left[\omega t-kz-\phi_{y0}(t)\right]} \end{bmatrix}$$

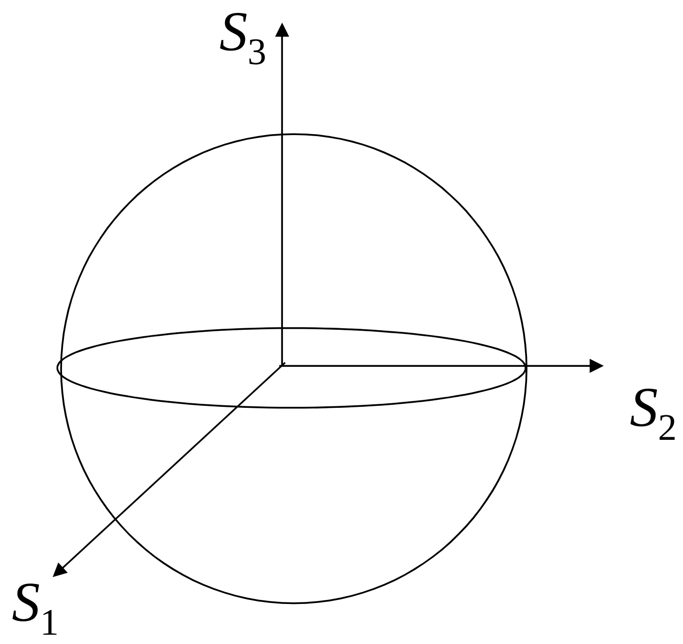
時間平均 <・・・>

ポアンカレ球

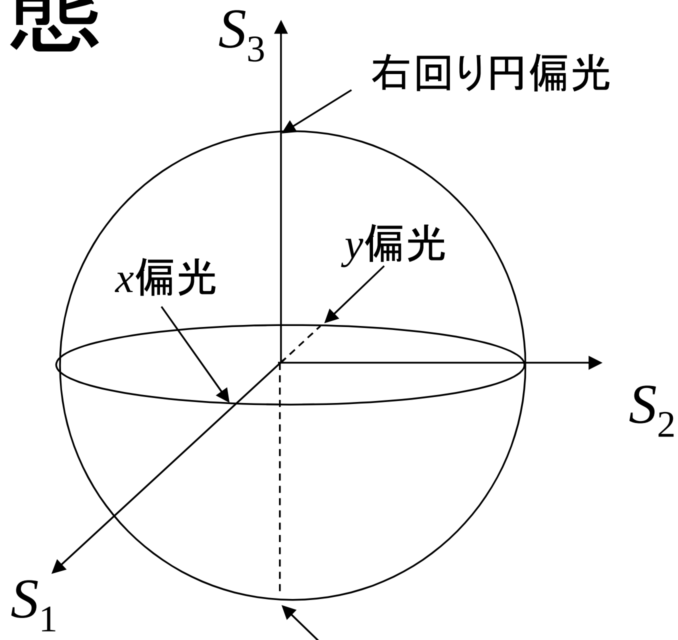
- 点(S_1, S_2, S_3)の３次元表示
- 完全偏光 $S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$
  - 完全偏光は、半径S_0の球上
- ランダム偏光（無偏光）

$$S_1 = S_2 = S_3 = 0$$

- 部分偏光 $S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$
  - 部分偏光は、半径S_0の球の内部
- 偏光度 $V = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \Big/ S_0$



ストークスパラメータと偏光状態



- 直線偏光　$\Delta\phi = m\pi \longrightarrow S_3 = 0$
  - “x偏光” $S_0 = S_1 = E_{x0}^2,\ S_2 = 0$
  - “y偏光” $S_0 = -S_1 = E_{y0}^2,\ S_2 = 0$
  - “θ偏光” $E_{x0} = E_0 \cos\theta, E_{y0}^2 = E_0 \sin\theta$

$\longrightarrow\ S_0 = E_0^2 \quad S_1 = E_0^2 \cos 2\theta \quad S_2 = E_0^2 \sin 2\theta$

- 円偏光 $E_{x0} = E_{y0} \equiv E_0; \Delta\phi = \pm\pi/2 + 2m\pi$

$\longrightarrow\ S_0 = 2E_0^2 \qquad S_1 = S_2 = 0$

  - 右回りおよび左回り　$S_3 = 2E_0^2$ および $S_3 = -2E_0^2$

主軸方位角、偏光楕円率

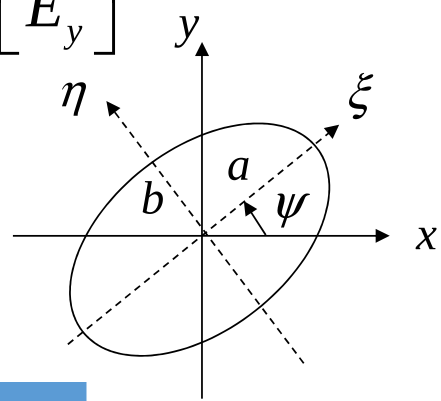
- 一般形→標準形

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2-2\frac{E_x}{E_{x0}}\frac{E_y}{E_{y0}}\cos\Delta\phi=\sin^2\Delta\phi$$

計算は省略

$$\left(\frac{E_\xi}{a}\right)^2+\left(\frac{E_\eta}{b}\right)^2=1$$

$$\begin{bmatrix}E_\xi\\E_\eta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi\\ \sin\psi & \cos\psi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_x\\E_y\end{bmatrix}$$



- 主軸方位角 ψ

$$2\psi=\tan^{-1}\frac{2E_{x0}E_{y0}\cos\Delta\phi}{E_{x0}^2-E_{y0}^2}$$

- 偏光楕円率

$$\chi=\tan^{-1}b/a$$

$$2\chi=(\pm)\tan^{-1}\frac{2E_{x0}E_{y0}\sin\Delta\phi}{\sqrt{\left(E_{x0}^2-E_{y0}^2\right)^2+4E_{x0}^2E_{y0}^2\cos\Delta\phi}}$$

ストークスパラメータと楕円偏光

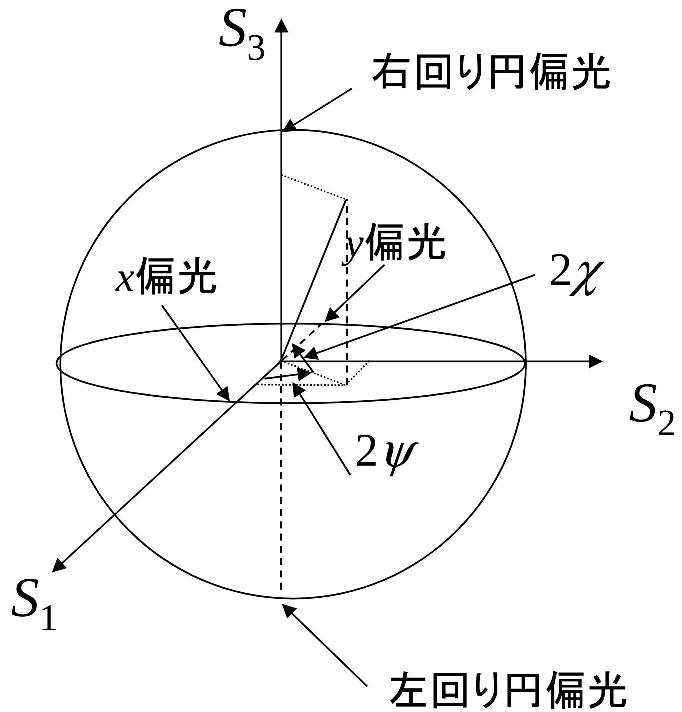
- 主軸方位角、偏光楕円率との関係

$$S_1 = S_0 \cos 2\chi \cos 2\psi$$

$$S_2 = S_0 \cos 2\chi \sin 2\psi$$

$$S_3 = S_0 \sin 2\chi$$

- 右回りは上半球
- 左回りは下半球



ジョーンズベクトル

- 電場ベクトル(完全偏光) $\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{x0} e^{-i(\omega t - kz - \phi_{x0})} \\ E_{y0} e^{-i(\omega t - kz - \phi_{y0})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{x0} \\ E_{y0} e^{-i(\phi_{x0} - \phi_{y0})} \end{bmatrix} e^{-i(\omega t - kz - \phi_{x0})}$

- 例:右回り円偏光 $E_{x0} = E_{y0} \equiv E_0 \quad \Delta\phi \equiv \phi_{x0} - \phi_{y0} = \dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-i\Delta\phi} \end{bmatrix} E_0 e^{-i(\omega t - kz - \phi_{x0})} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} E_0 e^{-i(\omega t - kz - \phi_{x0})}$$

  - 「右回り円偏光」は、$E_0, \phi_{x0}, \ldots$によらない

    $\begin{bmatrix} E_{x0} \\ E_{y0} e^{-i\Delta\phi} \end{bmatrix}$ を更に簡略化した $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ で十分

ジョーンズベクトルの規格化

- 電場ベクトル $\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{x0} e^{-i(\omega t - kz - \phi_{x0})} \\ E_{y0} e^{-i(\omega t - kz - \phi_{y0})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{x0} \\ E_{y0} e^{i\Delta\phi} \end{bmatrix} e^{-i(\omega t - kz - \phi_{x0})}$

- 規格化（規格化されたジョーンズベクトル）

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{E_{x0}^2 + E_{y0}^2}} \begin{bmatrix} E_{x0} \\ E_{y0} e^{-i\Delta\phi} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{E_{x0}^2 + E_{y0}^2}} \begin{bmatrix} E_{x0} e^{i\Delta\phi/2} \\ E_{y0} e^{-i\Delta\phi/2} \end{bmatrix}$$

“対称化”

典型的なジョーンズベクトル

x偏光 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$　　y偏光 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$　　θ偏光 $\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$

"+45° 偏光" $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$　　"−45° 偏光" $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

右回り円偏光 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$　　左回り円偏光 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

ジョーンズ行列（予告編）

- 偏光素子（偏光状態の変換）

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{J}' = \begin{bmatrix} J'_x \\ J'_y \end{bmatrix}$$

- ジョーンズ行列　$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\mathbf{J}' = \mathbf{AJ} \qquad \begin{bmatrix} J'_x \\ J'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix}$$